EDMOND RAMIS

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

5

APPLICATIONS
DE L'ANALYSE À LA GÉOMÉTRIE

COURS DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

par

E. Ramis

Inspecteur général de l'Instruction Publique

C. Deschamps

Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand

J. Odoux

Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Champollion, à Grenoble

5

APPLICATIONS DE L'ANALYSE A LA GÉOMÉTRIE

Classes Préparatoires et Enseignement Supérieur (1er cycle)

2e édition
révisée et complétée

MASSON
Paris Milan Barcelone Bonn
1992

TABLE DES MATIÈRES

AVERTISSEMENT

Le présent ouvrage est le cinquième et dernier tome d'un Cours de mathématiques *écrit à l'intention des élèves des classes de* Mathématiques Supérieures *et de* Mathématiques Spéciales *(types M, M' ; P, P' et T).*

• *Conscients de ce qu'un cours de mathématiques peut s'organiser de bien des façons, et désireux de respecter le choix des professeurs — auxquels nous n'avons, naturellement, pas l'intention de nous substituer — nous avons groupé dans chacun des cinq tomes un ensemble cohérent.*

*Les deux premiers sont consacrés à l'*Algèbre *et à ses applications à la* Géométrie. L'Analyse *fait l'objet des tomes 3 et 4. Le dernier tome traite des* Applications de l'Analyse à la Géométrie.

• *Dans les dernières éditions de nos quatre premiers tomes, nous avons pu, sans grande difficulté, nous aligner sur les actuels programmes des classes préparatoires (C.P.), lesquels ne présentent d'ailleurs qu'assez peu de différences avec leurs prédécesseurs.*

Toute autre a été la difficulté en ce qui concerne les Applications de l'Analyse à la Géométrie, les nouveaux programmes marquant en la matière une tendance très nette à une plus grande modestie.

Dans le désir de conserver à notre Cours le caractère d'ouvrage de référence qu'ont bien voulu lui reconnaître un certain nombre d'utilisateurs, nous avons cependant cru devoir conserver dans le tome 5 :

— d'une part les compléments de mathématiques qui rendent l'ouvrage utilisable par les étudiants des universités et par les candidats aux concours de recrutement des professeurs;

— d'autre part les deux chapitres concernant les applications des mathématiques aux autres disciplines scientifiques. C'est ainsi que le futur physicien trouvera au chapitre 5 une étude assez détaillée de l'analyse vectorielle et des théorèmes fondamentaux de Stokes et d'Ostrogradski.

Il va de soi que, chaque fois que cela a été nécessaire nous avons précisé qu'une question dépassait les limites des programmes des C.P.

• Dans tout le Cours, nous avons apporté le plus grand soin au choix des notations. La terminologie utilisée est celle des programmes et de leurs commentaires.

• Afin de nous adapter aux exigences des divers utilisateurs de notre ouvrage, nous avons utilisé deux corps de caractères, les plus petits étant consacrés :

– d'une part à des remarques, exemples et contre-exemples qui doivent être considérés comme formant un tout avec le texte imprimé en caractères normaux,

– d'autre part à des compléments réservés à une « seconde lecture ».

• Nous avons utilisé le signe □, qui peut se lire : « la proposition en résulte » pour matérialiser la fin d'une démonstration et annoncer l'introduction d'une idée nouvelle.

• Le double astérisque, * . . . *, permet d'isoler un résultat faisant intervenir des notions qui n'ont pas encore été étudiées dans le Cours, mais qui sont connues du lecteur (à charge pour celui-ci de s'assurer qu'il n'y a pas de cercle vicieux).

• Le système de repérage est simple : le numéro de tome est indiqué en chiffres romains, ceux du chapitre, du sous-chapitre et du paragraphe en chiffres arabes. C'est ainsi que I.5.6.2 renvoie au second paragraphe du sixième sous-chapitre du cinquième chapitre du tome I, (le numéro de tome n'est pas mentionné lorsqu'il n'y a pas ambiguïté).

Des exercices sont adjoints à chaque chapitre. Bien qu'ils soient de difficulté inégale, nous n'avons pas jugé bon de les repérer par des lettres avertissant le lecteur de leur difficulté croissante. En principe, les plus faciles sont en tête de chaque série.



Les collaborateurs de MASSON S.A. ont consenti pour la mise au point de notre ouvrage un effort dont nous sentons le prix ; nous sommes heureux de les en remercier.

LES AUTEURS

1
ÉTUDE AFFINE DES ARCS

1.1. COMPLÉMENTS DE TOPOLOGIE

1.1.*1*. Topologie finale

1° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soient $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique, F un ensemble, et $\varphi : E \to F$ une application. Alors $\mathscr{T}_\varphi = \{U \in \mathscr{P}(F) | \varphi^{-1}(U) \in \mathscr{T}\}$ est une topologie sur F. C'est la plus fine [1] parmi les topologies sur F qui rendent φ continue. On l'appelle** *topologie finale* **associée à φ.**

— De $\varphi^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ et $\varphi^{-1}(F) = E$, on déduit : $\varnothing \in \mathscr{T}_\varphi$ et $F \in \mathscr{T}_\varphi$.

D'autre part, pour toutes parties U et V de F et pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ de parties de F, on a :

$$\varphi^{-1}(U) \cap \varphi^{-1}(V) = \varphi^{-1}(U \cap V); \qquad \bigcup_{i\in I} \varphi^{-1}(U_i) = \varphi^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right).$$

On en déduit aisément que $\mathscr{T}_\varphi$ est une topologie sur F.

— Pour toute topologie sur F, $\mathscr{T}'$, φ est une application continue de $(E, \mathscr{T})$ dans $(F, \mathscr{T}')$ si, et seulement si : $\forall U \in \mathscr{T}'\ \ \varphi^{-1}(U) \in \mathscr{T}$, ce qui s'écrit : $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}_\varphi$. □

REMARQUES. — *a*) D'après $\varphi^{-1}(F \backslash A) = E \backslash \varphi^{-1}(A)$, une partie A de F est fermée dans $(F, \mathscr{T}_\varphi)$ si, et seulement si la partie $\varphi^{-1}(A)$ de E est fermée dans $(E, \mathscr{T})$.

b) Toute partie de F incluse dans $F \backslash \varphi(E)$ est ouverte dans $(F, \mathscr{T}_\varphi)$. La topologie induite par $\mathscr{T}_\varphi$ sur $F \backslash \varphi(E)$ est donc la topologie discrète. *Dans la pratique, nous n'utiliserons que des applications φ surjectives.*

c) La définition de la topologie finale que nous avons adoptée n'est pas la plus générale.

2° THÉORÈME. — **Soient $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique, F un ensemble et φ une application de E dans F. Alors pour toute application g de $(F, \mathscr{T}_\varphi)$ dans un espace topologique $(G, \mathscr{T}')$, g est continue si, et seulement si l'application $g \circ \varphi$ de $(E, \mathscr{T})$ dans $(G, \mathscr{T}')$ est continue.**

— Si g est continue, comme φ est continue, $g \circ \varphi$ l'est aussi.

— Inversement supposons que $g \circ \varphi$ est continue. Pour tout $U' \in \mathscr{T}'$, nous avons $(g \circ \varphi)^{-1}(U') \in \mathscr{T}$, ce qui s'écrit $\varphi^{-1}[g^{-1}(U')] \in \mathscr{T}$ et entraîne $g^{-1}(U') \in \mathscr{T}_\varphi$; g est ainsi continue. □

---

[1] Étant données deux topologies $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ sur un même ensemble F, on dit que $\mathscr{T}_1$ est plus fine que $\mathscr{T}_2$ si, et seulement si $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$ (au sens de l'inclusion dans $\mathscr{P}(F)$).

REMARQUE. — Le lecteur vérifiera que $\mathcal{T}_\varphi$ est la seule topologie sur F vérifiant la propriété qui fait l'objet du théorème précédent.

3° *Topologie quotient.* — DÉFINITION. — **Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E et φ la surjection canonique de E sur $E/\mathcal{R}$. La topologie finale $\mathcal{T}_\varphi$ est appelée** *topologie quotient* **de $\mathcal{T}$ par $\mathcal{R}$; $(E/\mathcal{R}, \mathcal{T}_\varphi)$ est dit** *espace topologique quotient de $(E, \mathcal{T})$ par $\mathcal{R}$.*

EXEMPLE. — Nous appellerons *topologie usuelle du groupe* $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ la topologie quotient de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. Par transport de structure, nous en déduirons une topologie sur le groupe des angles (II, **2**.3.*4*).

Vérifions qu'avec les notations de la définition précédente nous avons :

PROPOSITION. — **Pour que $(E/\mathcal{R}, \mathcal{T}_\varphi)$ soit séparé, il est nécessaire que le graphe Γ de $\mathcal{R}$ soit fermé dans l'espace topologique $(E, \mathcal{T})^2$. C'est suffisant lorsque l'image par φ de tout ouvert de $(E, \mathcal{T})$ est un ouvert de $(E/\mathcal{R}, \mathcal{T}_\varphi)$ ce que l'on exprime en disant que** *la relation $\mathcal{R}$ est ouverte.*

— Supposons que $E/\mathcal{R}$ est séparé. D'après la proposition III du III.**2**.1.5, la diagonale Δ de $(E/\mathcal{R})^2$ est un fermé de $(E/\mathcal{R})^2$. Or Γ n'est autre que $\Phi^{-1}(\Delta)$, où Φ est l'application $(x, y) \longmapsto (\varphi(x), \varphi(y))$ de E^2 dans $(E/\mathcal{R})^2$, dont la continuité résulte de celle de φ ; Γ est ainsi un fermé de E^2.

— Inversement, supposons que Γ est un fermé de E^2 et que la relation $\mathcal{R}$ est ouverte. Soient X et Y des éléments distincts de $E/\mathcal{R}$; il existe des représentants x et y de X et Y, et on a $x \neq y$; (x, y) est un élément de $E^2 \backslash \Gamma$, qui est un ouvert de E^2. Il existe donc deux ouverts U et V de E, contenant respectivement x et y, tels que l'ouvert élémentaire $U \times V$ soit disjoint de Γ. $\mathcal{R}$ étant ouverte, $\varphi(U)$ et $\varphi(V)$ sont des ouverts de $E/\mathcal{R}$ contenant respectivement X et Y ; ces ouverts sont disjoints, sans quoi il existerait $(x', y') \in U \times V$ tel que $\varphi(x') = \varphi(y')$, ce qui impliquerait $(x', y') \in \Gamma$, et, donc, une contradiction. On en déduit que $E/\mathcal{R}$ est séparé. □

EXEMPLE. — *Montrons que $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, muni de la topologie usuelle, est séparé.*

Ici $\mathcal{R}$ est définie par « $x \mathcal{R} y$ signifie $y - x \in 2\pi\mathbb{Z}$ ». Γ est la réunion des droites d'équations $y = x + 2m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$; le lecteur vérifiera que Γ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. D'autre part $\mathcal{R}$ est ouverte ; en effet soit X un ouvert de $\mathbb{R}$; pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $X + 2m\pi$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ (image d'un ouvert par un homéomorphisme) ; $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (X + 2m\pi)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ qui s'écrit $\varphi^{-1}(\varphi(X))$, avec $\varphi(X) = \varphi\left(\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (X + 2m\pi)\right)$. $\varphi(X)$ est donc un ouvert de $E/\mathcal{R}$. □

Complément sur la décomposition canonique d'une application continue. — Soient E et F deux espaces topologiques, et $f : E \to F$ une application continue. En désignant par $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur E définie par « $x \mathcal{R} y$ signifie $f(x) = f(y)$ », on dispose (I, **1**.3.*3*, 4°) de la décomposition canonique $f = j \circ \bar{f} \circ \varphi$, schématisée par le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \varphi \downarrow & & \uparrow j \\ E/\mathcal{R} & \xrightarrow{\bar{f}} & f(E) \end{array}$$

φ : surjection canonique

j : injection canonique

$\bar{f}$: bijection

D'après le théorème du 2°, la continuité de f implique celle de $j \circ \bar{f}$, et donc (III, 2.2.4, 4°) celle de $\bar{f}$. Mais, en général, on ne peut pas affirmer que $\bar{f}$ est un homéomorphisme.

EXEMPLE. — *Soient $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et f l'application continue et surjective $t \longmapsto e^{it}$ de $\mathbb{R}$ sur U. On obtient par passage au quotient un isomorphisme de groupes $\bar{f} : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to U$.*

D'après ce qui précède $\bar{f}$ est continue. Ici on peut montrer que $\bar{f}$ est un homéomorphisme. En effet $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, qui est séparé (cf. exemple précédent), est compact comme image de $[0, 2\pi]$ par la surjection canonique φ, qui est continue. On termine la démonstration en utilisant III.2.5.1, 6°. □

1.1.2. Espace topologique des droites d'un e.v.n.

Dans ce paragraphe $(E, \|.\|)$ désigne un $\mathbb{R}$-e.v.n. non nul. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des droites (vectorielles) de E, φ l'application $x \longmapsto \mathbb{R}x$ de $E \setminus \{0\}$ dans $\mathscr{D}$, ψ la restriction de φ à la sphère unité, S, de E.

E est muni de la topologie de la norme; $E \setminus \{0\}$ et S sont munis des topologies induites.

1° THÉORÈME ET NOTATION. — **Sur $\mathscr{D}$, les topologies finales $\mathscr{T}_\varphi$ et $\mathscr{T}_\psi$ sont égales; on les note $\mathscr{T}$.**

— L'injection canonique $j : S \to E \setminus \{0\}$ est continue; $\psi = \varphi \circ j$ est donc une application continue de S dans $(\mathscr{D}, \mathscr{T}_\varphi)$; comme $\mathscr{T}_\psi$ est la plus fine parmi les topologies sur $\mathscr{D}$ qui rendent ψ continue, on a $\mathscr{T}_\varphi \subset \mathscr{T}_\psi$.

— L'application $x \longmapsto \|x\|^{-1}x$ de $E \setminus \{0\}$ dans S, notée θ, est continue; $\varphi = \psi \circ \theta$ est donc une application continue de $E \setminus \{0\}$ dans $(\mathscr{D}, \mathscr{T}_\psi)$; en raisonnant comme ci-dessus, on en déduit $\mathscr{T}_\psi \subset \mathscr{T}_\varphi$. □

REMARQUES. — *a*) La propriété fondamentale est la continuité de l'application φ de $E \setminus \{0\}$ dans $(\mathscr{D}, \mathscr{T})$. En d'autres termes : *l'application qui à un vecteur non nul associe la droite vectorielle qu'il engendre est continue.*

b) Concrètement, pour toute $U \subset \mathscr{D}$, $\psi^{-1}(U)$ est la trace sur la sphère S du cône de E réunion des éléments de U (fig. 1); on peut ainsi se faire une idée intuitive des ouverts de $(\mathscr{D}, \mathscr{T})$.

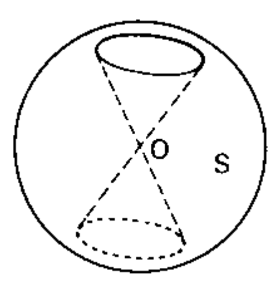


FIG. 1.

2° THÉORÈME. — **L'espace topologique $(\mathscr{D}, \mathscr{T})$ est métrisable (et donc séparé).**

Pour toute droite $D \in \mathscr{D}$, $D \cap S = \psi^{-1}(D)$ est constitué de deux éléments opposés de S. Pour tout $(D, D') \in \mathscr{D}^2$, nous disposons donc de :

$$d(D, D') = \min \{\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|, \mathbf{v} \in D \cap S, \quad \mathbf{v}' \in D' \cap S\}$$

et nous pouvons écrire $d(D, D') = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\|$, où $\mathbf{u} \in D \cap S$ est arbitrairement choisi (fig. 2) et où $\mathbf{u}'$ est alors déterminé sans ambiguïté, au moins si $d(D, D') < 1$ (ainsi qu'on le constate en utilisant l'inégalité triangulaire). Il va de soi qu'on peut choisir tout aussi bien $\mathbf{u}' \in D' \cap S$.

α) *Montrons que l'application* $d : \mathscr{D}^2 \to \mathbb{R}_+$ *ainsi définie est une distance.*

— Il est évident que :

$$\forall (D, D') \in \mathscr{D}^2 \qquad d(D, D') = d(D', D) \quad \text{et :} \quad \forall D \in \mathscr{D} \qquad d(D, D) = 0.$$

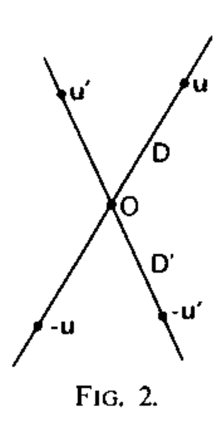


FIG. 2.

— Soit $(D, D') \in \mathscr{D}^2$ tel que $d(D, D') = 0$; les ensembles $D \cap S$ et $D' \cap S$ ont un élément commun, ce qui exige $D = D'$.

— Soit $(D, D', D'') \in \mathscr{D}^3$. Écrivons :

$$d(D, D') = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\| \qquad \text{et} \qquad d(D', D'') = \|\mathbf{u}' - \mathbf{u}''\|$$

en usant de la possibilité de choisir le même $\mathbf{u}' \in D' \cap S$ dans les deux égalités, étant entendu que $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}''$ appartiennent respectivement à $D \cap S$ et $D'' \cap S$. On en déduit :

$$d(D, D'') \leqslant \|\mathbf{u} - \mathbf{u}''\| \leqslant d(D, D') + d(D', D''). \qquad \square$$

β) *Soit* $\mathscr{T}_d$ *la topologie induite sur* $\mathscr{D}$ *par la distance d. Montrons :* $\mathscr{T}_d = \mathscr{T}_\psi$.

Dans le schéma : $S \xrightarrow{\psi} (\mathscr{D}, \mathscr{T}_\psi) \xrightarrow{Id_\mathscr{D}} (\mathscr{D}, \mathscr{T}_d)$, l'application $\mathrm{Id}_\mathscr{D} \circ \psi$ est continue ; en effet :

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in S^2, \qquad d(\psi(\mathbf{u}), \psi(\mathbf{v})) \leqslant \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Il en résulte (**1**.1.*1*, 2°) que $\mathrm{Id}_\mathscr{D}$ est continue, et donc que $\mathscr{T}_d \subset \mathscr{T}_\psi$.

— Inversement, soit $U \in \mathscr{T}_\psi$. Donnons-nous $D_0 \in U$ et $\mathbf{u}_0 \in \psi^{-1}(D_0)$; $\mathbf{u}_0$ étant un élément de l'ouvert $\psi^{-1}(U)$ de S, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ tel que :

$$\forall \mathbf{u} \in S \quad (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| < \alpha) \Rightarrow (\mathbf{u} \in \psi^{-1}(U)).$$

A toute droite $D \in \mathscr{D}$ telle que $d(D_0, D) < \alpha$, on peut associer $\mathbf{v} \in D \cap S$ tel que $d(D_0, D) = \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}\|$; on a ainsi $\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}\| < \alpha$, et donc $\mathbf{v} \in \psi^{-1}(U)$, ce qui entraîne $D \in U$. On en déduit $U \in \mathscr{T}_d$ pour tout $U \in \mathscr{T}_\psi$, et donc $\mathscr{T}_\psi \subset \mathscr{T}_d$.

$\square$

CAS PARTICULIER OU E EST PRÉHILBERTIEN. — Soit $(D, D') \in \mathscr{D}^2$. Désignons par θ, avec $\theta \in [0, \pi/2]$, l'écart angulaire des droites D et D'. Pour tous $\mathbf{u} \in \psi^{-1}(D)$ et $\mathbf{u}' \in \psi^{-1}(D')$, l'écart angulaire λ des vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$ vérifie $\lambda = \theta$ ou $\lambda = \pi - \theta$. En utilisant :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\|^2 = 2(1 - \cos \lambda) = 4 \sin^2 \lambda/2,$$

on obtient : $d(D, D') = 2 \min (\sin \theta/2, \cos \theta/2)$ et, comme $\theta/2 \in [0, \pi/4]$:

$$d(D, D') = 2 \sin \theta/2.$$

3° ***Changement de norme.*** — Si l'on remplace $\|.\|$ par une norme équivalente N, la topologie de la norme sur E n'est pas changée. Il en résulte que *la topologie $\mathscr{T}$ introduite sur $\mathscr{D}$ au 1° n'est pas changée* et donc que *la distance d introduite sur $\mathscr{D}$ au 2° est remplacée par une distance δ topologiquement équivalente.*

Montrons qu'en fait les distances d et δ sont équivalentes.

Par hypothèse :

$$(\exists(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+\backslash\{0\})^2)\ (\forall \mathbf{x} \in E \quad \alpha N(\mathbf{x}) \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant \beta N(\mathbf{x})).$$

Soit $(D, D') \in \mathscr{D}^2$. Notant Σ la sphère unité de (E, N), écrivons :

$$\delta(D, D') = N(\mathbf{u} - \mathbf{u}'), \text{ avec } \mathbf{u} \in D \cap \Sigma \text{ et } \mathbf{u}' \in D' \cap \Sigma.$$

Comme $\mathbf{u} \neq 0$ et $\mathbf{u}' \neq 0$, nous disposons de $\dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \in D \cap S$ et $\dfrac{\mathbf{u}'}{\|\mathbf{u}'\|} \in D' \cap S$, ce qui permet d'écrire :

$$d(D, D') \leqslant \left\|\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} - \frac{\mathbf{u}'}{\|\mathbf{u}'\|}\right\| = \left\|\frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}'}{\|\mathbf{u}\|} + \left(\frac{1}{\|\mathbf{u}\|} - \frac{1}{\|\mathbf{u}'\|}\right)\mathbf{u}'\right\|$$

et :

$$d(D, D') \leqslant \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\|}{\|\mathbf{u}\|} + \frac{|\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{u}'\||}{\|\mathbf{u}\|} \leqslant 2\,\frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\|}{\|\mathbf{u}\|}.$$

Compte tenu de $\|\mathbf{u}\| \geqslant \alpha N(\mathbf{u})$ et $N(\mathbf{u}) = 1$, on en déduit :

$$d(D, D') \leqslant 2\beta/\alpha . N(\mathbf{u} - \mathbf{u}') = 2\beta/\alpha . \delta(D, D')$$

En intervertissant le rôle des normes : $\delta(D, D') \leqslant 2\beta/\alpha . d(D, D')$. □

4° CAS OU E EST DE DIMENSION FINIE. — *a*) **On peut parler de la topologie de l'ensemble $\mathscr{D}$ des droites d'un e.v.n. de dimension finie, sans autre précision.**

En effet, ici toutes les normes sur E sont équivalentes. □

b) **Si E est de dimension finie, $(\mathscr{D}, \mathscr{T})$ est compact.**

En effet S est ici un compact de E et $\mathscr{D}$ en est l'image par $\varphi : E\backslash\{0\} \to (\mathscr{D}, \mathscr{T})$, qui est continue. □

5° ***Un résultat important.*** — Nous ne faisons pas d'hypothèse sur dim E.

THÉORÈME. — **Soient D un élément de $\mathscr{D}$, Λ un espace topologique, A une partie de Λ, a un point de $\bar{A}$, Δ une application de A dans $\mathscr{D}$. Il y a équivalence entre les deux assertions :**

i) $D = \lim\limits_{t \to a,\, t \in A} \Delta(t)$;

ii) Il existe une application u de A dans $E \backslash \{0\}$ vérifiant à la fois :

$$\begin{cases} \alpha) & \forall t \in A \qquad \mathbf{u}(t) \in \Delta(t) \backslash \{0\} \\ \beta) & \exists \mathbf{v} \in D \backslash \{0\} \qquad \lim\limits_{t \to a,\, t \in A} \mathbf{u}(t) = \mathbf{v}. \end{cases}$$

Preuve de ii) $\Rightarrow$ i). — L'hypothèse est ii) ; α) permet d'écrire $\Delta = \varphi \circ \mathbf{u}$; on conclut à l'aide de III.2.2.3, 2°, *b*), en utilisant β) et la continuité de φ.□

Preuve de i) $\Rightarrow$ ii). — L'hypothèse est i). Elle implique l'existence d'un voisinage U de a dans Λ tel que :

$$\forall t \in U \cap A \qquad d(D, \Delta(t)) < 1.$$

Ayant choisi arbitrairement $\mathbf{v} \in D \cap S$, on en déduit qu'à tout $t \in U \cap A$ on peut associer un unique élément de $\Delta(t) \cap S$, noté $\mathbf{u}(t)$, tel que : $d(D, \Delta(t)) = \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}\|$. On choisit arbitrairement la restriction de $\mathbf{u}$ à $A \backslash U$, et on constate que l'application $\mathbf{u}$ ainsi construite vérifie α) et β). □

REMARQUE. — On peut supposer que $\mathbf{u}$ vérifie : $\forall t \in A \quad \|\mathbf{u}(t)\| = 1$.

6° *Complément*. — On suppose ici que E est un plan vectoriel euclidien, rapporté à une base $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$. A tout réel ω on associe le vecteur :

$$\mathbf{u}_\omega = \cos \omega \mathbf{i} + \sin \omega \mathbf{j}.$$

Les notations étant celles du théorème du 5°, avec $D = \mathbb{R}\mathbf{u}_{\theta_0}$ où $\theta_0 \in \mathbb{R}$ est donné :

PROPOSITION. — **Pour que $D = \lim\limits_{t \to a,\, t \in A} \Delta(t)$, il faut et il suffit qu'il existe une application θ de A dans $\mathbb{R}$ vérifiant à la fois :**

i) $\forall t \in A \quad \mathbf{u}_{\theta(t)} \in \Delta(t)$;

ii) $\lim\limits_{t \to a,\, t \in A} \theta(t) = \theta_0$.

— La condition est suffisante d'après le théorème du 5° et la continuité de $\omega \longmapsto \mathbf{u}_\omega$.

— Inversement supposons $\lim\limits_{t \to a,\, t \in A} \Delta(t) = \mathbb{R}\mathbf{u}_{\theta_0}$, et considérons, comme dans la démonstration du 5°, le vecteur $\mathbf{u}(t)$ tel que $d(D, \Delta(t)) = \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_{\theta_0}\|$.

Nous constatons que $\mathbf{u}(t)$ peut s'écrire $\mathbf{u}_{\theta(t)}$, avec $\theta(t) - \theta_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; d'où (cf. 2°) :

$$\theta(t) - \theta_0 = 2 \operatorname{Arc} \sin\left(\frac{1}{2} d(D, \Delta(t))\right), \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to a,\, t \in A} \theta(t) = \theta_0. \qquad \square$$

• THÉORÈME. — **Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément de $\overline{I}$, θ une application continue de I dans $\mathbb{R}$; pour $t \in I$, on pose $\Delta(t) = \mathbb{R}\mathbf{u}_{\theta(t)}$. Alors :**

$$\lim_{t \to t_0,\, t \in I} \Delta(t) \ \textbf{existe si et seulement si} \ \lim_{t \to t_0,\, t \in I} \theta(t) \ \textbf{existe (dans } \mathbb{R}\textbf{)}.$$

— La condition est suffisante d'après la proposition précédente.

— Inversement supposons que $\lim_{t \to t_0} \Delta(t)$ existe et notons la $\mathbb{R}\mathbf{u}_{\theta_0}$. D'après la proposition précédente, il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ vérifiant à la fois :

$$(1) \quad \forall t \in I \qquad u_{\varphi(t)} \in \Delta(t); \qquad \lim_{t \to t_0} \varphi(t) = \theta_0 \qquad (2)$$

Il existe donc $k : I \to \mathbb{Z}$, telle que :

$$\forall t \in I \qquad \theta(t) = \varphi(t) + \pi k(t) \qquad (3)$$

D'après (2), il existe (critère de Cauchy) un intervalle $V \in \mathscr{V}(t_0)$ tel que, W désignant $V \cap I$:

$$\forall (t', t'') \in W^2 \qquad |\varphi(t') - \varphi(t'')| < \pi/4.$$

Soit $(t', t'') \in W^2$. Faisons l'hypothèse :

$$(H) \quad k(t') \neq k(t''), \qquad \text{et donc} \qquad |k(t') - k(t'')| \geqslant 1.$$

Il en résulte :

$$|\theta(t') - \theta(t'')| \geqslant \pi|k(t') - k(t'')| - |\varphi(t') - \varphi(t'')| \geqslant \pi - \frac{\pi}{4}$$

La continuité de θ sur $[t', t'']$ assure alors l'existence de $\tau \in W$ tel que :

$$|\theta(\tau) - \theta(t')| = \pi/2.$$

On en déduit :

$$\frac{\pi}{2} - |\varphi(\tau) - \varphi(t')| \leqslant \pi|k(\tau) - k(t')| \leqslant \frac{\pi}{2} + |\varphi(\tau) - \varphi(t')|$$

et donc : $\qquad 1/4 \leqslant |k(\tau) - k(t')| \leqslant 3/4$

ce qui est en contradiction avec $k(\tau) - k(t') \in \mathbb{Z}$. (H) est donc absurde.

Ainsi $k(t') = k(t'')$ pour tout $(t', t'') \in W^2$; l'application k est constante sur W et admet donc une limite en t_0 ; d'après (2) et (3), il en est de même pour θ.

$\square$

REMARQUES. — *a*) L'hypothèse de continuité de θ est essentielle dans le théorème. C'est ainsi que si $\theta(t) = \pi E(t)$, où E est la partie entière, alors $\Delta(t)$, qui est $\mathbb{R}i$, admet une limite lorsque t tend vers $+\infty$, alors que $\theta(t)$ n'admet pas de limite.

b) La notion de valeur d'adhérence d'une application fournit une démonstration plus simple du théorème.

1.1.3. Grassmanniennes

Les démonstrations pourront être réservées pour une seconde lecture.

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$. Toutes les normes sur E étant équivalentes, nous pouvons munir E de sa *topologie naturelle* (celle qui est définie par l'une quelconque des normes).

1° DÉFINITION. — **Pour tout $p \in \mathbb{N}_n$, on note L_p l'ensemble des systèmes libres de p vecteurs de E, muni de la topologie induite par la topologie produit sur E^p, et on appelle** *grassmannienne d'ordre p de E* **l'espace topologique $(\mathscr{G}_p, \mathscr{T}_p)$, où $\mathscr{G}_p$ est l'ensemble des sous espaces de dimension p de E, et où $\mathscr{T}_p$ est la topologie finale associée à l'application surjective :**

$$\varphi_p : L_p \to \mathscr{G}_p \qquad (x_1, \ldots, x_p) \longmapsto \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_p).$$

C'est ainsi que $(\mathscr{D}, \mathscr{T})$, étudié au **1.1.2** est la grassmannienne d'ordre 1.

2° ***Étude de la grassmannienne d'ordre** p.* — Dans les démonstrations des théorèmes I et II du 2° et du 3°, nous aurons le droit de supposer que la topologie canonique de E a été introduite à partir d'une norme euclidienne.

THÉORÈME I. — **L'espace topologique $(\mathscr{G}_p, \mathscr{T}_p)$ est séparé.**

Soient X et Y deux éléments distincts de $\mathscr{G}_p$; pour des raisons de dimension, on n'a pas $X \subset Y$, et il existe $e \in X$ tel que $e \notin Y$. E étant considéré comme euclidien, nous disposons de l'application :

$$f : \mathscr{G}_p \to \mathbb{R} \qquad Z \longmapsto d(e, Z)^2$$

D'après II.2.1.2, $f \circ \varphi_p$ s'écrit : $(x_1, \ldots, x_p) \longmapsto \dfrac{\mathrm{Gram}\,(e, x_1, \ldots, x_p)}{\mathrm{Gram}\,(x_1, \ldots, x_p)}$ et est donc continue; d'où la continuité de f (**1.1.1**, 2°).

Nous avons par ailleurs $f(X) = 0$ et $f(Y) \neq 0$; $\mathbb{R}$ étant séparé, il existe deux ouverts disjoints U et V de $\mathbb{R}$, voisinages respectifs de $f(X)$ et de $f(Y)$; nous constatons que $f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(V)$ sont des voisinages disjoints de X et Y respectivement. □

THÉORÈME II. — **L'espace topologique $(\mathscr{G}_p, \mathscr{T}_p)$ est compact.**

La séparation est acquise.

— E étant considéré comme euclidien, montrons d'abord que *le groupe orthogonal $O(E)$ est une partie compacte de $\mathscr{L}(E)$*. Il suffit de montrer que le groupe $O_{\mathbb{R}}(n)$ des matrices orthogonales réelles d'ordre n est une partie compacte de l'e.v.n. de dimension finie $\mathscr{M}_{\mathbb{R}}(n)$; or il s'agit d'une

partie fermée (image réciproque de $\{I_n\}$ par l'application continue $M \longmapsto {}^tMM$), et bornée (toute $M \in O_{\mathbb{R}}(n)$ vérifie $N_\infty(M) \leqslant 1$).

— Déduisons en que l'*ensemble* L_p^0 *des familles orthonormales de p vecteurs de E est un compact.* Dans le cas $p = n$, cela résulte de ce que L_n^0 est l'image du compact $O(E)$ par l'application manifestement continue et surjective :

$$O(E) \to L_n^0 \qquad u \longmapsto (u(e_1), \ldots, u(e_n))$$

où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale arbitrairement choisie de E.

Dans le cas général, on considère L_p^0 comme l'image de L_n^0 par l'application continue $(x_1, \ldots, x_p, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_p)$, qui est surjective puisque toute famille orthonormale de p vecteurs peut être complétée en une base orthonormale.

— Enfin $\mathcal{G}_p = \varphi_p(L_p^0)$ est un compact. □

3° ***Étude de l'espace des hyperplans.*** — L'espace topologique $(\mathcal{G}_{n-1}, \mathcal{T}_{n-1})$ des hyperplans de E est abréviativement noté $\mathcal{H}$.

THÉORÈME I. — **Les espaces $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}$ des hyperplans et des droites de E sont homéomorphes.**

Considérons encore E comme euclidien, ce qui permet de disposer de l'application bijective $h : H \longmapsto H^\perp$ de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{D}$. Comme $\mathcal{H}$ est compact (théorème II du 2°) et $\mathcal{D}$ séparé, il suffit, pour montrer que h est un homéomorphisme, de montrer (III.2.5.*1*, 6°) que h est continue, ou encore, puisque $\mathcal{H}$ est muni d'une topologie finale, de montrer que l'application

$$L_{n-1} \to \mathcal{D} \qquad (x_1, \ldots, x_{n-1}) \longmapsto [\mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_{n-1})]^\perp$$

est continue. Or, quitte à orienter arbitrairement E, nous pouvons considérer celle-ci comme la composée des applications continues :

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}) \longmapsto x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \qquad \text{et} \qquad \varphi_1 : x \longmapsto \mathbb{R}x. \qquad \square$$

En considérant $h^{-1} \circ \varphi_1$, nous obtenons, au passage :

PROPOSITION. — ***E* étant euclidien, l'application $g : x \longmapsto x^\perp$ de $E\backslash\{0\}$ dans $\mathcal{H}$ est continue.**

• THÉORÈME II. — **L'application $f : u \longmapsto \mathrm{Ker}\, u$ de $E^*\backslash\{0\}$ dans $\mathcal{H}$ est continue.**

E étant encore considéré comme euclidien, nous disposons de l'isomorphisme canonique (II.2.1.*3*, 2°) de E^* sur E qui induit un homéomorphisme θ de $E^*\backslash\{0\}$ sur $E\backslash\{0\}$. Or f s'écrit $g \circ \theta$, où g est l'application continue considérée dans la proposition précédente. □

COROLLAIRE I. — **$\mathcal{H}$ est homéomorphe à l'espace $\mathcal{D}^*$ des droites de E^*.**

Notons γ la bijection naturelle de $\mathcal{D}^*$ sur $\mathcal{H}$ (I.9.3.*3*, 3°) ; $\mathcal{D}^*$ étant muni de la topologie finale associée à :

$$\varphi_1^* : E^*\backslash\{0\} \to \mathcal{D}^* \qquad u \longmapsto \mathbb{R}u,$$

nous avons $f = \gamma \circ \varphi_1^*$; d'où la continuité de l'application bijective γ qui, compte tenu de la compacité de $\mathcal{D}^*$ et de la séparation de $\mathcal{H}$, est un homéomorphisme. □

COROLLAIRE II. — **Soit e** $= (e_1, \ldots, e_n)$ **une base de** E. **L'application de** $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ **dans** $\mathscr{H}$ **qui à** $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ **associe l'hyperplan admettant** $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i = 0$ **pour équation dans e est continue.**

On utilise le théorème II et l'isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur E^* qui est associé à la base e. □

1.1.4. Cas des espaces affines normés

1° Nous aurons besoin par la suite du résultat suivant :

THÉORÈME. — **Soient** $(\mathscr{E}, E)$ **un espace affine de dimension finie,** d_1 **et** d_2 **les distances sur** $\mathscr{E}$ **associées aux normes** N_1 **et** N_2 **sur** E **; on sait qu'il existe** $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ **tel que :** $\alpha d_1 \leqslant d_2 \leqslant \beta d_1$. **Alors pour tout** $m \in \mathscr{E}$ **et pour toute variété affine** $\mathscr{V}$ **de** $\mathscr{E}$ **:**

$$\alpha d_1(m, \mathscr{V}) \leqslant d_2(m, \mathscr{V}) \leqslant \beta d_1(m, \mathscr{V}) \qquad (1)$$

Soit $m \in \mathscr{E}$. Nous avons :

$$\forall p \in \mathscr{V} \qquad \alpha d_1(m, p) \leqslant d_2(m, p) \leqslant \beta d_1(m, p).$$

Il en résulte :

$$\alpha . \inf_{p \in \mathscr{V}} d_1(m, p) \leqslant \inf_{p \in \mathscr{V}} d_2(m, p) \leqslant \beta . \inf_{p \in \mathscr{V}} d_1(m, p)$$ □

2° Dans la suite du paragraphe $(\mathscr{E}, E, \|.\|)$ désigne un $\mathbb{R}$-e.a.n. de dimension finie $n > 0$. $\mathscr{E}$ est muni de la topologie associée à la distance de la norme $\|.\|$, topologie d'ailleurs indépendante du choix de cette norme.

• Soient a un point de $\mathscr{E}$, et $\mathscr{E}_a$ le vectorialisé de a. Pour tout $p \in \mathbb{N}_n$, $\mathscr{G}_{a,p}$ désigne l'ensemble des variétés affines de dimension p de $\mathscr{E}$ qui contiennent a, c'est-à-dire la grassmannienne d'ordre p de $\mathscr{E}_a$ (que l'on munit de la topologie introduite au **1.1.3**). Abréviativement on écrit $\mathscr{D}_a$ pour $\mathscr{G}_{a,1}$ et $\mathscr{H}_a$ pour $\mathscr{G}_{a,n-1}$.

Le lecteur vérifiera aisément les propriétés suivantes :

a) $m \longmapsto \overrightarrow{am}$ *est un homéomorphisme* (et même une isométrie) *de* $\mathscr{E}$ *sur* E*;*

b) $m \longmapsto \mathrm{Aff}(a, m)$ *est une application continue de* $\mathscr{E} \setminus \{a\}$ *dans* $\mathscr{D}_a$ (composée de $m \longmapsto \overrightarrow{am}$ et de $\mathbf{x} \longmapsto \mathbb{R}\mathbf{x}$);

c) Étant donné $\mathscr{V} \in \mathscr{G}_{a,p}$ (avec ici $n \geqslant 2$ et $p \leqslant n - 2$), $m \longmapsto \mathrm{Aff}(\mathscr{V} \cup \{m\})$ *est une application continue de* $\mathscr{E} \setminus \mathscr{V}$ *dans* $\mathscr{G}_{a,p+1}$.

• Soient F un sous-espace vectoriel de E et $\mathscr{W}$ l'ensemble des variétés affines de $\mathscr{E}$ dont la direction est F. Le lecteur vérifiera que les topologies suivantes sur $\mathscr{W}$ coïncident :

a) La topologie finale associée à $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{W}$, avec $\varphi(m) = m + F$;

b) La topologie finale associée à la restriction de φ à une variété affine $\mathscr{V}'$ de $\mathscr{E}$, de direction supplémentaire de F;

c) La topologie associée à la distance d sur $\mathscr{W}$ obtenue en notant $d(\mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2)$ la distance des variétés parallèles $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$, au sens de la distance de deux espaces métriques.

Il s'agit d'une topologie métrisable, donc séparée.

Notons qu'en *b*), $m \longmapsto m + F$ est un homéomorphisme de $\mathscr{V}'$ sur $\mathscr{W}$.

3° ***Étude pratique de la limite d'une droite d'un plan.*** — Ici $\mathscr{E}$ est un plan affine normé rapporté à un repère affine $(O\,;\mathbf{i},\mathbf{j})$; a est un point de $\mathscr{E}$. On considère une application $\lambda \longmapsto \mathscr{F}_\lambda$ d'une partie A d'un espace topologique Λ dans l'ensemble $\mathscr{D}_a$ des droites affines de $\mathscr{E}$ qui contiennent a ; λ_0 est un point de $\bar{A}$.

Si, pour $\lambda \in A$, la direction F_λ de $\mathscr{F}_\lambda$ ne contient pas le vecteur $\mathbf{j}$, on dispose du *coefficient directeur* de $\mathscr{F}_\lambda$ (*coefficient angulaire* si le repère est orthonormal), qui est le réel $\mu(\lambda)$ défini par $F_\lambda = \mathbb{R}(\mathbf{i} + \mu(\lambda)\mathbf{j})$.

THÉORÈME. — **La condition $\mathbf{j} \notin F_\lambda$ étant supposée remplie pour tout $\lambda \in A$:**

i) Si $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0, \lambda \in A} \mu(\lambda) = \mu \in \mathbb{R}$, **alors** $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0, \lambda \in A} \mathscr{F}_\lambda = a + \mathbb{R}(\mathbf{i} + \mu\mathbf{j})$;

ii) Si $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0, \lambda \in A} |\mu(\lambda)| = +\infty$, **alors** $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0, \lambda \in A} \mathscr{F}_\lambda = a + \mathbb{R}\mathbf{j}$;

iii) Dans tout autre cas, $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0, \lambda \in A} \mathscr{F}_\lambda$ **n'existe pas.**

Preuve. — Dans chaque cas, on utilise **1**.1.*2*, 5°. Plus précisément :

i) De $F_\lambda = \mathbb{R}(\mathbf{i} + \mu(\lambda)\mathbf{j})$ on déduit $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0, \lambda \in A} F_\lambda = \mathbb{R}(\mathbf{i} + \mu\mathbf{j})$. □

ii) Il existe $V \in \mathscr{V}(\lambda_0)$ tel que, pour tout $\lambda \in V \cap A$, $\mu(\lambda) \neq 0$ et donc

$$F_\lambda = \mathbb{R}(1/\mu(\lambda).\mathbf{i} + \mathbf{j}), \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{\lambda \to \lambda_0, \lambda \in A} F_\lambda = \mathbb{R}\mathbf{j}. \qquad \square$$

iii) Supposons que $\mathscr{F}_\lambda$ (i.e. F_λ) admette une limite. Il existe $\xi : A \to \mathbb{R}$, $\eta : A \to \mathbb{R}$ et $(\xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ vérifiant les deux assertions :

α) Pour tout $\lambda \in A$, $\xi(\lambda)\mathbf{i} + \eta(\lambda)\mathbf{j}$ est un vecteur non nul de F_λ ;

β) $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0, \lambda \in A} (\xi(\lambda)\mathbf{i} + \eta(\lambda)\mathbf{j}) = \xi_0\mathbf{i} + \eta_0\mathbf{j}$.

La condition $\mathbf{j} \notin F_\lambda$ impose $\xi(\lambda) \neq 0$; on a $\mu(\lambda) = \eta(\lambda)/\xi(\lambda)$. Si $\xi_0 \neq 0$, alors $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0, \lambda \in A} \mu(\lambda) = \eta_0/\xi_0$; on est dans le cas i). Si $\xi_0 = 0$, alors $\eta_0 \neq 0$ et $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0, \lambda \in A} |\mu(\lambda)| = +\infty$; on est dans le cas ii). □

REMARQUES. — *a*) Le théorème s'applique s'il existe $W \in \mathscr{V}(\lambda_0)$ tel que $\mathbf{j} \notin F_\lambda$ soit vrai pour tout $\lambda \in W \cap A$.

b) Inversement si $\mathscr{F}_\lambda$ admet une limite différente de $a + \mathbb{R}\mathbf{j}$, $\mu(\lambda)$ est défini au voisinage de λ_0.

Si $\mathscr{F}_\lambda$ admet $a + \mathbb{R}\mathbf{j}$ pour limite, on ne peut affirmer l'existence de $\mu(\lambda)$; on a alors la possibilité d'intervertir les rôles de $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$.

1.2. ARCS PARAMÉTRÉS (OU COURBES PARAMÉTRÉES)

($\mathscr{E}$, E, $\|.\|$) désigne un $\mathbb{R}$-e.a.n. de dimension finie $n > 0$, qui pourra être $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure affine canonique; dans la pratique : $n = 2$ ou $n = 3$. Les intervalles de $\mathbb{R}$ considérés sont supposés d'intérieur non vide.

1.2.*1*. Définitions générales

Rappel de topologie. — Nous utiliserons la définition du III.**8**.1.*1*, 9°, étendue aux espaces affines sous la forme :

DÉFINITION. — **Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux espaces affines de dimensions finies p et n, et f une application continûment différentiable d'un ouvert U de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{B}$. On dit que f est une *immersion* (resp. une *submersion*) si, et seulement si, pour tout $x \in U$, $\mathrm{d}f(x)$ est injective (resp. surjective) i.e. de rang p (resp. n). On dit que f est un *plongement* si et seulement si d'une part elle est une immersion, d'autre part elle est une injection qui induit un homéomorphisme $x \longmapsto f(x)$ de U sur $f(U)$, considéré comme sous-espace topologique de $\mathscr{B}$.**

Dans le cas où $\mathscr{A} = \mathbb{R}$, nous étendrons cette définition au cas où U est un intervalle de $\mathbb{R}$, pas nécessairement ouvert.

1° ***Arcs paramétrés (ou courbes paramétrées).*** — DÉFINITION. — **On appelle** *arc paramétré* (ou *courbe paramétrée*) **de $\mathscr{E}$ tout couple** [1] **(I, f) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une application continue de I dans $\mathscr{E}$; $f(I) \subset \mathscr{E}$ est le** *support* **de l'arc, on le note supp (I, f). Dans le cas où I est compact, on parle d'***arc paramétré compact*, **ou encore de** *chemin* (*cf.* III.**2**.6.*3*).

Image continue d'un connexe de $\mathbb{R}$, *le support est un connexe de $\mathscr{E}$. Si l'arc est compact ($I = [a, b]$) c'est un compact connexe de* $\mathbb{R}$; les points $f(a)$ et $f(b)$ en sont alors respectivement l'*origine* et l'*extrêmité.*

Sauf avis contraire, supp (I, f) est muni de la topologie induite par celle de $\mathscr{E}$.

Une question de vocabulaire. — **Toutes les fois que** (nous conformant à une notation traditionnelle qui a l'avantage d'éviter d'introduire une acception supplémentaire du mot « courbe ») **nous allons écrire** *arc paramétré*, **le lecteur pourra lire** *courbe paramétrée* (notation utilisée dans les programmes des C.P.).

---

[1] La donnée d'une application implique celle de son ensemble de départ; il peut donc paraitre inutile d'introduire (I, f) là où f suffirait; dans la pratique, cette précaution s'avère cependant commode.

2° *Étude d'un arc paramétré*

• ***Points de l'arc : multiplicité d'un point du support.*** — DÉFINITION I. — **Soient $\gamma = (I, f)$ un arc paramétré et t un élément de I. On dit que le triplet** $M(t) = (I, f, t)$ **est** *le point de γ de paramètre t* **et que $m = f(t)$ est l'image de ce point.**

On dit que Card $\{f^{-1}(m)\}$ — étant entendu que ce symbole désigne $+\infty$ si l'ensemble $\{f^{-1}(m)\}$ est infini — **est la** *multiplicité de m relativement à γ.*

REMARQUE. — La multiplicité dépend de l'arc, et pas seulement du support. C'est ainsi que si $\mathscr{E} = \mathbb{R}^2$ et si f est $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, le point $(1, 0)$ du support a pour multiplicité 1, 2 ou $+\infty$ selon que I est $[0, 2\pi[$, $[0, 2\pi]$ ou $\mathbb{R}$; pourtant, dans les trois cas, le support est le même.

• ***Sous-arcs.*** — DÉFINITION II. — **Soient (I, f) un arc paramétré et I' un sous-intervalle de I ; on note $f|I'$ la restriction de f à I'. Alors $(I', f|I')$ est un arc paramétré qui est dit** *sous arc* **de (I, f).**

Nous savons en effet que $f|I'$ est continue.
Notons que le support d'un sous-arc est une partie de celui de l'arc.

Avec les notations de la définition I, *pour tout $t_0 \in I'$ nous identifierons le point $(I', f|I', t_0)$ de $(I', f|I')$ et le point (I, f, t_0)* de (I, f).

• ***Arcs simples.*** — DÉFINITION III. — **On dit qu'un arc paramétré (I, f) est** *simple* **si, et seulement si f est une injection. Un arc paramétré compact et simple est appelé** *arc de Jordan.*

REMARQUES. — *a*) Tout sous-arc d'un arc simple est simple.

b) Si (I, f) est un arc simple, la bijection $\bar{f} : t \longmapsto f(t)$ de I sur $\mathscr{S} = \operatorname{supp}(I, f)$ induite par l'injection f permet de transportet sur $\mathscr{S}$ la structure d'ordre total de I, et fournit une topologie de l'ordre sur $\mathscr{S}$, qui ne coïncide pas nécessairement avec la topologie habituelle de $\mathscr{S}$ (induite par celle de $\mathscr{E}$).

PROPOSITION I. — **Si (I, f) est un arc de Jordan, alors f induit un homéomorphisme de I sur** $\mathscr{S} = \operatorname{supp}(I, f)$.

La bijection $\bar{f} : I \to \mathscr{S}$ induite par f est continue ; I est compact, $\mathscr{S}$ est une partie de $\mathscr{E}$ qui est séparé ; on applique III.2.5.*1*, 6°. □

REMARQUE. — Si (I, f) n'est qu'un arc simple, I et $\mathscr{S} = \operatorname{supp}(I, f)$ ne sont pas nécessairement homéomorphes. Considérons par exemple l'arc paramétré $(\mathbb{R}, f)$ de $\mathbb{R}^2$, avec $f : t \longmapsto (t/(1 + t^4), t^3/(1 + t^4))$, dont le support $\mathscr{S}$ (lemniscate de Bernoulli) est représenté par la figure 3 ; s'il existait un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathscr{S}$, il induirait un homéomorphisme de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ *sur* $\mathscr{S}\backslash\{f(1)\}$, ce qui est impossible car ces deux espaces topologiques n'ont pas le même nombre de composantes connexes.

Notons que $O = (0, 0)$ est de multiplicité 1, et non 2 comme le laisserait supposer l'examen du seul support.

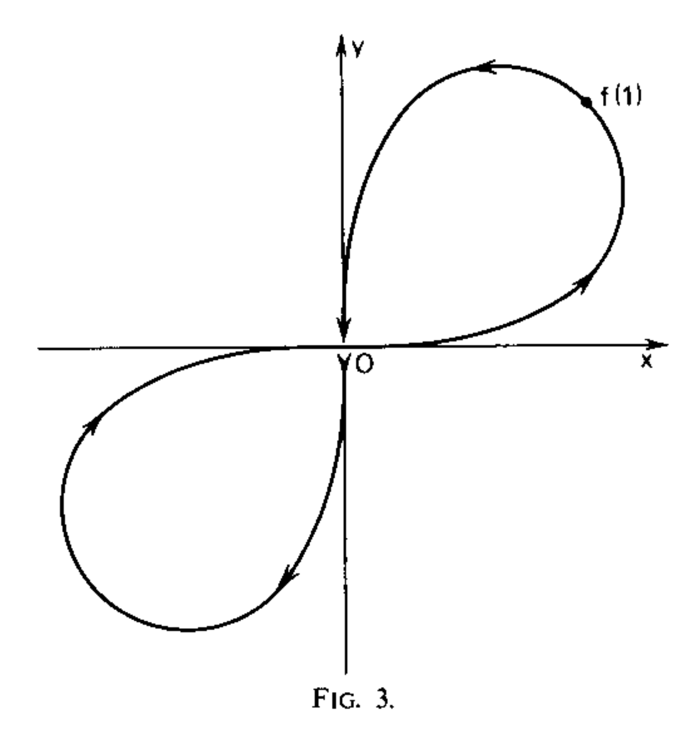


FIG. 3.

• ***Arcs fermés simples.*** — DÉFINITION IV. — **On dit qu'un arc paramétré compact** $([a, b], f)$ **est** *fermé* **si, et seulement si,** $f(a) = f(b)$. **Si, en outre** $f|[a, b[$ **est injective, on parle d'***arc fermé simple.*

PROPOSITION II. — **Le support d'un arc fermé simple** $([a, b], f)$ **est homéomorphe à** $U = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$, **et donc à tout cercle de rayon non nul d'un plan affine euclidien.**

Il existe en effet une unique application $F : \mathbb{R} \to \mathscr{E}$ telle que $F(t) = F(t')$ si, et seulement si, $t - t' \in (b - a)\mathbb{Z}$. On l'appelle *prolongement de f à* $\mathbb{R}$ *par périodicité ;* elle est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad F(t) = f\left(t - E\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\cdot(b - a)\right).$$

Elle est continue. En raisonnant comme au **1.1.***1*, 3°, *in fine*, on constate que $F(\mathbb{R})$, qui est aussi $f([a, b])$, est homéomorphe à $\mathbb{R}/(b - a)\mathbb{Z}$, et donc à U.

□

• ***Arcs paramétrés de classe*** C^k. — DÉFINITION V. — **Pour** $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, **on appelle** *arc paramétré de classe* C^k, **ou abréviativement,** C^k*-arc paramétré*, **tout arc paramétré** (I, f) **tel que l'application** f **soit de classe** C^k.

L'étude des arcs paramétrés qui ne sont que continus conduit à des êtres mathématiques compliqués [1]. C'est pourquoi nous nous limiterons le plus souvent à $k \geqslant 1$.

---

[1] Peano a montré en 1890 qu'il existe un C^0-arc paramétré de $\mathbb{R}^2$ dont le support est le carré $[0,1] \times [0,1]$, (cf. exercice **1.01**).

• ***Point régulier, point stationnaire.*** — DÉFINITION VI. — **On dit que le point $M_0 = M(t_0)$ du C^k — arc paramétré (I, f), $k \geqslant 1$, est** *régulier* **ou** *stationnaire* **selon que $f'(t_0) \neq 0$ ou $f'(t_0) = 0$. Un arc dont tous les points sont réguliers est dit** *régulier*.

La continuité de f' fait que si M_0 est un point régulier de (I, f), alors il existe un sous arc régulier de (I, f) dont un point est M_0.

• ***Plongements.*** — DÉFINITION VII. — **On dit qu'un C^k-arc paramétré (I, f), $k \geqslant 1$, est** *immergé* **(resp.** *plongé*) **si, et seulement si, f est une immersion** (resp. **un plongement)** de I **dans $\mathscr{E}$; un arc plongé est ainsi un arc simple.**

Un C^k-arc paramétré est donc régulier si et seulement s'il est immergé.

• ***Arcs cartésiens.*** — DÉFINITION VIII ET PROPOSITION. — **On dit qu'un C^k-arc paramétré (I, f) est cartésien si, et seulement s'il existe un repère $(O; \mathbf{e})$ de $\mathscr{E}$ tel que l'on ait :**

$$\forall t \in I \quad f(t) = O + te_1 + \sum_{j=2}^{n} f_j(t)e_j.$$

Un tel arc est simple. S'il est de classe C^k, $(k \geqslant 1)$, alors il est plongé.

Pour un tel arc, $f(t') = f(t)$ exige $t' = t$; d'où l'injectivité de f, qui induit ainsi une bijection, évidemment continue, $\bar{f}$ de I sur le support $\mathscr{S}$; $\bar{f}^{-1}$ est continue car elle coïncide sur $\mathscr{S}$ avec l'application continue de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout point associe sa première coordonnée dans $(O, \mathbf{e})$; $\bar{f}$ est donc un homéomorphisme. Enfin, si f est dérivable en $t_0 \in I$, alors $f'(t_0)$ dont la première composante dans la base $\mathbf{e}$ de E est 1, est non nul. □

3° *Arcs géométriques*

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **On obtient une relation d'équivalence sur l'ensemble des C^k-arcs paramétrés de $\mathscr{E}$ en convenant que : « (I, f) est C^k-équivalent à (J, g) signifie qu'il existe une bijection $\theta : J \to I$ de classe C^k ainsi que sa réciproque, telle que $g = f \circ \theta$ ».**

Les classes de C^k-équivalence sont appelés arcs géométriques de classe C^k ou, abréviativement, C^k-arcs géométriques.

Voici la démonstration pour $k \geqslant 1$ (à la notation près, elle vaut pour $k = 0$). $\mathrm{Diff}^k(J, I)$ désigne l'ensemble des difféomorphismes [1] de classe C^k de J sur I. Soient (I, f), (J, g), (K, h) des C^k-arcs paramétrés de $\mathscr{E}$.

---

[1] Rappelons (III.4.3.3, 3°) que, pour $k \geqslant 1$, $\theta \in \mathrm{Diff}^k(J, I)$ signifie que $\theta : J \to I$ est une bijection de classe C^k telle que θ' ne prenne pas la valeur 0 ; image du connexe J de $\mathbb{R}$ par θ', qui est de classe C^{k-1} et donc continue, $\theta'(J)$ est un connexe de $\mathbb{R}$; il en résulte que l'application $\mathrm{sgn} \circ \theta'$ est constante. Selon que θ est strictement croissante ou strictement décroissante, on écrit $\theta \in \mathrm{Diff}^k_+(J, I)$ ou $\theta \in \mathrm{Diff}^k_-(J, I)$.

Réflexivité : on a $f = f \circ \mathrm{Id}_I$, avec $\mathrm{Id}_I \in \mathrm{Diff}^\infty(I, I)$;

Symétrie : si $g = f \circ \theta$ avec $\theta \in \mathrm{Diff}^k(J, I)$, alors $f = g \circ \theta^{-1}$, avec $\theta^{-1} \in \mathrm{Diff}^k(I, J)$;

Transitivité : si $g = f \circ \theta$ et $h = g \circ \varpi$, avec $\theta \in \mathrm{Diff}^k(J, I)$ et $\varpi \in \mathrm{Diff}^k(K, J)$, alors $h = f \circ (\theta \circ \varpi)$, avec $\theta \circ \varpi \in \mathrm{Diff}^k(K, I)$. □

REMARQUE. — Si les arcs paramétrés (I, f) et (J, g) sont C^k-équivalents, alors les intervalles I et J sont de même nature topologique (ouverts, fermés, ou semi-ouverts). C'est ainsi que parmi les trois arcs paramétrés introduits dans la première remarque du **2°** ne figurent pas deux arcs C^∞-équivalents.

NOTATION. — **Les représentants d'un C^k-arc géométrique Γ sont appelés** *paramétrages admissibles,* **ou, abréviativement,** *paramétrisations* **de Γ. Avec la notation du théorème précédent, on dit que θ est un** *changement de paramétrisation.*

REMARQUE. — Deux arcs paramétrés C^k-équivalents sont $C^{k'}$-équivalents pour tout k' tel que $0 \leqslant k' \leqslant k$, mais deux C^{k+1}-arcs paramétrés peuvent être C^k-équivalents sans être C^{k+1}-équivalents, ainsi que le montre l'exemple suivant, dans lequel $\mathscr{E} = \mathbb{R}^2$:

$I = [0, 2]$; f est $t \longmapsto (t^2, 0)$; (I, f) est de classe C^∞;
$J = [0, 1]$; g est $u \longmapsto ((u + u^{3/2})^2, 0)$; (J, g) est de classe C^2.

Tout $\theta \in \mathrm{Diff}\,(J, I)$ tel que $g = f \circ \theta$ doit vérifier :

$$\forall u \in [0, 1] \qquad \theta(u) \in \{u + u^{3/2},\ -(u + u^{3/2})\} \cap [0, 2].$$

La seule solution possible est donc $u \longmapsto u + u^{3/2}$ qui appartient à $\mathrm{Diff}^1(J, I)$, mais non à $\mathrm{Diff}^2(J, I)$.

• ***Points d'un arc géométrique.*** — DÉFINITION II. — **On appelle** *point d'un arc géométrique* Γ **toute classe d'équivalence de triplets (I, f, t), où (I, f) est une paramétrisation de Γ et t un point de I, pour la relation $\sim$ définie par « $(I, f, t) \sim (J, g, u)$ signifie qu'il existe $\theta \in \mathrm{Diff}^k(J, I)$ tel que $g = f \circ \theta$ et $t = \theta(u)$ ». Le point $f(t)$ du support de Γ est appelé** *image* **du point de Γ représenté par (I, f, t).**

Le lecteur justifiera cette définition en vérifiant que $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des triplets (I, f, t) et que, si $(I, f, t) \sim (J, g, u)$, alors $f(t) = g(u)$. □

• ***Sous-arcs d'un arc géométrique.*** — DÉFINITION III. — **Soient Γ un C^k-arc géométrique et (I, f) l'une de ses paramétrisations. Pour tout sous-intervalle I' de I, le C^k-arc géométrique Γ' dont une paramétrisation est le sous-arc $(I', f|I')$ de (I, f), est dit** *sous-arc* **de Γ.**

Cette définition est justifiée par le fait que si (J, g) est une autre paramétrisation de Γ et si $\theta \in \mathrm{Diff}^k(J, I)$ vérifie $g = f \circ \theta$, on constate, en posant $J' = \theta^{-1}(I')$, que Γ' admet $(J', g|J')$ pour paramétrisation. □

Avec les notations de la définition III, *pour tout* $t_0 \in I'$ *nous identifierons le point de* Γ' *représenté par* $(I', f|I', t_0)$ *et le point de* Γ *représenté par* (I, f, t_0).

4° *Propriétés C^k-invariantes d'un C^k-arc paramétré; propriétés d'un arc géométrique.* — DÉFINITION. — **Soit γ un C^k-arc paramétré. On dit qu'une propriété de γ est *C^k-invariante* si et seulement si tout arc paramétré C^k-équivalent à γ la possède.**

On définit de même une propriété C^k-invariante du couple constitué par γ et l'un de ses points.

CONVENTION. — **On attribue à un C^k-arc géométrique toute propriété C^k-invariante de l'un de ses représentants.**

Voici des exemples :

PROPOSITION I. — **Toutes les paramétrisations d'un arc géométrique Γ ont un support commun, qui est dit** *support de* Γ, **et noté** supp Γ.

Avec les notations habituelles, $g = f \circ \theta$ entraîne $g(J) = f[\theta(J)] = f(I)$. □

Notons que, d'après la première remarque du **3°, deux arcs géométriques distincts peuvent avoir le même support.**

COROLLAIRE. — **La multiplicité d'un point** m **du support d'un arc géométrique Γ relativement à une paramétrisation de Γ est indépendante du choix de celle-ci. On l'appelle** *multiplicité de m relativement à* Γ.

Avec les notations habituelles :

$$f^{-1}(\{m\}) = \theta[g^{-1}(\{m\})] \text{ où } \theta \text{ est une bijection.}$$ □

PROPOSITION II. — **Soit M_0 un point d'un C^k-arc géométrique Γ, $k \geqslant 1$. Si pour un représentant (I, f, t_0) de M_0 on a $f'(t_0) \neq 0$, alors il en est de même pour tout représentant de M_0, et on dit que M_0 est un** *point régulier* **de Γ; dans le cas contraire, on dit que M_0 est un** *point stationnaire* **de Γ.**

Pour tout $u \in J$: $g'(u) = \theta'(u).f'(\theta(u))$ et $\theta'(u) \neq 0$. □

PROPOSITION III. — **Si une paramétrisation d'un arc géométrique Γ est un arc paramétré simple (resp. de Jordan ; resp. fermé simple ; resp. immergé ; resp. plongé), il en est de même pour toute paramétrisation de Γ, qui est dit** *arc géométrique simple* (**resp.** *de Jordan;* **resp.** *fermé simple;* **resp.** *immergé;* **resp.** *plongé*).

Le début est trivial. La fin résulte de ce que, si f induit un homéomorphisme $\bar{f}$ de I sur $\mathcal{S} = \operatorname{supp}\Gamma$, alors $\bar{f} \circ \theta$ est un homéomorphisme de J sur $\mathcal{S}$, et il est induit par g. □

REMARQUES. — *a*) Un C^1-arc géométrique sans point stationnaire est un arc immergé.

b) Le support d'un C^1-arc géométrique est réduit à un point si, et seulement si, tous les points de l'arc sont stationnaires.

• Le théorème qui suit va nous permettre de constater que le *support d'un arc géométrique immergé peut être considéré comme une réunion de supports d'arcs plongés.*

THÉORÈME I. — **Soit M_0 un point régulier d'un C^k-arc-géométrique Γ, $k \geqslant 1$. Alors, parmi les sous-arcs de Γ dont un point est M_0, il en existe un qui admet une paramétrisation cartésienne, et donc est plongé.**

Soit (I, f, t_0), avec $f'(t_0) \neq 0$, un représentant de M_0. Il existe [1] un repère affine $(O, \mathbf{e})$ de $\mathscr{E}$ vérifiant la condition : $f'(t_0) \notin \mathrm{Vect}\,(e_2, \ldots, e_n)$. En notant $f(t) = O + \sum_{i=1}^{n} f_i(t)e_i$, on a donc $f_1'(t_0) \neq 0$, ce qui permet d'appliquer le théorème d'inversion locale à f_1, au voisinage de t_0 : il existe un intervalle ouvert $I' \in \mathscr{V}_I(t_0)$, tel que f_1 induise $\varpi \in \mathrm{Diff}^k(I', \Omega)$ où $\Omega = f_1(I')$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Le sous-arc Γ' de Γ représenté par $(I', f|I')$ l'est aussi par (Ω, φ) avec :

$$\varphi = (f|I') \circ \varpi^{-1} \qquad x \longmapsto O + xe_1 + \sum_{j=2}^{n} f_j(\varpi^{-1}(x))e_j$$

ce qui montre que (Ω, φ) est un arc paramétré cartésien, et donc (proposition du 2°) un arc paramétré plongé ; on en déduit que Γ' est un arc géométrique plongé. □

• Une variante de la démonstration précédente va maintenant nous permettre de constater qu'*un arc géométrique plongé est entièrement déterminé par son support* [2].

THÉORÈME II. — **Deux C^k-arcs paramétrés plongés, $k \geqslant 1$, de $\mathscr{E}$, (I, f) et (J, g), qui ont un support commun $\mathscr{S}$ sont C^k-équivalents.**

$\bar{f}$ et $\bar{g}$ désignant les homéomorphismes de I et J sur $\mathscr{S}$ respectivement induits par f et g, $\bar{f}^{-1} \circ \bar{g}$ est un homéomorphisme de J sur I que nous notons θ. On a $g = f \circ \theta$. Il suffit de montrer que θ est de classe C^k ; la même propriété vaudra en effet pour $\theta^{-1} = \bar{g}^{-1} \circ \bar{f}$.

— Soient $u_0 \in J$ et $t_0 = \theta(u_0)$. L'arc (I, f) étant plongé, on a $f'(t_0) \neq 0$. $(O, \mathbf{e})$ étant un repère de $\mathscr{E}$ qui vérifie $f'(t_0) \notin \mathrm{Vect}\,(e_2, \ldots, e_n)$, en notant :

$$f(t) = O + \sum_{i=1}^{n} f_i(t)e_i, \qquad \text{on a} \qquad f_1'(t_0) \neq 0.$$

---

[1] Un tel repère peut se déduire d'un repère arbitrairement choisi de $\mathscr{E}$ par une permutation convenable des vecteurs de la base.

[2] Nous retrouverons ce résultats au 3.3.*1*, 1° sous la forme : *le support d'un arc paramétrique plongé est une courbe (au sens des sous-variétés).*

Comme ci-dessus, il existe un intervalle ouvert $I' \in \mathscr{V}_I(t_0)$ tel que f_1 induise $\varpi \in \mathrm{Diff}(I', \Omega)$, où $\Omega = f_1(I')$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. On désigne par J' l'intervalle $\theta^{-1}(I') \in \mathscr{V}_J(u_0)$.

En notant $g(u) = O + \sum_{i=1}^{n} g_i(u)e_i$, on a $g_1 = f_1 \circ \theta$, et il vient :

$$\forall u \in J' \qquad g_1(u) = \varpi(\theta(u)).$$

La restriction de θ à J' est donc définie par $u \longmapsto \varpi^{-1}(g_1(u))$, ce qui montre qu'il s'agit d'une application de classe C^k.

– Ceci s'appliquant à tout $u_0 \in J$, θ est de classe C^k. □

5° ***Ordre d'un point du support d'un arc géométrique.*** — DÉFINITION. — **Soient Γ un arc géométrique et m un point de son support $\mathscr{S}$. On appelle** *ordre géométrique* **de m le cardinal, fini ou infini, de l'ensemble des points de Γ qui ont m pour image. Par** *point simple* **(resp.** *double, triple,...*) **on entend un point d'ordre géométrique 1 (resp. 2, 3,...).**

(I, f) étant une paramétrisation de Γ, l'ordre géométrique de m est le nombre des points de Γ représentés par des triplets de la forme (I, f, t) avec $t \in f^{-1}(\{m\})$; il est donc au plus égal à la multiplicité de m qui est le nombre de ces triplets, et il lui est égal lorsque cette multiplicité est 1 : *tout point du support d'un arc simple est d'ordre géométrique* 1 (i.e. point simple). Mais le lecteur trouvera un contre-exemple au **1**.3.*1* 5°.

Cependant le lecteur établira le résultat suivant :

PROPOSITION. — **Si, pour une paramétrisation (I, f) d'un C^k-arc géométrique Γ, la seule bijection $\theta : I \to I$, de classe C^k ainsi que sa réciproque, vérifiant $f \circ \theta = f$ est Id_I, alors, pour tout point m du support $\mathscr{S}$ de I, l'ordre géométrique de m est égal à sa multiplicité.**

Cette condition est évidemment remplie dans le cas d'un arc simple.

6° ***Arcs géométriques orientés.*** — $\mathscr{E}$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ sont donnés.

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **On obtient une relation d'équivalence sur l'ensemble des C^k-arcs paramétrés de $\mathscr{E}$ en convenant que : « (I, f) est C^k-positivement équivalent à (J, g) signifie qu'il existe une bijection croissante θ : $J \to I$ de classe C^k ainsi que sa réciproque, telle que $g = f \circ \theta$ ». Les classes de** *C^k-équivalence positive* **sont appelées arcs géométriques orientés de $\mathscr{E}$.**

Démonstration calquée sur celle du théorème et définition du 3°. □

On étend à un arc géométrique orienté les notions de paramétrisations, de points de l'arc (éventuellement réguliers ou non), de sous-arcs, de propriétés de l'arc et, en particulier, de support, d'arc simple (resp. immergé, resp. plongé).

On remarque qu'un arc paramétré (I, f) représente à la fois un arc géométrique Γ, et un arc géométrique orienté Γ' dont toutes les paramétrisations sont des paramétrisations de Γ; on dit que Γ' (dont le support est celui de Γ) est une *orientation* de Γ et que *le représentant* $(I, t \mapsto f(t))$ *de* Γ' *est orienté « dans le sens des* t *croissants »*.

Proposition I. — **Un arc géométrique Γ admet soit une, soit deux orientations. Dans le second cas, on dit que Γ est** *orientable; orienter* Γ, **c'est alors distinguer l'une des deux orientations, notée Γ_+, dont les paramétrisations sont dites** *paramétrisations directes* **de Γ.**

La démonstration, faite pour $k \geqslant 1$, vaut pour $k = 0$.

Supposons que (I, f) et (J, g) représentent deux orientations distinctes de Γ, et considérons une paramétrisation quelconque (K, h). Avec les notations habituelles :

$$g = f \circ \theta, \qquad h = f \circ \varphi, \qquad h = g \circ \psi, \qquad \text{avec} \qquad \theta \in \mathrm{Diff}^k_-(J, I).$$

Si ψ appartient à $\mathrm{Diff}^k_+(K, J)$, alors (K, h) représente la même orientation que (J, g). Sinon on écrit $h = f \circ (\theta \circ \psi)$ et on constate, en utilisant $\theta \circ \psi \in \mathrm{Diff}^k_+(K, I)$, que (K, h) représente la même orientation que (I, f). □

Proposition II. — **Un C^k-arc géométrique Γ dont une paramétrisation est (I, f) est non orientable si, et seulement s'il existe une bijection décroissante $\theta : I \to I$, de classe C^k ainsi que sa réciproque, telle que $f = f \circ \theta$.**

— Si la condition est remplie, on constate, en posant $J = I$ et $g = f \circ \theta$ et en reprenant le raisonnement précédent, que toute paramétrisation de Γ appartient à la même orientation que (I, f) ou que (J, g), qui n'est autre que (I, f). □

— Inversement supposons que Γ est non orientable; $u \longmapsto -u$ définit une bijection φ de I sur un intervalle I' de $\mathbb{R}$ et on a $\varphi^{-1} \in \mathrm{Diff}^{\infty}_-(I', I)$; $(I', f \circ \varphi^{-1})$ est donc une seconde paramétrisation de Γ qui, par hypothèse appartient à la même orientation que (I, f); il existe donc une bijection croissante $\psi : I' \to I$, de classe C^k ainsi que sa réciproque, telle que $f \circ \varphi^{-1} = f \circ \psi$. D'où : $f = f \circ (\psi \circ \varphi)$. On pose $\psi \circ \varphi = \theta$. □

Cette proposition montre que les arcs non orientables ne sont pas courants. Il en existe cependant, par exemple l'arc de $\mathbb{R}^2$ représenté par $([-\pi, \pi], t \longmapsto (\cos t, 0))$.

Corollaire I. — **Tout C^k-arc géométrique Γ dont une paramétrisation (I, f) vérifie : « la seule bijection $\theta : I \to I$, de classe C^k ainsi que sa réciproque, telle que $f \circ \theta = f$ est Id_I », est orientable.**

En particulier tout arc simple (resp. fermé simple) est orientable.

Remarque. — Dans le cas d'un arc simple, l'ordre induit sur le support $\mathscr{S}$ par la bijection $t \longmapsto f(t)$ ne dépend pas du choix de la paramétrisation directe (I, f); on peut donc orienter $\mathscr{S}$. Ce résultat s'étend à un arc fermé simple.

COROLLAIRE II. — **Tout arc géométrique immergé est orientable.**

Ici $k \geqslant 1$. Pour tout $\theta \in \mathrm{Diff}^k_-(I, I)$ on constate (en utilisant le fait que $\theta - \mathrm{Id}_I$ est une application continue prenant des valeurs positives et des valeurs négatives) qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $\theta(t_0) = t_0$. Si, en outre, on a $f \circ \theta = f$, on constate $(\theta'(t_0) - 1)f'(t_0) = 0$, ce qui exige $f'(t_0) = 0$; d'où une contradiction. □

7° Conclusion

a) *En cinématique un arc paramétré (I, f) est un mouvement ponctuel de trajectoire $f(I)$, de loi f. En revanche la notion d'arc géométrique n'a physiquement aucun intérêt : ce n'est pour nous qu'un simple procédé d'exposition.*

On pourrait s'en passer en ne considérant que des C^k-arcs paramétrés mais, s'agissant des propriétés affines et métriques qui nous intéressent, il faudrait vérifier dans chaque cas la C^k-invariance.

b) *On passe souvent du point de vue global, envisagé jusqu'ici, à un point de vue local (au sens de la topologie des intervalles de définition), ce qui permet de travailler le plus souvent sur des arcs plongés* (cf. *théorème I* du 4°).

1.2.2. Étude locale des arcs

Dans toute la suite, on suppose $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{+\infty\}$.
On commence par le cas des arcs géométriques.

Données. — Dans ce paragraphe, Γ désigne soit un C^k-arc géométrique de $\mathscr{E}$, soit un C^k-arc géométrique orienté de $\mathscr{E}$; on note $\mathscr{S} = \operatorname{supp} \Gamma$; M_0 désigne un point de Γ ; m_0 est l'image de M_0.

1° ***Variétés affines fondamentales de Γ en M_0.*** — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soient (I, f, t_0) et (J, g, u_0) deux représentants de M_0. On pose : $V_0 = W_0 = \{0\}$, et, pour tout $i \in \mathbb{N}_k$**(1) :

$$V_i = \mathbf{Vect}\,(f'(t_0), \ldots, f^{(i)}(t_0)); \qquad W_i = \mathbf{Vect}\,(g'(u_0), \ldots, g^{(i)}(u_0)).$$

Alors, pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ on a $V_i = W_i$, ce qui justifie la notation $V_i = T_i(\Gamma ; M_0)$; on dit que $T_i(\Gamma ; M_0)$ est le i-ième *sous-espace fondamental* **de Γ en M_0, et que $\mathscr{T}_i(\Gamma, M_0) = m_0 + T_i(\Gamma, M_0)$ est la i-ième** *variété affine fondamentale* **de Γ en M_0.**

$V_0 = W_0$ résultant de la définition, il suffit de prouver $V_i = W_i$ pour $i \in \mathbb{N}_k$.

Nous utiliserons $\theta \in \mathrm{Diff}^k(J, I)$ tel que $g = f \circ \theta$ et $t_0 = \theta(u_0)$.

---

(1) Si k est $+\infty$, alors pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_{k-j}$ désigne $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

— Vérifions d'abord qu'est vraie pour tout $i \in \mathbb{N}_k$ l'assertion :

$(\mathscr{A}_i)$ Il existe des applications $\alpha_{i,j} : J \to I$ ($j \in \mathbb{N}_i$) de classe C^{k-i} telles que :

$$g^{(i)} = \sum_{j=1}^{i} \alpha_{i,j} \cdot f^{(j)} \circ \theta, \quad \text{et} \quad \alpha_{i,i} = (\theta')^i.$$

$(\mathscr{A}_1)$ résultant de $g' = \theta' . f' \circ \theta$, où θ' est de classe C^{k-1}, nous pouvons considérer $i \in \mathbb{N}_{k-1}$ pour lequel $(\mathscr{A}_i)$ est vraie. Pour tout $j \in \mathbb{N}_i$, les $f^{(j)} \circ \theta$ et les $\alpha_{i,j}$ sont de classe C^1, ce qui permet d'écrire, par dérivation de $g^{(i)}$:

$$g^{(i+1)} = \sum_{j=1}^{i} \alpha'_{i,j} \cdot f^{(j)} \circ \theta + \sum_{j=1}^{i} \theta' \alpha_{i,j} \cdot f^{(j+1)} \circ \theta$$

de la forme :

$$g^{(i+1)} = \sum_{j=1}^{i+1} \alpha_{i+1,j} \cdot f^{(j)} \circ \theta$$

avec :

$$\alpha_{i+1,1} = \alpha'_{i,1}, \qquad \alpha_{i+1,\, i+1} = \theta' \alpha_{i,i},$$

et :

$$\alpha_{i+1,j} = \alpha'_{i,j} + \theta' \alpha_{i,j-1} \qquad \text{pour} \qquad 2 \leqslant j \leqslant i.$$

Pour $j \in \mathbb{N}_{i+1}$, les $\alpha_{i+1,j}$ sont de classe C^{k-i-1} ; $(\mathscr{A}_{i+1})$ est donc vraie.

— Pour tout $i \in \mathbb{N}_k$, $(\mathscr{A}_i)$ fournit $\alpha_{i,i}(u_0) = (\theta'(u_0))^i$ qui servira au 3°, et

$$g^{(i)}(u_0) = \sum_{j=1}^{i} \alpha_{i,j}(u_0) f^{(j)}(t_0), \qquad \text{et donc} \qquad g^{(i)}(u_0) \in V_i .$$

— On en déduit $W_i \subset V_i$; symétriquement $V_i \subset W_i$. □

REMARQUES. — *a*) Comme la notion de dérivée, celle de variété affine fondamentale ne dépend pas du choix de la norme de E.

b) Soit $(\mathscr{W}, W)$ une variété affine de $(\mathscr{E}, E)$ qui contient le support $\mathscr{S}$ de Γ. Tous les vecteurs dérivés envisagés ci-dessus appartiennent à W et les $\mathscr{E}_i(\Gamma\,; M_0)$ sont des sous-variétés de $\mathscr{W}$. Les variétés affines fondamentales ne changeraient d'ailleurs pas si l'on considérait Γ comme un arc de $\mathscr{W}$ (i.e. si l'on considérait f comme une application de I dans $\mathscr{W}$). Cette remarque est particulièrement utile dans le cas où $\mathscr{W}$ est une droite et, surtout, dans le cas où $\mathscr{W}$ est un plan.

c) Soient $I' \in \mathscr{V}_I(t_0)$, et Γ' le sous-arc de Γ dont une paramétrisation est $(I', f \,|\, I')$. M_0 désignant aussi bien (d'après une convention déjà faite) le point de Γ représenté par (I, f, t_0) que le point de Γ' représenté par $(I', f\,|I', t_0)$ nous avons $\mathscr{E}_i(\Gamma\,; M_0) = \mathscr{E}_i(\Gamma'\,; M_0)$ pour tout $i \in \mathbb{N}_k$, ce que nous traduisons en disant que *la notion de variétés affines fondamentales est locale* (au sens de la topologie des intervalles I est non de celle de $\mathscr{S}$). Cette remarque est utilisée pour déterminer les $\mathscr{E}_i(\Gamma\,; M_0)$; grâce au théorème I du **1.2.***1*, 4°, on peut (si $f'(t_0) \neq 0$) faire en sorte que $(I', f\,|\, I')$ soit un arc paramétré cartésien. Elle permet aussi — ce qui est commode dans la pratique — de parler des *variétés affines fondamentales de* Γ *au point* m_0 *du support* (avec quelque précaution si m_0 est un point multiple).

A partir d'un C^k-arc paramétré (I, f) et de l'un des points $M_0(t_0)$, le théorème précédent permet d'introduire directement les notions de *variétés affines fondamentales* (*et donc celles de tangente et de variétés osculatrices* qui vont suivre) *de* (I, f) *en* M_0, et d'affirmer qu'*il s'agit de notions* C^k-*invariantes.*

THÉORÈME II. — **Soit $(\mathscr{V}, V)$ une variété affine de $(\mathscr{E}, E)$. Pour tout représentant (I, f, t_0) de M_0, pour toute distance d de la norme, et pour tout $i \in \{0, \ldots, k\}$ les assertions suivantes sont équivalentes :**

i) $\mathscr{V}$ contient la variété affine fondamentale $\mathscr{T}_i(\Gamma ; M_0)$;

ii) $\delta : t \longmapsto d(f(t), \mathscr{V})$ est négligeable devant $t \longmapsto (t - t_0)^i$ au voisinage de t_0.

L'indifférence du choix de d résulte du théorème du **1**.1.*4*, 1° ; nous pouvons donc nous limiter au cas où d est une distance euclidienne.

Preuve de i) $\Rightarrow$ ii). Nous supposons ici : $\mathscr{T}_i \subset \mathscr{V}$. Soit $(e_1, \ldots, e_q)$ une base de V. D'après II.**6**.2.*1*, 1° :

$$\forall t \in I \qquad \delta(t) = \left[\frac{\text{Gram}\,(\overrightarrow{m_0 f(t)}, e_1, \ldots, e_q)}{\text{Gram}\,(e_1, \ldots, e_q)}\right]^{1/2}$$

Par la formule de Taylor-Young à l'ordre i, nous avons :

$$\overrightarrow{m_0 f(t)} = v(t) + (t - t_0)^i \varepsilon(t), \qquad \text{où} \qquad \lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0,$$

et où $v(t) = \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j\,!} f^{(j)}(t_0)$ appartient à T_i et donc à V.

Un déterminant de Gram ne changeant pas quand on ajoute à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres, il vient :

$$\text{Gram}\,(\overrightarrow{m_0 f(t)}, e_1, \ldots, e_q) = \text{Gram}\,((t - t_0)^i \varepsilon(t), e_1, \ldots, e_q)$$

et donc :

$$\delta(t) = |t - t_0|^i \left[\frac{\text{Gram}\,(\varepsilon(t), e_1, \ldots, e_q)}{\text{Gram}\,(e_1, \ldots e_q)}\right]^{1/2}$$

La proposition résulte de la continuité du déterminant de Gram. □

REMARQUE. — *Si pour $i \in \{0, \ldots, k - 1\}$, $\mathscr{V}$ contient $\mathscr{T}_i$ sans contenir $\mathscr{T}_{i+1}$, alors δ est semblable à $t \longmapsto (t - t_0)^{i+1}$ au voisinage de t_0.*

On le vérifie en écrivant, par Taylor-Young à l'ordre $i + 1$:

$$\overrightarrow{m_0 f(t)} = v(t) + \frac{(t - t_0)^{i+1}}{(i + 1)\,!}(f^{(i+1)}(t_0) + \varepsilon(t)), \qquad \text{avec} \qquad f^{(i+1)}(t_0) \notin V. \qquad \square$$

Preuve de ii) $\Rightarrow$ i). — Il suffit de montrer qu'il n'existe pas $i \in \{0, \ldots, k\}$ tel que l'on ait simultanément $\mathscr{T}_i \not\subset \mathscr{V}$ et $\delta(t) = o((t - t_0)^i)$.

— Si $m_0 \notin \mathscr{V}$, on a $\delta(t_0) \neq 0$, et donc on n'a $\delta(t) = o((t - t_0)^i)$ pour aucun $i \in \{0, \ldots, k\}$;

— Si $m_0 \in \mathscr{V}$ et $\mathscr{T}_i \not\subset \mathscr{V}$, avec $i \in \{1, \ldots, k\}$, il existe $j \in \{0, \ldots, i - 1\}$ tel que $\mathscr{T}_j \subset \mathscr{V}$ et $\mathscr{T}_{j+1} \not\subset \mathscr{V}$, ce qui implique (cf. remarque précédente) que δ est semblable à $t \longmapsto (t - t_0)^{j+1}$, et donc non négligeable devant $t \longmapsto (t - t_0)^i$.

□

Notons que *le théorème et éventuellement la remarque s'appliquent lorsque* $\mathscr{V}$ *est* $\mathscr{T}_i$.

CAS PARTICULIER. — **Si $\mathscr{V}$ est un hyperplan** (1) **affine $h^{-1}(0)$, on peut dans les énoncés du théorème II et de la remarque, remplacer δ par $\varphi = h \circ f$.**

Si la distance d est euclidienne, il existe en effet (II.**6**,2,*2*, 2°) une constante strictement positive C telle que $\delta = C|\varphi|$. □

REMARQUE. — **Dans ce cas particulier, le théorème II se démontre directement en remarquant que, γ désignant la partie linéaire de h, pour $j \in \mathbb{N}_i$ la condition $f^{(j)}(t_0) \in V$ s'écrit $\gamma(f^{(j)}(t_0)) = 0$, et aussi $\varphi^{(j)}(t_0) = 0$.**

On retiendra que, *pour $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, $\mathscr{V}$ contient $\mathscr{T}_i$ sans contenir $\mathscr{T}_{i+1}$ si, et seulement si t_0 est zéro d'ordre $i+1$ de φ.*

Enfin on notera que sgn $\varphi : t \mapsto$ sgn $(h(f(t))$ permet de discuter la position du point $f(t)$ par rapport aux deux demi-espaces déterminés par l'hyperplan $\mathscr{V}$ (II.**5**.3.*4*, 3°).

2° ***Tangente à Γ en M_0.*** — THÉORÈME ET DÉFINITION I. — **Si l'ensemble $\{i \in \mathbb{N}_k \,|\, T_i(\Gamma; M_0) \neq \{0\}\}$ n'est pas vide, il admet un plus petit élément p, et $\mathscr{T}_p(\Gamma; M_0) = m_0 + T_p(\Gamma; M_0)$ est une droite affine de $\mathscr{E}$ qui est dite la** *tangente à Γ en M_0*; **on la note tang $(\Gamma; M_0)$; toute variété affine de $\mathscr{E}$ qui contient tang $(\Gamma; M_0)$ est alors dite** *variété affine tangente à Γ en M_0*.

Conséquence immédiate de $T_0(\Gamma; M_0) = \{0\}$ et de :

$$\forall i \in \mathbb{N}_k \qquad n_{i-1} \leqslant n_i \leqslant 1 + n_{i-1}, \qquad \text{où} \qquad n_j = \dim T_j(\Gamma; M_0).$$

REMARQUES. — *a*) Il peut se faire qu'un point multiple $m_0 \in \mathscr{S}$ soit l'image de deux (resp. plusieurs) points de Γ en lesquels existent des *tangentes :*

— *distinctes :* reprenant l'exemple *a*) du **1.2.***1*, 5° (fig. 4), le lecteur vérifiera que les tangentes aux deux points d'image (0, 0) sont dirigées par les vecteurs :

$$(4t/(t^2+1)^2, \qquad 1 - 2(1-t^2)/(t^2+1)^2), \qquad \text{avec} \qquad t \in \{-1, 1\},$$

et qu'elles admettent donc les équations respectives $y = x$ et $y = -x$;

— *ou confondues* (nous constaterons par la suite qu'il existe des supports tels que celui de la figure 6.

b) Il peut naturellement se faire que $m_0 \in \mathscr{S}$ appartienne à la tangente à Γ en un point dont l'image n'est pas m_0 (fig.).

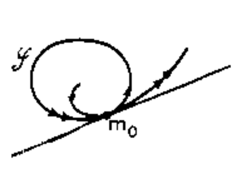


FIG. 4.

FIG. 5.

(1) En remplaçant h par une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}^q$, on constate que ce résultat s'étend à une variété affine quelconque.

PRATIQUE. – **M_0 étant représenté par (I, f, t_0), tang $(\Gamma\,; M_0)$ existe si, et seulement si f admet en t_0 un « premier vecteur dérivé non nul » $f^{(p)}(t_0)$; alors :**

$$\mathbf{tang}\,(\Gamma\,; M_0) = m_0 + \mathbb{R}f^{(p)}(t_0).$$

En particulier, si M_0 est régulier, il existe tang $(\Gamma; M_0) = m_0 + \mathbb{R}f'(t_0)$.

• THÉORÈME II. – **M_0 étant représenté par (I, f, t_0), on suppose que tang $(\Gamma; M_0)$ existe. Alors il existe $U \in \mathscr{V}_I(t_0)$ tel que : $\forall t \in U\backslash\{t_0\} \quad f(t) \neq f(t_0)$, et (l'ensemble $\mathscr{D}_{m_0}$ des droites affines contenant m_0 étant muni de sa topologie habituelle) :**

$$\operatorname{tang}(\Gamma\,; M_0) = \lim_{t \to t_0,\, t \in U\backslash\{t_0\}} \Delta(t), \qquad \textbf{avec} \qquad \Delta(t) = \operatorname{Aff}(f(t_0),\ f(t)) \quad (1)$$

On a $f^{(i)}(t_0) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}_{p-1}$; $f^{(p)}(t_0)$, non nul, dirige tang $(\Gamma; M_0)$. Par la formule de Taylor-Young (étendue à une fonction de $\mathbb{R}$ vers un e.a.n. par utilisation d'un vectorialisé), il vient

$$\lim_{t \to t_0,\, t \in I\backslash\{t_0\}} \mathbf{u}(t) = f^{(p)}(t_0) \qquad \text{où} \qquad \mathbf{u}(t) = p\,!\,\frac{f(t) - f(t_0)}{(t - t_0)^p} \qquad (2)$$

La non nullité de $f^{(p)}(t_0)$ entraîne l'existence de $U \in \mathscr{V}_I(t_0)$ tel que, pour tout $t \in U\backslash\{t_0\}$, on ait $\mathbf{u}(t) \neq 0$, ce qui permet de disposer de la droite $\Delta(t) = f(t_0) + \mathbb{R}\mathbf{u}(t)$. Compte tenu de (2), le théorème du **1.1.2**, 5° fournit :

$$\lim_{t \to t_0,\, t \in U\backslash\{t_0\}} (\mathbb{R}\mathbf{u}(t)) = \mathbb{R}f^{(p)}(t_0),$$

qui n'est autre que (1) quand on se place dans le vectorialisé $\mathscr{E}_{f(t_0)}$. □

• La notion de *tangente géométrique* [1], que nous allons introduire maintenant (intuitivement : celle de *tangente à une courbe*) est fondamentalement différente de celle qui a fait l'objet de la définition I, en ce sens que la topologie qui va intervenir est celle qui est induite par la topologie de $\mathscr{E}$ sur une partie de $\mathscr{E}$, et non plus la topologie d'un intervalle de $\mathbb{R}$ (au chapitre **3**, nous introduirons la notion de *tangente à une nappe*, avec une troisième signification). Posons :

DÉFINITION II. – **Soient $\mathscr{C}$ une partie de $\mathscr{E}$ et m_0 un point non isolé de $\mathscr{C}$. L'ensemble $\mathscr{D}_{m_0}$ étant encore muni de sa topologie habituelle, s'il existe :**

$$\lim_{m \to m_0,\, m \in \mathscr{C}\backslash\{m_0\}} \operatorname{Aff}(m_0, m)$$

alors cette droite est appelée la *tangente géométrique* à $\mathscr{C}$ en m_0.

---

[1] L'adjonction de l'adjectif *géométrique* est une précaution dont on peut se dispenser lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité.

EXEMPLE. — **Soit $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$ le graphe d'une application g d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable au point $t_0 \in I$. On note $m_0 = (t_0, g(t_0))$. Alors $\mathcal{S}$ admet la droite $\mathcal{T} = m_0 + \mathbb{R}(1, g'(t_0))$ pour tangente géométrique en m_0.**

L'injection $f : (t, g(t))$ induit une bijection $\bar{f}$ de I sur $\mathcal{S}$, continue en t_0, ce qui permet d'affirmer que m_0 est un point non isolé de $\mathcal{S}$; notons que $\bar{f}^{-1}$, restriction de la première projection, est continue sur $\mathcal{S}$.

Pour $t \neq t_0$, $\Delta(t) = \text{Aff}(m_0, (t, g(t))$ est une droite dont la direction ne contient pas $\mathbf{j}$ et dont le coefficient directeur est $\mu(t) = \dfrac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}$.

De $\lim\limits_{t \to t_0,\, t \neq t_0} \mu(t) = g'(t_0)$, on déduit (**1**.1.*4*, 3°) :

$$\lim_{t \to t_0,\, t \neq t_0} \Delta(t) = \mathcal{T} \tag{2}$$

On constate :

$$\forall m \in \mathcal{S} \backslash \{m_0\} \qquad \text{Aff}(m_0, m) = (\Delta \circ \bar{f}^{-1})(m) \tag{3}$$

Grâce au théorème de composition des limites (III, 2.2.2, 3°), la proposition se déduit de (2) et (3), compte tenu de la continuité de $\bar{f}^{-1}$ en m_0. □

• Reprenant le C^k-arc géométrique Γ et le point M_0 de Γ nous allons montrer que, sous certaines conditions, les tangentes introduites dans les définitions I et II coïncident.

THÉORÈME III. — **M_0 étant représenté par (I, f, t_0), on suppose qu'existe $\mathcal{T} = \text{tang}(\Gamma, M_0)$ et qu'en outre f induit un homéomorphisme $\bar{f}$ de I sur le support $\mathcal{S}$. Alors $\mathcal{S}$ admet $\mathcal{T}$ pour tangente géométrique au point m_0, image de M_0.**

La démonstration se calque sur celle de l'exemple précédent, en remplaçant (2) par la relation (1) du théorème II, visiblement applicable. □

REMARQUES. — *a*) Le théorème III s'applique en tout point d'un arc de Jordan admettant une tangente, et en tout point d'un arc plongé.

b) Il ne s'applique pas nécessairement en un point simple non stationnaire (cf. exemple de la figure 3, au **1**.2.*1*, 1°).

c) Si m_0 est l'image de plusieurs points de Γ à tangentes distinctes, $\mathcal{S}$ n'admet pas de tangente géométrique en m_0, mais on peut en général trouver des sous-arcs de Γ dont le support admet une tangente géométrique en m_0.

THÉORÈME IV. — **M_0 étant représenté par (I, f, t_0), on suppose qu'existe tang $(\Gamma ; M_0)$, et qu'en outre le support $\mathcal{S}$ admet une tangente géométrique $\mathcal{T}$ au point m_0 image de M_0. Alors $\mathcal{T} = \text{tang}(\Gamma ; M_0)$.**

Par hypothèse :

$$\mathcal{T} = \lim_{m \to m_0,\, m \in \mathcal{S}\backslash\{m_0\}} \Phi(m), \qquad \text{où} \qquad \Phi(m) = \text{Aff}(m_0, m). \tag{3}$$

Avec les notations du théorème II, qui s'applique :

$$\forall t \in U \backslash \{t_0\} \qquad \Delta(t) = (\Phi \circ f)(t)$$

Compte tenu de (3) et de la continuité de f en t_0, le théorème de composition des limites donne :

$$\mathscr{T} = \lim_{t \to t_0,\, t \in U \setminus \{t_0\}} \Delta(t).$$

Il suffit alors d'invoquer l'unicité de la limite. □

• L'exemple suivant va nous montrer que :

— *il n'existe pas toujours une tangente en tout point d'un C^∞-arc;*

— *il peut y avoir une tangente géométrique en un point m_0 du support, sans qu'il y ait une tangente en un point de l'arc dont l'image est m_0.*

EXEMPLE. — Soit Γ l'arc géométrique de $\mathbb{R}^2$ représenté par $(\mathbb{R}, f)$, avec :

$$f(0) = (0, 0); \qquad f(t) = (e^{-1/t^2}, e^{-1/t^2}) \quad \text{si} \quad t \neq 0.$$

D'après III.4.2.*1*, *in fine*, Γ est C^∞. Soit M_0 le point de Γ qui est représenté par $(\mathbb{R}, f, 0)$; en M_0, tous les sous-espaces fondamentaux sont nuls et il n'y a pas de tangente (au sens de la définition I). En revanche au point $m_0 = (0, 0)$, image de M_0, le support $\mathscr{S}$ de Γ, qui est un intervalle de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$, admet une tangente géométrique, la droite $\mathscr{D}$ elle-même.

3° ***Orientation*[1] *de la tangente à* Γ *en* M_0.** — Soient (I, f, t_0) et (J, g, u_0) deux représentants de M_0, liés par $g = f \circ \theta$, avec $\theta \in \mathrm{Diff}^k(J, I)$ et $t_0 = \theta(u_0)$. On suppose qu'existe tang $(\Gamma; M_0) = \mathscr{T}_p(\Gamma; M_0)$, de direction $T_p(\Gamma; M_0)$. Compte tenu de $f^{(j)}(t_0) = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}_{p-1}$, le calcul du 1° donne :

$$g^{(p)}(u_0) = (\theta'(u_0))^p f^{(p)}(t_0)$$

ce qui montre que les deux bases $(f^{(p)}(t_0))$ et $(g^{(p)}(u_0))$ de $T_p(\Gamma; M_0)$ appartiennent à la même orientation si, et seulement si $(\theta'(u_0))^p > 0$. Dans le cas où Γ est un arc orienté, cette condition est toujours remplie, et on dispose d'une orientation « intrinsèque » de tang $(\Gamma; M_0)$ (i.e. représentée par $(f^{(p)}(t_0))$ pour toute paramétrisation (I, f) de Γ).

Dans le cas où Γ est un arc orientable ou non, et où p est pair, on dispose encore d'une orientation intrinsèque de tang $(\Gamma; M_0)$.

Dans le cas où Γ est un arc orientable et où p est impair (en particulier dans le cas d'un point régulier d'un arc orientable), on choisit une orientation directe Γ_+ de Γ et on qualifie l'orientation intrinsèque de tang $(\Gamma_+; M_0)$ d'*orientation directe* de tang $(\Gamma; M_0)$.

Si la donnée est un arc paramétré $(I, t \mapsto f(t))$ celui-ci sera considéré comme orienté dans le sens des t croissants; nous dirons que $f^{(p)}(t_0)$ dirige la tangente orientée au point $M_0(t_0)$.

4° ***Variétés osculatrices à* Γ *en* M_0.** — Reprenons la suite, croissante pour l'inclusion, des variétés affines fondamentales de Γ en M_0. Il est clair que :

$$\text{si} \quad \mathscr{T}_{i+1}(\Gamma; M) \neq \mathscr{T}_i(\Gamma; M), \quad \text{alors} \quad \dim \mathscr{T}_{i+1}(\Gamma; M) = 1 + \dim \mathscr{T}_i(\Gamma; M).$$

---

[1] On rappelle (II.5.4.2, 5°) que tout espace affine de dimension finie, $(\mathscr{V}, V)$, est orientable, et qu'une orientation de $\mathscr{V}$ est représentée par une base de V.

A tout entier $i \leqslant \min(n, k)$ on peut associer $\{j \in \mathbb{N} \mid \dim \mathscr{E}_j(\Gamma ; M) = i\}$. Si cet ensemble n'est pas vide, il admet un plus petit élément que l'on note p_i, avec $i \leqslant p_i \leqslant k$. On dispose ainsi de la famille $(p_0, p_1, \ldots, p_h)$, qui est non vide puisque $p_0 = 0$, et finie puisque $h \leqslant \min(n, k)$; elle est dite *famille caractéristique* de Γ en M_0. On pose :

DÉFINITION I. — **Pour tout** $i \in \{0, \ldots, h\}$, **la variété affine fondamentale** $\mathscr{E}_{p_i}(\Gamma ; M_0)$ **est dite** *variété osculatrice* **de dimension** i **de** Γ **en** M_0.

On dispose dans tous les cas de $\mathscr{E}_{p_0}(\Gamma ; M_0) = \{m_0\}$. L'existence de p_1 (qui est l'entier p du 2°) conditionne celle de $\mathscr{E}_{p_1}(\Gamma ; M_0) = \operatorname{tang}(\Gamma ; M_0)$. Lorsque p_2 existe, on dit que $\mathscr{E}_{p_2}(\Gamma ; M_0)$ est le *plan osculateur* à Γ en M_0, que l'on note $\operatorname{osc}(\Gamma ; M_0)$.

DÉFINITION II. — **On dit que** M_0 **est un point** *i-régulier* **de** Γ **si, et seulement si, en ce point :** $(0, 1, \ldots, i) = (p_0, p_1, \ldots, p_i)$. **Un arc géométrique** *i*-**régulier est un arc donc chaque point est** *i*-**régulier.**

C'est ainsi qu'un point 1-régulier est un point régulier, et qu'un arc 1-régulier (ou régulier) est un arc immergé.

- Nous allons maintenant étendre le théorème II du 2°.

PROPOSITION. — M_0 **étant représenté par** (I, f, t_0) **on suppose qu'existent les variétés osculatrices de dimensions** i **et** $i + 1$ **de** Γ **en** M_0 ; **elles seront abréviativement notées** $\mathscr{E}_{p_i}$ **et** $\mathscr{E}_{p_{i+1}}$. **Alors il existe un voisinage** U **de** t_0 **pour** I **tel que :**

$$\forall t \in U \backslash \{t_0\} \qquad f(t) \notin \mathscr{E}_{p_i}$$

et (la grassmannienne $\mathscr{G}_{i+1, f(t_0)}$ étant munie de sa topologie habituelle) :

$$\mathscr{E}_{p_{i+1}} = \lim_{t \to t_0,\, t \in U \backslash \{t_0\}} \mathscr{V}(t), \qquad \text{où} \qquad \mathscr{V}(t) = \operatorname{Aff}(\mathscr{E}_{p_i} \cup f(t)).$$

Le théorème et la remarque du 1.2.2, 1° appliqués à $\mathscr{V} = \mathscr{E}_{p_i}$ (et $\mathscr{E}_{p_{i+1}} \not\subset \mathscr{V}$), montrent que $d(f(t), \mathscr{E}_{p_i})$ est semblable à $|t - t_0|^{i+1}$, ce qui justifie l'existence de U.

Pour tout $t \in U \backslash \{0\}$, $\mathscr{V}(t)$ est ainsi de dimension $i + 1$, et sa direction $V(t)$ admet la base $(f^{(p_1)}(t_0), \ldots, f^{(p_i)}(t_0), \overrightarrow{m_0 f(t)})$. Compte-tenu de $f^{(j)}(t_0) \in T_{p_i}$ pour $j \in \{1, \ldots, p_{i+1} - 1\}$, la formule de Taylor à l'ordre p_{i+1} donne :

$$\overrightarrow{m_0 f(t)} = u(t) + \frac{(t - t_0)^{p_{i+1}}}{p_{i+1}\,!}\,(f^{(p_{i+1})}(t_0) + \varepsilon(t))$$

avec : $$u(t) \in T_{p_i} \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to t_0,\, t \neq t_0} \varepsilon(t) = 0.$$

$V(t)$ admet donc la base $(f^{(p_1)}(t_0), \ldots, f^{(p_i)}(t_0), f^{(p_{i+1})}(t_0) + \varepsilon(t))$. On achève la démonstration en utilisant la topologie finale de $\mathscr{G}_{i+1}$ et le théorème de composition des limites.

5° ***Image d'un arc géométrique par une application différentiable.*** — Soient $(\mathscr{E}, E)$ et $(\mathscr{F}, F)$ deux e.a.n. de dimension finie, et Φ une application de classe $C^{k'}(k' \geqslant 1)$ d'un ouvert U de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$.

Si (I, f) est un C^k-arc paramétré $(1 \leqslant k \leqslant k')$ de $\mathscr{E}$ dont le support $\mathscr{S}$ est inclus dans U, alors $(I, \Phi \circ f)$ est un C^k-arc paramétré de $\mathscr{F}$, de support $\Phi(\mathscr{S})$.

On vérifie que si les arcs paramétrés (I, f) et (J, g) de $\mathscr{E}$ sont C^k-équivalents, alors les arcs paramétrés $(I, \Phi \circ f)$ et $(J, \Phi \circ g)$ de $\mathscr{F}$ le sont aussi. D'où la possibilité de définir, par passage au quotient, l'image par Φ d'un C^k-arc géométrique Γ de $\mathscr{E}$ dont le support est inclus dans U : c'est le C^k-arc géométrique de $\mathscr{F}$, noté $\Phi \circ \Gamma$, dont une paramétrisation est $(I, \Phi \circ f)$ si (I, f) en est une de Γ. On note $\Phi \circ M$ le point de $\Phi \circ \Gamma$ dont un représentant est $(I, \Phi \circ f, t)$ si (I, f, t) en est un du point M de Γ ; si m est l'image de M, $\Phi(m)$ est ainsi celle de $\Phi \circ M$.

En utilisant $(\Phi \circ f)'(t) = \mathrm{d}\Phi(f(t)).f'(t)$, on constate que si M est régulier et si $\mathrm{d}\Phi(f(t)) \in \mathscr{L}(E, F)$ est injective, alors $\Phi \circ M$ est régulier et la direction de tang $(\Phi \circ \Gamma ; \Phi \circ M)$ est l'image par $\mathrm{d}\Phi(f(t))$ de celle de tang $(\Gamma ; M)$. Ce résultat subsiste sous la seule condition $f'(t) \notin \operatorname{Ker} \mathrm{d}\Phi(f(t))$.

– Étudions plus particulièrement le cas où Φ est une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$, de partie linéaire φ, ce qui implique que Φ et φ sont de classe C^∞. Pour tout $1 \leqslant j \leqslant k$, on a ici

$$(\Phi \circ f)^{(j)}(t_0) = \varphi[f^{(j)}(t_0)].$$

D'où, pour $l \leqslant k$:

$$T_l(\Phi \circ \Gamma ; \Phi \circ M) = \varphi[T_l(\Gamma ; M)] \quad \text{et} \quad \mathscr{T}_l(\Phi \circ \Gamma ; \Phi \circ M) = \Phi[\mathscr{T}_l(\Gamma ; M)]$$

On en déduit que, si $(p_1, \ldots, p_h)$ est la famille caractéristique de Γ en M_0, alors pour tout $i \in \{0, \ldots, h\}$, la variété osculatrice de dimension i de Γ en M_0 a pour image par Φ une variété osculatrice de $\Phi \circ \Gamma$ en $\Phi \circ M$ dont la dimension i' vérifie $i' \leqslant i$, et $i' = i$ si Φ est bijective.

Remarquons qu'*un isomorphisme affine transforme un arc géométrique en un arc de même nature* (compact, simple, fermé simple, immergé, plongé) et retenons qu'*il conserve la tangente et le plan osculateur*. Le titre du présent chapitre, *propriétés affines des arcs*, trouve ainsi sa justification.

EXEMPLE : PROJECTION CYLINDRIQUE. – Ici $\mathscr{E}$ est de dimension 3, $\mathscr{F}$ est un plan affine de $\mathscr{E}$, Φ est la projection de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{F}$, parallèlement à une direction de droites $\Delta \notin F$ (c'est une application affine non bijective).

α) Si Γ admet en M_0 une tangente $\mathscr{T}_p$ dont la direction n'est pas Δ, alors la projection $\Gamma' = \Phi \circ \Gamma$ de Γ admet $\mathscr{T}'_p = \Phi(\mathscr{T}_p)$ pour tangente en $M'_0 = \Phi \circ M_0$ (fig.).

β) Si Γ admet en M_0 une tangente $\mathscr{T}_p$ de direction Δ et un plan osculateur $\mathscr{T}_q$, alors Γ' admet $\mathscr{T}'_q = \Phi(\mathscr{T}_p)$ pour tangente en M'_0 (fig.) ; en anticipant sur 1.2.3, 2°, le lecteur vérifiera que, dans le cas général où M_0 est tri-régulier, M'_0 est un point de rebroussement de première espèce de Γ'. Ces résultats pourront être interprétés au 3.2.1, 2°, en liaison avec l'étude des plans tangents aux nappes cylindriques. Nous laissons au lecteur le soin de les étendre à une projection conique (bien que celle-ci ne soit pas une application affine).

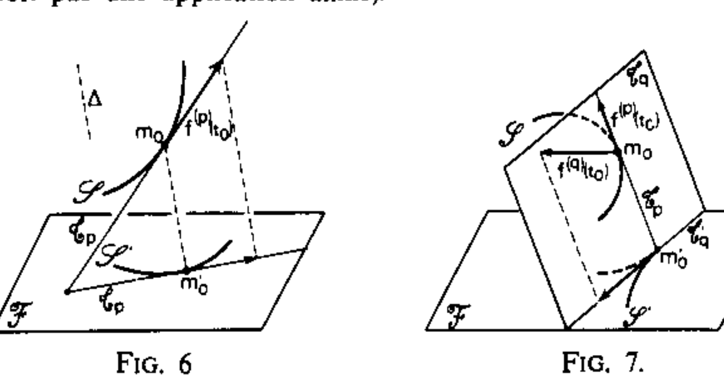


FIG. 6 FIG. 7.

6° ***Arcs dont le support est inclus dans une sous-variété affine de $\mathscr{E}$.*** — Rappelons (remarque *b*) du **1.2.2**, 1°) que toutes les variétés affines fondamentales d'un arc géométrique Γ sont incluses dans toute sous-variété affine de $\mathscr{E}$ qui contient supp Γ.

Nous allons établir des réciproques. Pour cela, nous utiliserons :

• PROPOSITION. — **Soient E un espace vectoriel normé (de dimension finie ou infinie), I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $F : I \to E$ une application de classe C^i vérifiant :**

$$F^{(i)} = \varphi_1 F + \varphi_2 F' + \cdots + \varphi_i F^{(i-1)}$$

où $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ sont des applications continues de I dans $\mathbb{R}$. Alors il existe un sous-espace vectoriel V de E, de dimension au plus égale à i tel que :

$$\forall t \in I \qquad F(t) \in V.$$

$t_0 \in I$ ayant été arbitrairement choisi, soient $V = \text{Vect}\ (F(t_0), \ldots, F^{(i-1)}(t_0))$ et W un supplémentaire de V dans E ; pour tout $t \in I$, $\mathbf{w}(t)$ désigne la projection de $F(t)$ sur W parallèlement à V ; on dispose ainsi de $\mathbf{w} : I \to W$, application de classe C^i. On constate que $\mathbf{w}$ est solution sur I de l'équation différentielle linéaire d'ordre i (à l'inconnue $y \in W^I$) :

$$y^{(i)} - \varphi_i y^{(i-1)} - \cdots - \varphi_2 y' - \varphi_1 y = 0$$

et qu'elle vérifie les conditions initiales :

$$y(t_0) = y'(t_0) = \cdots = y^{(i-1)}(t_0) = 0$$

D'après le théorème d'unicité du IV.5.1.5, 1°, $\mathbf{w}$ coïncide avec l'application nulle de I dans W. □

Revenons au cas où $(\mathscr{E}, E)$ est affine de dimension finie n.

• COROLLAIRE I. — **Soit Γ un C^k-arc géométrique de $\mathscr{E}$, i-régulier mais dont aucun point n'est $(i+1)$-régulier ($1 \leqslant i < k$). Alors supp Γ est inclus dans une variété affine de dimension i de $\mathscr{E}_n$.**

Soient (I, f) un représentant de Γ et $t_0 \in I$, arbitrairement choisi.

Pour tout $t \in I$, les systèmes $(f'(t), \ldots, f^{(i)}(t))$ et $(f'(t), \ldots, f^{(i+1)}(t))$ sont respectivement libre et lié. Il existe donc des applications $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ de I dans $\mathbb{R}$ telles que l'on ait l'égalité entre applications de I dans E :

$$f^{(i+1)} = \varphi_1 f' + \cdots + \varphi_i f^{(i)}$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ sont continues, ainsi que l'on s'en assure en exprimant $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_i(t)$ à l'aide des composantes de $f'(t)$ dans une base fixe de E. On peut donc appliquer la proposition précédente avec $F = f'$: pour tout $t \in I$, $f'(t)$ appartient à $V = \text{Vect}\ (f'(t_0), \ldots, f^{(i)}(t_0))$, qui, d'après la i-régularité de Γ, est de dimension i.

Il en résulte que $f(t) - f(t_0) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} f'(u)\,du$ est un vecteur de V. D'où :

$$\text{supp}\ \Gamma \subset f(t_0) + V. \qquad \square$$

CAS PARTICULIERS. — *a*) **Le support d'un C^2-arc régulier dont aucun point n'est bi-régulier est un intervalle de droite.**

supp Γ est inclus dans une droite d'après le corollaire ; de plus il est connexe. □

b) **Le support d'un C^3-arc bi-régulier dont aucun point n'est tri-régulier est inclus dans un plan.**

• COROLLAIRE II. — **Soit Γ un C^k-arc i-régulier de $\mathscr{E}$ ($1 \leqslant i \leqslant k$) ; on suppose qu'il existe $O \in \mathscr{E}$ tel que, pour tout point M de Γ, O appartienne à $\mathscr{T}_i(\Gamma\,;M)$ sans appartenir à $\mathscr{T}_{i-1}(\Gamma\,;M)$. Alors supp Γ est inclus dans une variété affine de dimension i de $\mathscr{E}$ contenant O.**

Soient (I, f) un représentant de Γ et $t_0 \in I$. Nous posons $F(t) = f(t) - O$. D'après l'hypothèse, pour tout $t \in I$, $(F'(t), \ldots, F^{(i)}(t))$ est libre, $(F(t), \ldots, F^{(i)}(t))$ est lié, $(F(t), \ldots, F^{(i-1)}(t))$ est libre. Il existe donc des applications $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ de I dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$F^{(i)} = \varphi_1 F + \cdots + \varphi_i F^{(i-1)}$$

et on constate, comme ci-dessus que $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$, sont continues. On peut appliquer la proposition précédente :

pour tout $t \in I$, $F(t) = f(t) - O$ appartient à $V = \text{Vect}\,(f(t_0) - O, f'(t_0), \ldots, f^{(i-1)}(t_0))$, qui est un sous-espace vectoriel de E de dimension i. □

CAS PARTICULIERS. — *a*) **Soit Γ un arc régulier dont toutes les tangentes contiennent un point fixe $O \notin$ supp Γ. Alors supp Γ est un intervalle d'une droite qui contient O.**

b) **Soit Γ un arc bi-régulier dont tous les plans osculateurs contiennent un point fixe O, qui n'appartient à aucune tangente. Alors supp Γ est inclus dans un plan qui contient O.**

1.2.3. Construction locale du support

Ce paragraphe est un prolongement du **1.2.2**. Nous reprenons les données du début du **1.2.2**.

1° *Recherche des variétés osculatrices de Γ en M_0.* — A partir d'un représentant arbitrairement choisi (I, f, t_0) de M_0, on étudie les $f^{(j)}(t_0)$, $j \in \mathbb{N}_k$. On obtient ainsi la famille $(p_1, \ldots, p_h)$, avec $h \leqslant \min(n, k)$. Pour $i \in \{0, \ldots, h\}$, la variété osculatrice de dimension i, $\mathscr{T}_{p_i}(\Gamma\,; M_0)$, est alors déterminée par le repère $(m_0\,; f^{(p_1)}(t_0), \ldots, f^{(p_i)}(t_0))$.

Le théorème du **1.2.2**, 1° et la remarque qui lui est annexée permettent, dans chaque cas particulier d'étudier, au voisinage de t_0, la distance de $f(t)$ à une variété affine $\mathscr{V}$ de $\mathscr{E}$ qui contient m_0. En faisant $\mathscr{V} = \mathscr{T}_{p_i}(\Gamma\,; M_0)$ on constate en particulier :

PROPOSITION. — **Parmi les variétés de dimension i qui contiennent M_0, la variété osculatrice en M_0 est celle dont le support de l'arc est « le plus proche » au voisinage de t_0.**

Étudions maintenant deux cas particulièrement importants.

2° *Arc plan* $(n = 2)$. — Nous nous limitons au cas où Γ admet en M_0 une famille caractéristique de la forme $(0, p, q)$, i.e. où $h = 2$, ce qui implique $k \geqslant 2$.

Γ *admet en* M_0 la tangente $\mathscr{T}_p = m_0 + \mathbb{R} f^{(p)}(t_0)$, représentée paramétriquement (dans un repère $(O\,; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ quelconque) par :

$$x = x(t_0) + \lambda x^{(p)}(t_0), \qquad y = y(t_0) + \lambda y^{(p)}(t_0),$$

et un plan osculateur qui est $\mathscr{E}$ lui-même.

La formule de Taylor-Young nous assure qu'il existe un voisinage W de t_0 (pour I) sur lequel :

$$f(t) = m_0 + \frac{(t - t_0)^p}{p\,!}\,(f^{(p)}(t_0) + \varepsilon(t)) + \frac{(t - t_0)^q}{q\,!}\,f^{(q)}(t_0) + o(t - t_0)^q \tag{1}$$

où $\varepsilon(t)$ est un vecteur colinéaire à $f^{(p)}(t_0)$ qui tend vers 0 quand $t \in W$ tend vers t_0.

Rapportons $\mathscr{E}$ au repère affine $\mathscr{R} = (m_0 ; f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ et désignons par $X(t)$ et $Y(t)$ les coordonnées du point $f(t)$ dans $\mathscr{R}$. Nous constatons que, au voisinage de t_0 :

$$X(t) \sim (t - t_0)^p/p\,!, \qquad Y(t) \sim (t - t_0)^q/q\,! \tag{2}$$

D'où les signes de $X(t)$ et $Y(t)$ au voisinage de t_0, ce qui permet de tracer *localement* (1) $\mathscr{S} = \operatorname{supp} \Gamma$ (la flèche indique l'orientation dans le sens « des t croissants »).

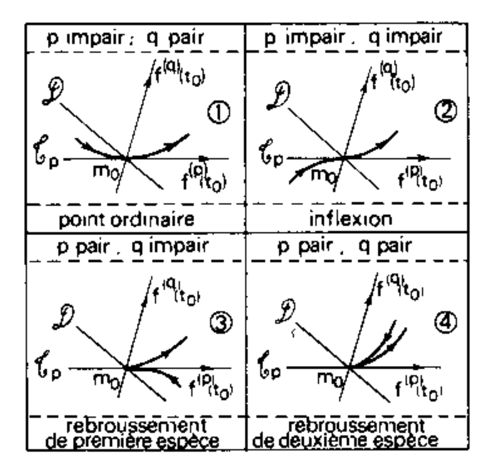


FIG. 8.

On peut étudier la position de $f(t)$ par rapport à une droite affine quelconque, $\mathscr{D}$, contenant le point m_0. Si $\alpha X + \beta Y = 0$, avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, est une équation de $\mathscr{D}$ dans le repère $\mathscr{R}$, il suffit en effet (II.5.3.4, 3°) d'étudier $\operatorname{sgn}(\alpha X(t) + \beta Y(t))$; le cas $\mathscr{D} = \mathscr{T}_p$ correspond à $(\alpha, \beta) = (0, 1)$. Nous avons, d'après (2) :

- Si $\mathscr{D} \neq \mathscr{T}_p$ $(\alpha \neq 0)$: $\alpha X(t) + \beta Y(t) \sim \alpha(t - t_0)^p/p\,!$
- Si $\mathscr{D} = \mathscr{T}_p((\alpha, \beta) = (0, 1))$: $\alpha X(t) + \beta Y(t) \sim (t - t_0)^q/q\,!$

D'où la discussion (on suppose que t_0 est intérieur à I) :

CAS n° 1 : L'arc « *traverse* » toute droite $\mathscr{D} \neq \mathscr{T}_p$: il existe $W \in \mathscr{V}_I(t_0)$ tel que $f(t)$ est dans l'un ou dans l'autre des demi-plans ouverts définis par $\mathscr{D}$ selon que t appartient à $W \cap]-\infty, t_0[$ ou à $W \cap]t_0, +\infty[$.

L'arc « *ne traverse pas* » la tangente $\mathscr{T}_p$: il existe $W \in \mathscr{V}_I(t_0)$ tel que pour tout $t \in W \setminus \{t_0\}$, $f(t)$ appartient à celui des demi-plans ouverts limités par $\mathscr{T}_p$ qui s'écrit (avec une notation se comprenant d'elle-même) :

$$m_0 + \mathbb{R} f^{(p)}(t_0) + \mathbb{R}_+^* f^{(q)}(t_0)$$

---

(1) Rappelons que *local* s'entend au sens de la topologie de I : il peut exister dans tout voisinage de m_0 d'autres points de $\mathscr{S}$ que ceux que nous représentons ici (reprendre la lemniscate du 1.2.1, 1°, avec $m_0 = (0, 0)$).

et qui est appelé *concavité de* Γ *en* M_0. Dans ce cas n° 1 (qui est, en particulier, celui d'un point bi-régulier) on parle de *point ordinaire* et quelquefois (cf. ci-dessous) de *point méplat*.

CAS n° 2 : L'arc traverse toute droite $\mathscr{D}$, y compris la tangente ; on parle de *point d'inflexion*.

CAS n° 3 : La tangente est la seule droite que l'arc traverse ; on parle de *point de rebroussement de première espèce*.

CAS n° 4 : L'arc ne traverse aucune droite ; on parle de *point de rebroussement de deuxième espèce*. Dans ce cas, l'étude des positions relatives des parties de $\mathscr{S}$ qui correspondent à $t < t_0$ et $t > t_0$ peut être délicate (c'est ainsi que, dans le cas de l'arc de $\mathbb{R}^2$ représenté par $t \longmapsto (t^2, t^4)$, ces deux parties sont confondues).

• ***Pratique***. — On revient à un repère $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ quelconque et à $f(t) = O + x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$. En remarquant que $f'(t_0) \neq 0$ exige $(x'(t_0) \neq 0) \vee (y'(t_0) \neq 0)$, et que $x'(t_0) \neq 0$ s'écrit $f'(t_0) \notin \mathbb{R}\mathbf{j}$, et implique $x'(t) \neq 0$ au voisinage de t_0, démontrons :

PROPOSITION. — **Soit M_0 un point bi-régulier en lequel $f'(t_0) \notin \mathbb{R}\mathbf{j}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :**

i) La concavité en M_0 est le demi-plan $m_0 + \mathbb{R}f'(t_0) + \mathbb{R}_+^*\mathbf{j}$ (i.e. le point $m_0 + \mathbf{j}$ est dans la concavité) ce que l'on traduit par « la concavité est tournée vers les $y > 0$ » ;

ii) $x'(t_0)(x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)) > 0$ (ce qui s'écrit $y''(x_0) > 0$ lorsque le paramètre est l'abscisse) ;

iii) La fonction $\mu : t \longmapsto y'(t)/x'(t)$ vérifie : $x'(t_0).\mu'(t_0) > 0$.

L'assertion i) s'écrit :

$$\mathbf{j} = \alpha f'(t_0) + \beta f''(t_0) \qquad \text{avec} \qquad \beta > 0.$$

Or

$$\beta = \det P_{(f'(t_0), f''(t_0))}^{(f'(t_0), \mathbf{j})} = \det P_{(\mathbf{i}, \mathbf{j})}^{(f'(t_0), \mathbf{j})} / \det P_{(\mathbf{i}, \mathbf{j})}^{(f'(t_0), f''(t_0))}$$

D'où l'équivalence de i) et ii). Celle de ii) et iii) résulte de :

$$\mu'(t_0) = (x'(t_0))^{-2}(x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)). \qquad \square$$

REMARQUES A. — *a*) Une condition nécessaire, non suffisante pour que M_0 soit un point d'inflexion est :

$$x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0) = 0.$$

b) Par Taylor-Young, nous obtenons :

$$\det_{(\mathbf{i}, \mathbf{j})}(f'(t), f''(t)) \sim \frac{(t - t_0)^{p+q-3}}{(p-1)!(q-2)!} \det_{(\mathbf{i}, \mathbf{j})}(f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$$

Il y a donc *permanence du sens de la concavité*, au voisinage de t_0 pour chacun des sous-arcs correspondant à $t > t_0$ et $t < t_0$. Ceci justifie les tracés intuitifs de la figure 10 (avec la réserve déjà faite dans le cas n° 4).

Terminons par une autre série de remarques.

REMARQUES B. — *a*) Au voisinage de t_0, $d(f(t), \mathcal{V})$ est :

— semblable à $|t - t_0|^p$ si $\mathcal{V}$ est soit $\{m_0\}$, soit une droite $\mathcal{D} \neq \mathcal{T}_p$ contenant m_0,
— semblable à $|t - t_0|^q$ si $\mathcal{V}$ est $\mathcal{T}_p$.

Il en résulte que : $d(f(t), \mathcal{T}_p)$ est semblable à $[d(f(t), m_0)]^{q/p}$. Selon que q/p est plus grand ou plus petit que 2, on dira que l'arc est « plus proche » ou moins proche de la tangente que dans le cas d'un point birégulier. Un point ordinaire tel que $q/p > 2$ est dit *point méplat*.

b) A titre d'exercice, le lecteur étudiera le cas où, dans un repère $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ quelconque, $f(t) = O + t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$. Il montrera que $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2\mathbf{i}$, $f'''(0) = 3\mathbf{j}$, et donc que M_0 est un point de rebroussement de première espèce, à tangente $O + \mathbb{R}\mathbf{i}$; l'arc est moins proche de la tangente que dans le cas d'un point bi-régulier.

c) La nature géométrique des résultats obtenus montre que le choix du représentant (I, f, t_0) de M_0 est indifférent. Nous connaissons ce résultat en ce qui concerne la tangente et la suite caractéristique. A titre d'exercice le lecteur pourra le vérifier pour la concavité en montrant que, si (I, f, t_0) et (J, g, u_0) sont deux représentants de M_0, alors :

$$m_0 + \mathbb{R}f^{(p)}(t_0) + \mathbb{R}_+^* f^{(q)}(t_0) = m_0 + \mathbb{R}g^{(p)}(u_0) + \mathbb{R}_+^* g^{(q)}(u_0).$$

d) Un point de rebroussement est un point stationnaire ($p > 1$), mais la réciproque est fausse.

e) L'étude ne s'applique que si la famille caractéristique en M_0 contient deux termes non nuls; ce n'est pas toujours le cas (par exemple si $\mathcal{S}$ est inclus dans une droite).

f) Par contre, si c'est le cas, la connaissance de la position de $\mathcal{S}$ par rapport aux droites affines contenant m_0, peut fournir les parités de p et q (par exemple, s'il existe deux droites *distinctes* non traversées, M_0 est un point de rebroussement).

g) L'étude, qui repose sur la formule (1), reste valable si on remplace celle-ci par un développement limité non obtenu par Taylor-Young; dans la pratique, on peut ainsi éviter des dérivations laborieuses.

On peut aussi étendre l'étude au cas où $f(t)$ admet une limite m_0 lorsque t tend vers $+\infty$, ou $-\infty$; on remplace alors (1) par un développement limité au voisinage de $+\infty$, ou $-\infty$ (cf. exemple au **1.3.1**, 4° *in fine*).

3° ***Arc de $\mathcal{E}_3$.*** — Limitons-nous au cas où M_0 est un point birégulier de Γ : $(p_1, p_2) = (1, 2)$. Nous disposons en M_0 de la tangente $\mathcal{T}_1 = m_0 + \mathbb{R}f'(t_0)$ représentée paramétriquement (dans un repère quelconque) par :

$$x = x(t_0) + \lambda x'(t_0), \qquad y = y(t_0) + \lambda y'(t_0), \qquad z = z(t_0) + \lambda z'(t_0)$$

et du plan osculateur $\mathcal{T}_2 = m_0 + \operatorname{Vect}(f'(t_0), f''(t_0))$ représenté paramétriquement par :

$$x = x(t_0) + \lambda x'(t_0) + \mu x''(t_0), \qquad y = y(t_0) + \lambda y'(t_0) + \mu y''(t_0),$$
$$z = z(t_0) + \lambda z'(t_0) + \mu z''(t_0),$$

et admettant pour équation cartésienne :

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) & x''(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) & y''(t_0) \\ z - z(t_0) & z'(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

• Rapportons $\mathscr{E}$ à un repère de la forme $\mathscr{R} = (m_0\,;\, f'(t_0), f''(t_0), \mathbf{K})$ où $\mathbf{K} \notin T_2$. En procédant comme au 2°, nous constatons :

$$X(t) \sim (t - t_0), \qquad Y(t) \sim (t - t_0)^2/2, \qquad Z(t) = o(t - t_0)^2.$$

Nous en déduisons qu'en m_0 l'arc :

— *traverse tout plan $\mathscr{P}$ qui contient m_0, mais n'est pas tangent ;*

— *ne traverse aucun plan $\mathscr{Q}$ qui est tangent, mais non osculateur en M_0.*

Soient Γ' la projection de Γ sur le plan osculateur $\mathscr{C}_2$ (parallèlement à la droite $\mathbb{R}\mathbf{K}$) et M_0' (d'image m_0) la projection de M_0. On constate que M_0' est un point ordinaire de Γ' et qu'il existe $U \in \mathscr{V}(t_0)$ tel que, pour tout $t \in U \setminus \{t_0\}$, la projection de $f(t)$ appartienne au demi-plan ouvert $m_0 + \mathbb{R}f'(t_0) + \mathbb{R}_+^* f''(t_0)$, qui est appelé *concavité* de Γ en M_0.

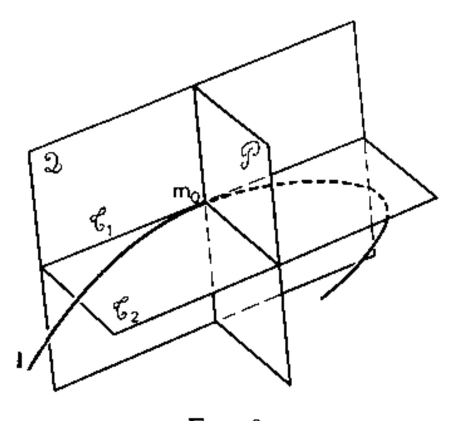


FIG. 9.

• THÉORÈME. — **M_0 étant un point birégulier de Γ représenté par (I, f, t_0), il existe un voisinage U de t_0 pour I tel que :**

$$\forall t \in U \setminus \{t_0\} \qquad f(t) \notin \operatorname{tang}(\Gamma; M_0)$$

et l'on a :

$$\operatorname{osc}(\Gamma;\, M_0) = \lim_{t \to t_0, t \in U \setminus \{t_0\}} \mathscr{V}(t)$$

où $\mathscr{V}(t)$ désigne celui des plans tangents en M_0 à Γ qui contient le point $f(t)$.

Cas particulier important de la proposition **1**. 2.*2*, 4°. □

• Jusqu'ici $k \geqslant 2$ suffisait. Supposons maintenant $k \geqslant 3$.

— Si M_0 est tri-régulier, i.e. si la famille caractéristique en M_0 est (0, 1, 2, 3), on peut adopter $\mathbf{K} = f'''(t_0)$, et ainsi : $z(t) \sim (t - t_0)^3/3\,!$, ce qui montre que l'arc traverse le plan osculateur en m_0 (fig. 11) ; en projetant sur les plans $m_0 + \operatorname{Vect}(f'(t_0), f'''(t_0))$ et $m_0 + \operatorname{Vect}(f''(t_0), f'''(t_0))$ on obtient respectivement un point d'inflexion et un point de rebroussement (d'image m_0).

– Si $f'''(t_0) \in T_2$, i.e. si $\mathscr{T}_2 = \mathscr{T}_3$, on a $Z(t) = o(t - t_0)^3$; on dit alors que $\mathscr{T}_2$ est *surosculateur ;* en particulier si la famille caractéristique est (0, 1, 2, 4) on a $Z(t) \sim (t - t_0)^4/4$! et l'arc ne traverse pas le plan osculateur en m_0.

• A titre d'exercice, le lecteur pourra étudier, au voisinage de t_0, la distance de $f(t)$ à m_0, à une droite contenant m_0, à un plan contenant m_0. Il pourra pour cela utiliser soit le repère $\mathscr{R}$, soit le théorème II du 1.2.2, 1°.

1.2.4. Branches infinies

On travaille ici sur C^k-arc paramétré. Au terme de l'étude, le lecteur vérifiera que la propriété **avoir une branche infinie** (*resp.* **une direction asymptotique;** *resp* **une asymptote)** *est C^k-invariante, ce qui permet de la transférer de l'arc paramètre à l'arc géométrique qu'il représente.*

Dans tout le paragraphe, on considère un C^k-arc paramétré (I, f) d'un $\mathbb{R}$-e.a.n. $(\mathscr{E}, E)$ de dimension finie $n > 0$; on se place dans le cas où il existe $b \in \bar{\mathbb{R}}$ vérifiant : $b \in \bar{I} \setminus I$, où $\bar{I}$ est l'adhérence de I dans $\bar{\mathbb{R}}$ (borne de I dans $\bar{\mathbb{R}}$, n'appartenant pas à I).

1° ***Branche infinie.*** — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **On suppose qu'il existe $O \in \mathscr{E}$ vérifiant :** $\lim\limits_{t \to b} \|\overrightarrow{Of(t)}\| = +\infty$.

Alors, pour tout $O' \in \mathscr{E}$: $\lim\limits_{t \to b} \|\overrightarrow{O'f(t)}\| = +\infty$, **et on dit que l'arc** (I, f) **admet une** *branche infinie relative* à b.

Simple conséquence de :

$$\forall (O, O') \in \mathscr{E}^2 \qquad \|\overrightarrow{O'f(t)}\| \geqslant \|\overrightarrow{Of(t)}\| - \|\overrightarrow{OO'}\|. \qquad \square$$

2° ***Direction asymptotique.*** — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **L'arc** (I, f) **admettant une branche infinie relative à** b**, on suppose qu'il existe un point** O **de** $\mathscr{E}$ **et une droite** Δ **de** $\mathscr{E}$**, de direction** δ**, vérifiant :**

$$\lim_{t \to b} \operatorname{Aff}(O, f(t)) = \Delta \qquad (4)$$

Alors, pour tout $O' \in \mathscr{E}$**, la droite** Aff $(O', f(t))$ **admet, quand** t **tend vers** b**, une limite de direction** δ**, et on dit que** δ **(dont l'unicité est évidente) est la** *direction asymptotique* **de la branche infinie considérée.**

En utilisant la définition du 1°, on constate que, $(O, O') \in \mathscr{E}^2$ étant donné, il existe $W = V \cap I$, où V est un voisinage de b, tel que, pour tout $t \in W$:

$f(t) \neq O$ et $f(t) \neq O'$, ce qui permet de disposer des droites $\text{Aff}(O, f(t)) = \mathscr{D}_t$ et $\text{Aff}(O', f(t)) = \mathscr{D}'_t$, de directions notées D_t et D'_t.

(4) signifie $\lim\limits_{t \to b,\, t \in W} \mathscr{D}_t = \Delta$ et implique (**1**.1.*2*, 5°) l'existence d'une application $\mathbf{u}$ de W dans la sphère S de E vérifiant :

$$\forall t \in W \qquad \mathbf{u}(t) \in D_t; \qquad \exists \mathbf{v} \in \delta \backslash \{0\} \qquad \lim_{t \to b,\, t \in W} \mathbf{u}(t) = \mathbf{v}.$$

Pour $t \in W$ nous avons $\overrightarrow{Of(t)} \in D_t$ et donc : $\overrightarrow{Of(t)} = r(t)\mathbf{u}(t)$;

avec : $\qquad |r(t)| = \|\overrightarrow{Of(t)}\| > 0, \qquad$ et $\qquad \lim\limits_{t \to b,\, t \in W} |r(t)| = +\infty.$

Nous constatons que $\dfrac{1}{r(t)} \overrightarrow{O'f(t)}$ est un élément de $D'_t \backslash \{0\}$ qui s'écrit : $\dfrac{\overrightarrow{O'O}}{r(t)} + \mathbf{u}(t)$, et donc admet la limite $\mathbf{v}$ quand $t \in W$ tend vers b; il en résulte, toujours d'après **1**.1.*2*, 5°, que D'_t admet la limite δ. □

REMARQUES. — *a*) Les topologies sur $\mathscr{E}$ et sur l'ensemble des droites de $\mathscr{E}$ étant indépendantes du choix de la norme, on constate qu'il en est de même pour l'existence d'une branche infinie et, éventuellement, d'une direction asymptotique.

b) $\mathscr{E}$ étant rapporté à un repère, une condition *suffisante* pour qu'il y ait une branche infinie est qu'une des coordonnées admette $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite. L'exemple de l'arc $(\mathbb{R}, t \longmapsto (t \cos t, t \sin t))$ de $\mathbb{R}^2$ montre que cette condition n'est *pas nécessaire*.

c) Le même exemple montre qu'*il peut y avoir branche infinie sans direction asymptotique associée.*

3° *Asymptote.* — DÉFINITION. — **L'arc (I, f) admettant une branche infinie relative à b, s'il existe une droite affine $\mathscr{A}$ de $\mathscr{E}$ vérifiant :**

$$\lim_{t \to b} d(f(t), \mathscr{A}) = 0$$

on dit que $\mathscr{A}$ est une *asymptote* **de l'arc, associée à la branche infinie considérée.**

(L'indifférence du choix de la norme résulte ici du théorème du **1**.1.*4*, 1°).

THÉORÈME. — **La direction A d'une asymptote $\mathscr{A}$ est direction asymptotique pour la branche infinie considérée.**

Pour t donné, on a :

$$d(f(t), \mathscr{A}) = d(f(t), \mathscr{A}'),$$

où $\mathscr{A}' = \mathscr{A} \cap \mathscr{B}_f(f(t), 1 + d(f(t), \mathscr{A}))$ est un compact (fermé et borné) de $\mathscr{E}$; il existe donc $g(t) \in \mathscr{A}$ tel que :

$$d(f(t), \mathscr{A}) = d(f(t), g(t)).$$

Ayant choisi $O \in \mathscr{A}$, nous avons : $\|\overrightarrow{Og(t)}\| \geqslant \|\overrightarrow{Of(t)}\| - \|\overrightarrow{f(t)g(t)}\|$, ce qui entraîne $\lim_{t \to b} \|\overrightarrow{Og(t)}\| = +\infty$.

Il existe $W = V \cap I$, où V est un voisinage de b, tel que $f(t) \neq O$ et $g(t) \neq O$ pour tout $t \in W$. Ayant choisi un vecteur unitaire $\mathbf{v}$ de A, nous en déduisons (pour $t \in W$) :

$$\overrightarrow{Og(t)} = r(t)\mathbf{v}, \qquad \text{avec} \qquad r(t) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to b} |r(t)| = +\infty.$$

Nous constatons que $\dfrac{1}{r(t)} \overrightarrow{Of(t)}$ est un vecteur directeur de la droite Aff $(O, f(t))$ qui s'écrit $\mathbf{v} + \dfrac{1}{r(t)} \overrightarrow{g(t)f(t)}$, et donc admet la limite $\mathbf{v}$. □

Nous laissons au lecteur le soin d'établir :

COROLLAIRE I. — **L'arc admettant une branche infinie relative à b, il existe une asymptote associée si, et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :**

i) La branche infinie admet une direction asymptotique δ ;

ii) La droite $f(t) + \delta$ admet une limite quand t tend vers b.

Il va de soi que i) peut être vérifié sans que ii) le soit (cf. 4°).

COROLLAIRE II. — **A une branche infinie est associée au plus une asymptote.**

EXEMPLE. — *$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure affine canonique et d'une norme (qu'il est inutile de préciser). L'arc (I, f) de $\mathbb{R}^3$ est défini par :*

$$I =]1, +\infty[, \qquad f : t \longmapsto \left(\frac{t}{t-1}, \frac{t^2}{t-1}, \frac{t^3}{t-1}\right).$$

On constate qu'il y a une branche infinie relative à la borne $b = 1$ de I. De $\lim_{t \to 1, t > 1} (t-1)\, \overrightarrow{Of(t)} = (1, 1, 1)$ on déduit l'existence de la direction asymptotique $\delta = \mathbb{R}(1, 1, 1)$.

Pour $t > 1$, la droite $f(t) + \delta$, qui admet la représentation paramétrique :

$$x = \frac{t}{t-1} + \lambda, \qquad y = \frac{t^2}{t-1} + \lambda, \qquad z = \frac{t^3}{t-1} + \lambda$$

rencontre le plan $O + \operatorname{Vect}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ au point qui correspond à $\lambda = -\dfrac{t^3}{t-1}$, à savoir $(-t(1+t), -t^2, 0)$. Ce point a pour limite $a = (-2, -1, 0)$. L'arc admet donc $a + \delta$ pour asymptote.

Il y aurait intérêt à étudier simultanément l'arc $(I' f)$, où $I' =]-\infty, 1[$.

4° ***Branche parabolique d'un arc plan.*** — Soit (I, f) un arc paramétré d'un plan affine $\mathscr{E}$, admettant une branche infinie relative à b, et une direction asymptotique associée δ. Considérons une droite affine $\mathscr{D} = O + \mathbb{R}\mathbf{u}$, $(\mathbf{u} \notin \delta)$, et désignons le point $(f(t) + \delta) \cap \mathscr{D}$ par $g(t) = O + \varphi(t)\mathbf{u}$.

L'arc admet une asymptote si et seulement si, quand $t \in I$ tend vers b, $g(t)$ admet une limite $a \in \mathscr{D}$ (l'asymptote est alors $a + \delta$), i.e. si et seulement $\varphi(t)$ admet une limite finie.

Le lecteur vérifiera que si $\varphi(t)$ admet une limite appartenant à $\{-\infty, +\infty\}$, il en est de même pour tout autre choix de $\mathscr{D}$ et de $(O; \mathbf{u})$; on dit alors que l'arc (I, f) présente en b une *branche parabolique* de direction δ.

Il va de soi que si $\varphi(t)$ n'admet pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, il n'y a ni branche parabolique ni asymptote.

EXEMPLES. — *a)* $\mathscr{E} = \mathbb{R}^2$; (I, f) *est* $(\mathbb{R}, t \longmapsto (t, t^2))$, *dont le support est une parabole.*

Les branches infinies relatives à $+\infty$ et $-\infty$, admettent l'une et l'autre une branche parabolique de direction $\mathbb{R}(0, 1)$.

Le lecteur vérifiera qu'il en est de même pour $(\mathbb{R}, t \longmapsto (t, t^2 + \sin t))$, ce qui montre que si l'on peut observer que toute branche parabolique a l'allure d'une parabole (ce qui justifie la terminologie), ce n'est vrai que *grosso-modo*.

b) $\mathscr{E} = \mathbb{R}^2$; (I, f) *est* $(\mathbb{R}, t \longmapsto (t, \sin t))$. Il y a branche infinie relative à $+\infty$, avec direction asymptotique $\mathbb{R}(1, 0)$, mais il n'y a ni asymptote, ni branche parabolique.

5° ***Pratique dans le cas d'un arc plan.*** — Le plan $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$. On étudie l'arc (I, f), avec $f(t) = O + x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, qui présente une branche infinie en $b \in \overline{I} \backslash I$, $(b \in \overline{\mathbb{R}})$.

On élimine le cas où, pour tout voisinage V de b, il existe $(t, t') \in (V \cap I)^2$ tel que $x(t) = 0$ et $y(t') = 0$; il n'y a alors pas de direction asymptotique.

Quitte à intervertir les rôles de $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$, nous supposerons qu'il existe $V \in \mathscr{V}(b)$ tel que $x(t) \neq 0$ pour tout $t \in V \cap I$.

Recherche d'une direction asymptotique. — La direction de la droite Aff $(O, f(t))$, de coefficient directeur $y(t)/x(t)$, ne contient pas $\mathbf{j}$; le théorème du **1**.1.4, 3° s'applique et donne :

i) Si $\lim_{t \to b} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \mu \in \mathbb{R}$, alors $\mathbb{R}(\mathbf{i} + \mu\mathbf{j})$ est direction asymptotique;

ii) Si $\lim_{t \to b} \left|\dfrac{y(t)}{x(t)}\right| = +\infty$, alors $\mathbb{R}\mathbf{j}$ est direction asymptotique [1],

iii) Dans tous les autres cas, il n'y a pas de direction asymptotique.

Recherche d'une asymptote. — Étudions successivement les cas i) et ii) où il existe une direction asymptotique δ. Choisissons (cf. 4°) une droite affine $\mathscr{D} = O + \mathbb{R}\mathbf{u}$, $(\mathbf{u} \notin \delta)$, et étudions le point $(f(t) + \delta) \cap \mathscr{D}$, noté $g(t) = O + \varphi(t)\mathbf{u}$.

CAS i). — Ici $\delta = \mathbb{R}(\mathbf{i} + \mu\mathbf{j})$. On peut choisir $\mathscr{D} = O + \mathbb{R}\mathbf{j}$. Les droites $\mathscr{D}$ et $f(t) + \delta$ admettant les équations respectives :

$$x = 0 \qquad \text{et} \qquad y - y(t) = \mu(x - x(t))$$

---

[1] Par raison de continuité, ceci ne se produit que si $\lim_{t \to b} \dfrac{y(t)}{x(t)} \in \{-\infty, +\infty\}$.

on obtient :

$$\varphi(t) = y(t) - \mu x(t).$$

– S'il existe $\lim_{t \to b} (y(t) - \mu x(t)) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors la droite $\mathscr{A}$ d'équation $y = \mu x + \alpha$ est asymptote, et $\operatorname{sgn}(y(t) - \mu x(t))$ permet de placer le point $f(t)$ par rapport aux demi-plans définis par $\mathscr{A}$;

– S'il existe $\lim_{t \to b} (y(t) - \mu x(t)) \in \{-\infty, +\infty\}$, il y a branche parabolique ;

– Si $y(t) - \mu x(t)$ n'a pas de limite dans $\bar{\mathbb{R}}$, il n'y a ni asymptote, ni branche parabolique.

Cas ii). – Ici $\delta = \mathbb{R}\mathbf{j}$. On peut choisir $\mathscr{D} = \mathbb{R}\mathbf{i}$; on obtient ainsi $\varphi(t) = x(t)$.

– S'il existe $\lim_{t \to b} x(t) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors la droite $\mathscr{A}$ d'équation $x = \alpha$ est asymptote, et $\operatorname{sgn}(x(t) - \alpha)$ fournit le « placement » ;

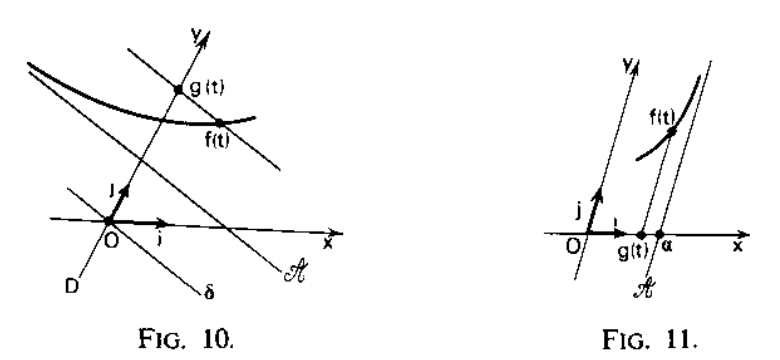


Fig. 10. Fig. 11.

– S'il existe $\lim_{t \to b} x(t) \in \{-\infty, +\infty\}$, il y a branche parabolique ;

– Si $x(t)$ n'a pas de limite dans $\bar{\mathbb{R}}$, il n'y a ni asymptote ni branche parabolique.

Remarques. – *a*) Le cas i) avec $\mu = 0$ est le cas ii), après échange de **i** et de **j**.

b) *Dans le cas* i) *avec* $\mu \neq 0$, $x(t)$ *et* $y(t)$ *ont l'un et l'autre une limite dans* $\{-\infty, +\infty\}$.

En effet, par continuité, $x(t)$ et donc $y(t)$ gardent un signe constant au voisinage de b. D'autre part, au voisinage de b :

$$|y(t)| \leqslant 2|\mu||x(t)|, \qquad \text{et donc} \qquad (2|\mu| + 1)|x(t)| \geqslant |x(t)| + |y(t)|$$

Comme $\lim_{t \to b} (|x(t)| + |y(t)|) = +\infty$, il vient $\lim_{t \to b} |x(t)| = +\infty$.

On raisonne de même pour $|y(t)|$ en changeant μ en $1/\mu$. □

Un cas favorable. – C'est celui de $f : x \longmapsto O + x\mathbf{i} + y(x)\mathbf{j}$, avec $b \in \{-\infty, +\infty\}$, lorsqu'on peut trouver un développement limité à l'ordre 2 de $y(x)/x$, suivant les puissances de $1/x$, à savoir :

$$\frac{y(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + (a_2 + \varepsilon(x)) \frac{1}{x^2}, \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to b} \varepsilon(x) = 0.$$

On dispose alors de l'asymptote d'équation $y = a_0 x + a_1$ et, si $a_2 \neq 0$, on peut même placer le support de l'arc par rapport à l'asymptote (au voisinage de b).

A titre d'exemple le lecteur pourra étudier le cas de $y(x) = e^{-1/x}\dfrac{x^2 - 2x - 1}{x}$ et montrer que, au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), $y(x)$ s'écrit :

$$y(x) = x - 3 + \frac{3}{2x} + \frac{\varepsilon(x)}{x}$$

D'où l'asymptote d'équation $y = x - 3$ et le placement.

Complément : arcs asymptotes d'un plan affine. — *Il s'agit de deux arcs paramétrés de la forme (I, f) et (I, g), l'intervalle I admettant une borne $b \in \bar{I} \backslash I$ telle que :*

$$\lim_{t \to b} \|\overrightarrow{Of(t)}\| = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to b} \|\overrightarrow{g(t)f(t)}\| = 0.$$

On constate que chacun des arcs admet une branche infinie relative à b, et que, si l'étude de l'une des branches a été faite, celle de l'autre en résulte grâce à $\lim_{t \to b} \overrightarrow{g(t)f(t)} = 0$. On peut même, dans des cas favorables, placer l'un des supports par rapport à l'autre.

Supposons, par exemple, que l'on ait à étudier un arc (I, f) admettant au voisinage de la borne $b \in \mathbb{R}$ de I un développement asymptotique de la forme :

$$f(t) = O + \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{(t-b)^i} \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{q} (t-b)^j \mathbf{v}_j + (t - t_0)^q \varepsilon(t)$$

où les vecteurs $\mathbf{u}_i$ et $\mathbf{v}_j$ sont fixes, et où $\lim_{t \to b} \varepsilon(t) = 0$.

On dispose de l'arc asymptote (I, g) avec :

$$g(t) = O + \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{(t-b)^i} \mathbf{u}_i.$$

Dans la pratique, c'est intéressant lorsque le support de (I, g) est inclus dans une droite ou dans une parabole. Le lecteur notera cependant que les arcs $t \longmapsto (t, \operatorname{sh} t)$, $t \longmapsto (t, \operatorname{ch} t)$ et $t \longmapsto (t, e^t/2)$ sont deux à deux asymptotes au voisinage de $+\infty$.

1.3. CONSTRUCTION DU SUPPORT D'UN ARC PLAN

Dans le présent sous-chapitre, $(\mathscr{E}, E)$ désigne un plan affine normé, rapporté à un repère $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$. Conformément à l'usage, les droites $O + \mathbb{R}\mathbf{i}$ et $O + \mathbb{R}\mathbf{j}$ sont notées Ox et Oy et appelées « axe des x » et « axe des y » ; les symétries affines par rapport à O, Ox (de direction $\mathbb{R}\mathbf{j}$), Oy (de direction $\mathbb{R}\mathbf{i}$) sont respectivement notées s_O, s_x, s_y.

1.3.1. Généralités

1° ***Position du problème.*** – On se donne $D \subset \mathbb{R}$, réunion d'intervalles (non réduits à un point) et $f : D \to \mathscr{E}$ définie par $f(t) = O + x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$. On suppose f de classe C^k ($k \geqslant 1$) sur chacun des intervalles constituant D. Il en est donc de même de x et y. On se propose d'effectuer un tracé approximatif, mais aussi fidèle que possible, de $f(D)$. Il s'agit donc de construire une réunion de supports d'arcs paramétrés.

2° ***Intervalle d'étude.*** – On cherche à déterminer un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, d'amplitude aussi petite que possible, tel que la construction de $f(D)$ se déduise aisément de celle de $f(D \cap I)$. On utilise pour cela :

THÉORÈME I. – **On suppose qu'il existe des intervalles** $A \subset \mathbb{N}$ **et** $I \subset \mathbb{R}$, **ainsi que des applications** $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **et** $v : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ **vérifiant :**

i) $D = \bigcup_{n \in A} u^n(D \cap I)$;

ii) $\forall t \in D \quad (u(t) \in D) \wedge (f(u(t)) = v(f(t)))$.

Alors :
$$f(D) = \bigcup_{n \in A} v^n(f(D \cap I)) \qquad \textbf{(1)}$$

THÉORÈME II. – **On suppose qu'il existe des intervalles** $A \subset \mathbb{Z}$ **et** $I \subset \mathbb{R}$, **ainsi que des applications bijectives** $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **et** $v : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ **vérifiant :**

i) $D = \bigcup_{n \in A} u^n(D \cap I)$;

iii) $\forall t \in D \quad (u(t) \in D) \wedge (u^{-1}(t) \in D) \wedge (f(u(t)) = v(f(t)))$.

Alors :
$$f(D) = \bigcup_{n \in A} v^n(f(D \cap I)) \qquad \textbf{(2)}$$

Démonstration des deux théorèmes. – Notons d'abord que iii) implique que, pour tout $t \in D$, on a : $f(u(u^{-1}(t)) = v(f(u^{-1}(t)))$, et donc $f(u^{-1}(t)) = v^{-1}(f(t))$.

– Une récurrence donne (dans les deux cas) :

$$\forall t \in D \quad \forall n \in A \quad f(u^n(t)) = v^n(f(t)).$$

– Soit $m \in f(D)$. Écrivons $m = f(t)$, avec $t \in D$. On peut écrire :

$$t = u^p(\tau), \qquad \text{avec} \qquad p \in A \quad \text{et} \quad \tau \in D \cap I.$$

On en déduit : $m = v^p(f(\tau))$, et donc $m \in \bigcup_{n \in A} v^n(f(D \cap I))$.

– Inversement si $m \in \bigcup_{n \in A} v^n(f(D \cap I))$, alors $m = v^p(f(\tau))$, avec $p \in A$ et $\tau \in D \cap I$, et donc $m = f(u^p(\tau)) \in f(D)$. □

PRATIQUE. — On utilise surtout le théorème II. Pour cela, on commence à rechercher des bijections u et v vérifi·· t iii); dans la plupart des cas, u est :

— soit $t \longmapsto t + T$ ($T \in \mathbb{R}^*$), a··quel cas on peut adopter (indépendamment de v) : $A = \mathbb{Z}$ et $I = [\alpha, \alpha + T]$, où α est arbitrairement choisi ;

— soit $t \longmapsto \omega - t$, auquel cas on peut adopter (indépendamment de v) : $A = \{0, 1\}$ et $I =]-\infty, \omega/2]$ ou $I = [\omega/2, +\infty[$.

La méthode est efficace lorsque les v^n distinctes ($n \in A$) sont en nombre fini (par exemple lorsque v est une symétrie, ou ($\mathscr{E}$ étant euclidien) une rotation de mesure $2\pi/p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$).

Lorsqu'on a à l'appliquer plusieurs fois consécutives, on a intérêt à commencer à utiliser (si possible) $u(t) = t + T$, $T \in \mathbb{R}_+^*$ étant aussi petit que possible ; ce n'est qu'ensuite que l'on fait appel à $u(t) = \omega - t$.

PREMIER EXEMPLE. — $D = \mathbb{R}$; $x(t) = \cos 3t$, $y(t) = \sin 2t$. Ici $f(t + \pi) = s_y(f(t))$. Nous construirons donc la partie du support relative à $t \in [\alpha, \alpha + \pi]$ et nous compléterons par la symétrie s_y.

Pour le moment, nous disposons du choix de α. Mais $f(-t) = s_x(f(t))$ nous conduit à adopter $\alpha = -\pi/2$, à faire le tracé pour $t \in [0, \pi/2]$, (fig. 12), et à compléter par les symétries s_x et s_y, dans cet ordre, (fig. 13). Les points doubles qui apparaissent seront précisés au 5°.

Notons qu'avec cette méthode nous n'aurions rien ajouté en observant que f admet 2π pour période, ou que $f(\pi - t) = s_O(f(t))$ puisqu'il s'agit de conséquences des propriétés utilisées.

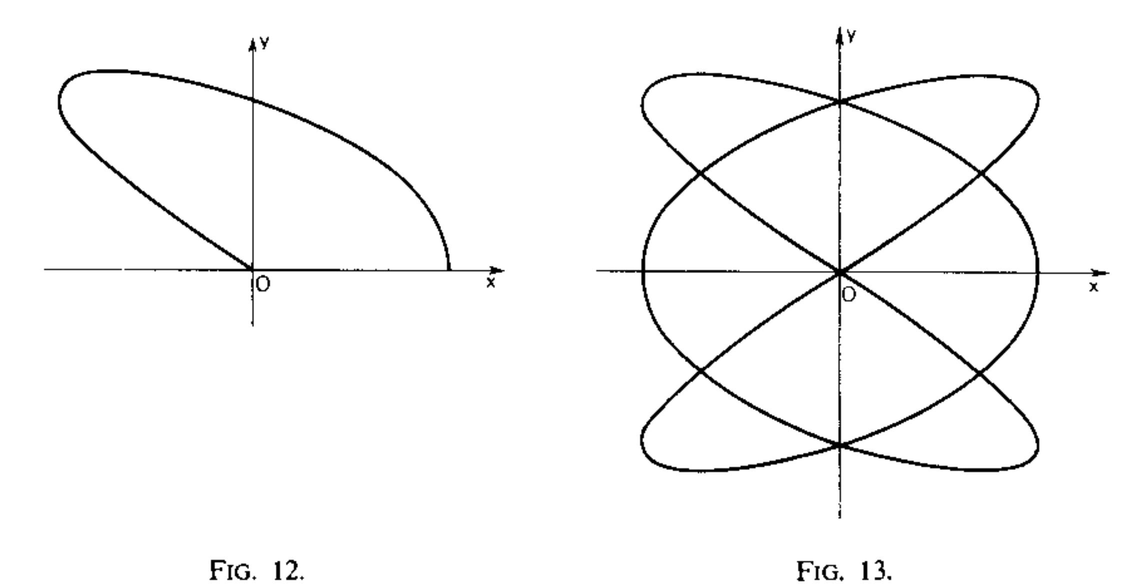


FIG. 12. FIG. 13.

3° ***Ébauche du tracé.*** — L'intervalle d'étude I est supposé déterminé comme ci-dessus. L'étude des variations de $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ et des branches infinies éventuelles permet une première ébauche du support. Celle-ci sera ensuite améliorée par l'étude plus précise de quelques points particuliers (le choix de ces points étant suggéré par la première ébauche) ; en particulier :

4° ***Étude locale au voisinage d'un point.*** — En considérant f comme définie sur un intervalle, on se ramène au cas d'un point $M_0(t_0)$ d'un arc paramétré (I, f). La méthode générale (1.2.3, 2°) consiste à rechercher un développement limité de f au voisinage de t_0 (éventuellement par Taylor-Young).

Voici quelques remarques, qui peuvent être utiles :

a) *Si l'on sait que la tangente en* M_0 *existe,* d'après le théorème II du 1.2.2, 2°, on peut l'obtenir comme $\lim_{t \to t_0, t \neq t_0} \text{Aff}(m_0, f(t))$, ce qui conduit à rechercher $\lim_{t \to t_0, t \neq t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$, dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si, en outre, M_0 est stationnaire ($x'(t_0) = y'(t_0) = 0$), on peut avoir l'occasion d'appliquer la règle de l'Hôpital :

$$\left(\lim_{t \to t_0, t \neq t_0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}\right) \Rightarrow \left(\lim_{t \to t_0, t \neq t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} = \alpha\right).$$

b) S'il existe une tangente en M_0 de direction $\mathbb{R}\mathbf{i}$ ou $\mathbb{R}\mathbf{j}$, l'allure locale du support est fournie directement par l'étude des variations de x et de y. Pour une autre direction de tangente, on peut avoir intérêt à adjoindre à ces variations celle de $\mu : t \longmapsto y'(t)/x'(t)$ (cf. permanence du sens de la concavité, remarque A, *b*) du 1, 2, 3, 2°).

EXEMPLES. — *a*) $D = \mathbb{R}$; $x(t) = 3t^4 - 2t^3$, $y(t) = t^2 - t$.
Le lecteur vérifiera qu'il existe un unique point stationnaire $M_0(t_0 = 1/2)$.

— La *méthode générale* conduit à calculer $f''(1/2) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $f'''(1/2) = 24\mathbf{i}$, et en déduire $(p, q) = (2, 3)$: rebroussement de première espèce avec (au voisinage de t_0), $M_0 + \mathbf{i}$ (resp. $M_0 - \mathbf{i}$) dans la concavité si $t > 1/2$ $\left(\text{resp. } t < \frac{1}{2}\right)$. D'où la figure 14.

— Une autre méthode consiste à déduire la tangente en M_0 de $\mu(t) = 1/(6t^2)$ et $\lim_{t \to 1/2} \mu(t) = 2/3$, à constater que x et y passent par un minimum en t_0 (d'où le rebroussement), et que μ décroît au voisinage de t_0, i.e. que « la tangente tourne dans le sens négatif » (d'où la première espèce et l'allure).

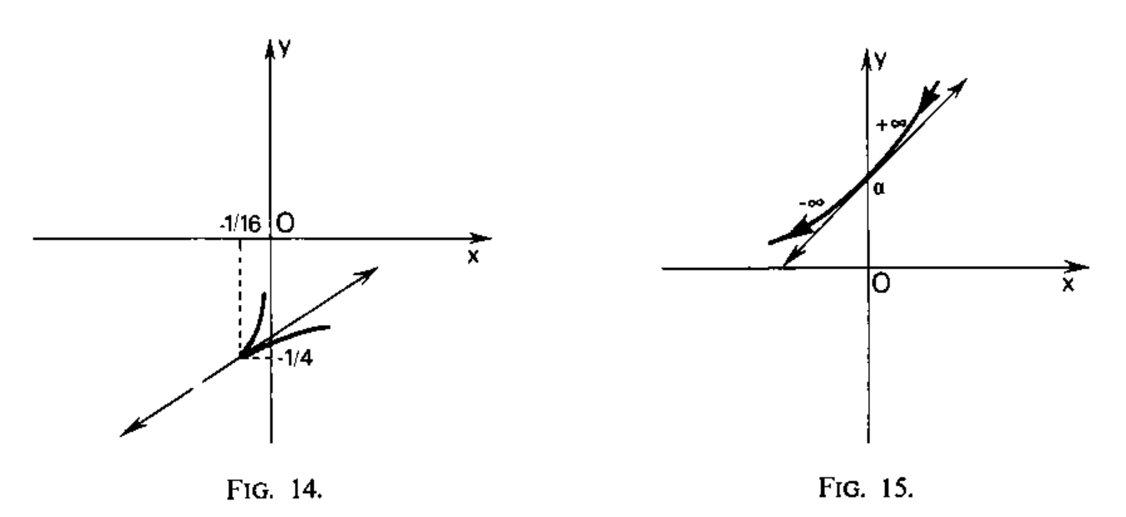


FIG. 14. FIG. 15.

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$; $x(t) = 2t/(t^2 - 1)$, $y(t) = (t + 1)^2/t^2$.

Adjoignons au support le point $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to -\infty} f(t) = O + \mathbf{j}$, noté a. Un développement limité de x et y au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ donne

$$f(t) = a + \frac{2}{t}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + \frac{1}{t^2}\mathbf{j} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

D'où la figure 15.

5° *Points multiples.* – Étant donné un point m du support $\mathcal{S}$ d'un arc paramétré (D,f) nous nous intéressons ici à l'*ordre géométrique* de m relativement à l'arc géométrique représenté par (D,f), et non à la *multiplicité* de m relativement à (D,f) (cf. **1.2.***1*, 5°).

Exemples. – *a)* $D = \mathbb{R}$; $x(t) = \cos 3t$, $y(t) = \sin 2t$ (*suite de l'étude du* 2°). f admettant la période 2π, pour tout point $m = f(t)$ de $\mathcal{S}$, on a $t + 2\pi\mathbb{Z} \subset f^{-1}(\{m\})$, et la *multiplicité* de m est infinie.

On remarque que s'il existe un point d'*ordre géométrique* 2, il est nécessairement image de deux points de l'arc géométrique dont les paramètres appartiennent à $[0, 2\pi[$, ce qui nous conduit à rechercher les (t_1, t_2) vérifiant :

$$(0 \leqslant t_1 < t_2 < 2\pi) \wedge (f(t_1) = f(t_2)) \qquad (1)$$

– Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$[x(t_1) = x(t_2)] \Leftrightarrow \left[\left(t_2 - t_1 \in \frac{2\pi}{3}\mathbb{Z}\right) \vee \left(t_2 + t_1 \in \frac{2\pi}{3}\mathbb{Z}\right)\right]$$

$$[y(t_1) = y(t_2)] \Leftrightarrow \left[(t_2 - t_1 \in \pi\mathbb{Z}) \quad \vee \left(t_2 + t_1 \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)\right]$$

Le lecteur vérifiera aisément que les solutions de (1) sont les 7 couples :

$$\left(\frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}\right) \quad \left(\frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}\right) \quad \left(\frac{\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right) \quad \left(\frac{7\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right)$$
$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right) \quad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \quad \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$$

qui fournissent respectivement les points du support de coordonnées :

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$
$$\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (0, 0) \quad \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Il s'agit bien de points d'ordre 2 pour l'arc géométrique car pour chacun des 7 couples (t_1, t_2) les sous-espaces fondamentaux aux points de paramètres t_1 et t_2 sont distincts (on le vérifie pour les tangentes).

Concrètement, les 3 points doubles appartenant à Oy étaient en évidence dès la première ébauche de la courbe et, pour des raisons de symétrie, on pouvait se contenter de chercher le point double à coordonnées strictement positives, ce qui revenait à remplacer (1) par :

$$(t_1 \in]0, \pi/6[) \wedge (t_2 \in]4\pi/3, 3\pi/2[) \wedge (f(t_1) = f(t_2))$$

qui admet la solution unique $(\pi/12, 17\pi/12)$.

b) $D = \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}$; $x(t) = \dfrac{2t}{t^2 - 1}$, $y(t) = \dfrac{(t+1)^2}{t^2}$ (*suite de l'étude du* **4°** *in fine*).

Recherchons d'abord les points de multiplicité 2 en résolvant :

$$((t_1, t_2) \in D^2) \wedge (t_1 \neq t_2) \wedge \left(\frac{2t_1}{t_1^2 - 1} = \frac{2t_2}{t_2^2 - 1}\right) \wedge \left(\left(\frac{t_1 + 1}{t_1}\right)^2 = \left(\frac{t_2 + 1}{t_2}\right)^2\right) \qquad (2)$$

Compte tenu du caractère bijectif de $t \longmapsto (t+1)/t$, la dernière condition peut être remplacée par $(t_1 + 1)/t_1 = -(t_2 + 1)/t_2$; (2) s'écrit ainsi :

$$((t_1, t_2) \in D^2) \wedge (t_1 \neq t_2) \wedge (t_1 t_2 + 1 = 0) \wedge (t_1 + t_2 + 2t_1 t_2 = 0)$$

Pour (t_1, t_2) solution de (2), t_1 et t_2 vérifient $T^2 - 2T - 1 = 0$, équation qui admet deux racines distinctes, α et β, appartenant à D. Sans utiliser les valeurs $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$ de α et β, on obtient les coordonnées du point $f(\alpha) = f(\beta)$; ce sont :

$$(2\alpha/(\alpha^2 - 1), 1 + (2\alpha + 1)/\alpha^2) = (1, 2)$$

En fait nous avons ici quatre arcs paramétrés $\gamma_i = (I_i, f)$, avec $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 0[$, $I_3 =]0, 1[$, $I_4 =]1, +\infty[$. Comme $\alpha \in I_2$ et $\beta \in I_4$, aucun de ces arcs n'admet de point double ; le point $f(\alpha)$ est seulement l'intersection des supports de γ_2 et de γ_4.

Remarque. — Le point $f(\alpha)$ s'obtient plus rapidement en recherchant (x, y) tel que l'équation à l'inconnue t :

$$(t \in D) \wedge (x = 2t/(t^2 - 1)) \wedge (y = (t + 1)^2/t^2) \tag{3}$$

admette deux solutions distinctes. En effet (3) s'écrit :

$$(t \in D) \wedge (xt^2 - 2t - x = 0) \wedge ((y - 1)t^2 - 2t - 1 = 0)$$

ce qui exige : $x = y - 1$ et $x = 1$, c'est-à-dire $(x, y) = (1, 2)$.

Inversement, si $(x, y) = (1, 2)$, alors (3) a bien deux solutions (réelles) distinctes.

— Cette méthode vaut toutes les fois que x et y sont des fonctions rationnelles : on écrit que deux polynômes ont un P.G.C.D. de degré 2 (au moins) et l'on regarde si celui-ci admet deux racines réelles et distinctes ; c'est commode lorsque, comme ici, l'un des polynômes est de degré 2.

1.3.2. Exemple

Le lecteur est invité à achever la construction des supports rencontrés dans le paragraphe ci-dessus. Donnons un autre exemple.

1° Considérons la partie $\mathscr{C}$ de $\mathscr{E}$ paramétrée par :

$$x = \frac{t^3}{(t-1)(t+2)} \qquad y = \frac{t^2 - 2t}{t - 1}$$

Nous sommes amenés à construire les supports de *trois arcs paramétrés*, selon que $t \in]-\infty, -2[$, $t \in]-2, 1[$ ou $t \in]1, +\infty[$.

— *Variations de x et y.* Le lecteur calculera :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2(t^2 + 2t - 6)}{(t-1)^2(t+2)^2} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{t^2 - 2t + 2}{(t-1)^2}$$

Notons $t_1 < t_2$ les deux racines de $t^2 + 2t - 6 = 0$:

$$t_1 = -1 - \sqrt{7} \simeq -3{,}6458 \qquad t_2 = -1 + \sqrt{7} \simeq 1{,}6458.$$

Nous en déduisons aisément les variations de x et y :

t	$-\infty$ t_1 -2	0	1 t_2 $+\infty$
dx/dt	$+$ 0 $-$	$-$ 0 $-$	$-$ 0 $+$
x	$-\infty$ ↗ $x(t_1)$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $x(t_2)$ ↗ $+\infty$
y	$-\infty$ ↗ $y(t_1)$ ↗ $-\frac{8}{3}$	$-\frac{8}{3}$ ↗ 0 ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ $y(t_2)$ ↗ $+\infty$
dy/dt	$+$ $+$	$+$ $+$	$+$ $+$

REMARQUES. — *a*) Pour un calcul exact de $x(t_i)$ et $y(t_i)$ ($i \in \{1, 2\}$), il peut être intéressant de remplacer les polynômes intervenant dans l'expression de x ou y par leur reste dans la division par $t^2 + 2t - 6$. Le lecteur vérifiera :

$$x(t_1) = -\frac{20 + 14\sqrt{7}}{9} \simeq -6{,}34\,; \qquad x(t_2) = -\frac{20 - 14\sqrt{7}}{9} \simeq 1{,}89$$

$$y(t_1) = -\frac{8 + 2\sqrt{7}}{3} \simeq -4{,}43\,; \qquad y(t_2) = -\frac{8 - 2\sqrt{7}}{3} \simeq -0{,}90$$

b) Il est utile de noter que pour $t = 2$: $x(t) = 2$, $y(t) = 0$.

— *Branches infinies.* Au voisinage de $t = -2$, il y a (pour deux des arcs étudiés) une asymptote d'équation $y = -\frac{8}{3}$. L'étude des variations permet d'étudier la position des arcs par rapport à cette droite. On pourrait améliorer en étudiant l'équation $y(t) = -\frac{8}{3}$ $\left(\text{on trouve } t' = \frac{4}{3}\right.$ et $\left. x(t') \simeq 2{,}13\right)$.

• Au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), nous constatons : $x(t) \sim t$ et $y(t) \sim t$. Calculons donc : $y(t) - x(t) = \frac{-4t}{(t-1)(t+2)}$. Ainsi la droite d'équation $y - x = 0$ est asymptote. La position du support se déduit du signe de $-4t/(t-1)(t+2)$. Notons que $O(t = 0)$ appartient à l'asymptote.

• Au voisinage de $t = 1$, il vient : $x(t) \sim \frac{1/3}{t-1}$, $y(t) \sim \frac{-1}{t-1}$ et $y(t) + 3x(t) = \frac{4t(t+1)}{t+2}$, d'où l'asymptote d'équation $y + 3x - 8/3 = 0$. D'autre part

$$y(t) + 3x(t) - 8/3 = \frac{4(3t+4)}{3(t+2)}(t-1) \sim \frac{28}{9}(t-1),$$

d'où la position par rapport à l'asymptote.

Notons que le point de paramètre $t'' = -\frac{4}{3}$ est sur l'asymptote. Le lecteur constatera :

$$x(t'') \simeq 1{,}52 \qquad y(t'') \simeq -1{,}90.$$

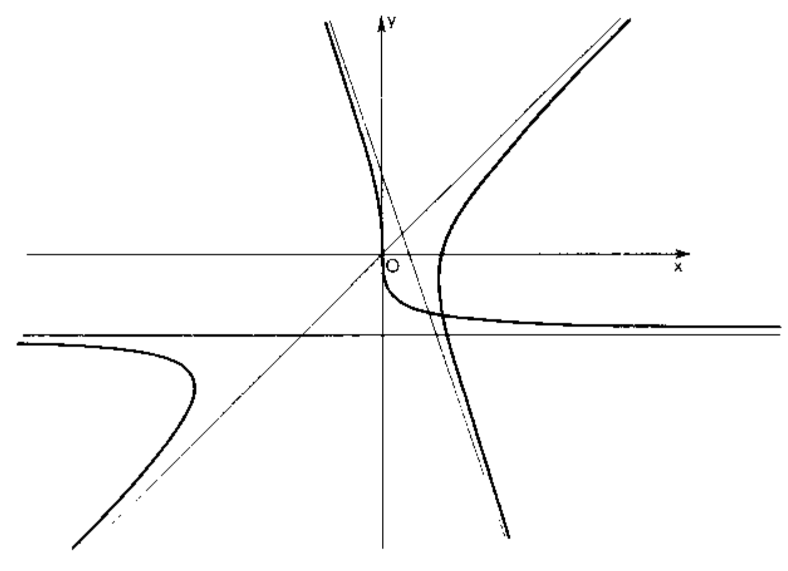


FIG. 16.

Point double [1]. — Écrivons que les deux équations algébriques :

$$t^3 - x(t^2 + t - 2) = 0 \quad (1) \qquad \text{et} \qquad t^2 - 2t - y(t - 1) = 0 \quad (2)$$

ont en commun deux racines réelles. Effectuons pour cela la division euclidienne du premier polynôme par le second, et écrivons que le reste est nul. Il vient :

$$(y^2 - xy + 3y - 3x + 4 = 0) \wedge (y^2 - xy + 2y - 2x = 0)$$

en soustrayant membre à membre, le lecteur trouvera : $x = 2$, $y = -2$, et vérifiera que, pour ces valeurs, l'équation (2) admet bien deux racines réelles distinctes différentes de -2 et 1.

Remarque. — Le lecteur vérifiera qu'en résolvant :

$$(t' \neq t'') \wedge (x(t') = x(t'')) \wedge (y(t') = y(t''))$$

il aboutit à :

$$\begin{cases} t'^2t''^2 + t't''(t' + t'') - 2((t' + t'')^2 - t't'') = 0 \\ t't'' - (t' + t'') + 2 = 0 \end{cases}$$

qui conduit à :

$$t' + t'' = 0, \qquad t't'' = -2, \qquad \text{soit} \qquad t' = \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad t'' = -\sqrt{2}$$

2° ***Complément***. — Considérons la droite $\mathscr{D}$ d'équation $ux + vy + w = 0$ $((u, v) \neq (0, 0))$ et étudions son intersection avec la « courbe » $\mathscr{C}$ étudiée au 1°. L'« équation aux t » des points d'intersection est

$$(u + v)t^3 + wt^2 + (w - 4v)t - 2w = 0 \qquad (3)$$

Si $u + v \neq 0$ (i.e. si $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle à la direction asymptotique correspondant aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$) l'équation est du troisième degré. Notons (t_1, t_2, t_3) un *système* de racines (distinctes ou confondues) et, selon l'usage :

$$\sigma_1 = t_1 + t_2 + t_3 \qquad \sigma_2 = t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 \qquad \sigma_3 = t_1t_2t_3$$

Nous avons donc :

$$\sigma_1 = -w/(u + v), \qquad \sigma_2 = (w - 4v)/(u + v), \qquad \sigma_3 = 2w/(u + v) \qquad (4)$$

— Inversement soient t_1, t_2, t_3 des réels distincts de -2 et de 1, et m_1, m_2, m_3 les images des points correspondants.

Nous cherchons une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une droite $\mathscr{D}$ telle que l'équation (3) admette (t_1, t_2, t_3) comme *système* de racine.

La condition est qu'il existe $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant (4), soit encore qu'il existe $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$ vérifiant :

$$(u + v)\sigma_1 + w = 0, \qquad (u + v)\sigma_2 - w + 4v = 0, \qquad (u + v)\sigma_3 - 2w = 0 \qquad (5)$$

(en effet si une solution de (5) vérifie $u + v = 0$, alors $w = -w + 4v = w = 0$, et donc $u = v = w = 0$).

La condition cherchée s'obtient donc en annulant le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_1 & 1 \\ \sigma_2 & \sigma_2 + 4 & -1 \\ \sigma_3 & \sigma_3 & -2 \end{vmatrix}$$

soit :

$$2\sigma_1 + \sigma_3 = 0 \qquad (6)$$

[1] Avec les réserves déjà faites au **1.3.*1*.5°**.

Applications. — *a*) Lorsque t_1, t_2, t_3 sont deux à deux distincts, la condition (6) exprime simplement que m_1, m_2 et m_3 sont alignés.

Écrivons que, pour $t_1 \neq t_2$ donnés, (6) est vérifiée pour tout $t_3 \in \mathbb{R}$. $\mathscr{C}$ n'étant pas inclus dans une droite il en résultera $m_1 = m_2$, ce qui redonnera le point double.

(6) s'écrit : $2(t_1 + t_2) + (2 + t_1 t_2)t_3 = 0.$ D'où $t_1 + t_2 = 0,\ t_1 t_2 = -2$

On retrouve bien le point double.

b) Supposons $t_1 = t_2$. (6) exprime qu'il existe une droite $\mathscr{D}$ recoupant $\mathscr{C}$ en $m_1 = m_2$ (racine au moins double) et en m_3. D'après la remarque du 1.2.*2*, théorème II, les arcs ne présentant pas de point stationnaire, cela signifie ici que $\mathscr{D}$ est tangente en $m_1 = m_2$.

Notons $t = t_1 = t_2$. (6) devient : $(t^2 + 2)t_3 + 4t = 0$.

Nous en déduisons que la tangente en $m(t)$ recoupe $\mathscr{C}$ en le point de paramètre $t_3 = -4t/(t^2 + 2)$, appelé *tangentiel* du point $m(t)$.

Le lecteur vérifiera en exercice que les tangentiels de trois points alignés sont alignés [1].

c) Enfin par un raisonnement analogue, en supposant $t_1 = t_2 = t_3$, nous trouverons les points d'inflexions. Ici cela donne : $t^3 + 6t = 0$, soit $t = 0$ unique racine *réelle*. D'où le point O, évident sur la figure.

Remarques. — *a*) Cette étude se généralise à toute *cubique* paramétrée par :

$$x = \frac{P(t)}{R(t)} \qquad y = \frac{Q(t)}{R(t)}$$

où P, Q, R sont des polynômes de degré au plus 3, dont l'un au moins est de degré 3.

On démontre ainsi que si cette « courbe » admet trois points d'inflexions (*réels*) ils sont alignés.

b) En résolvant (5) on en déduit l'équation de la droite $\mathscr{D}$ en fonction de σ_1, σ_2, σ_3 (lorsque (6) est vérifiée).

Ainsi en utilisant le tangentiel ($t_3 = -4t/(t^2 + 2)$) le lecteur écrira l'équation de la tangente au point $m(t)$.

1.4. ÉTUDE D'UN ARC PARAMÉTRÉ EN COORDONNÉES POLAIRES

*Dans ce sous-chapitre, ($\mathscr{E}$, E) désigne un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormal direct (O ; **i**, **j**).*

1.4.*1*. Résultats préliminaires

1° ***Rappel de notations.*** — Nous reprenons les notations :

$$\forall\theta \in \mathbb{R} \qquad \mathbf{u}_\theta = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{v}_\theta = \mathbf{u}_{\theta+\pi/2}.$$

---

[1] En prenant $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{4}{3}$, $t_3 = -\frac{4}{3}$ (points où les asymptotes recoupent $\mathscr{C}$) on constate que (6) est vérifiée et donc que ces points sont alignés. Cette propriété est à rapprocher de celle des tangentiels (elle s'en déduirait en géométrie projective), et est vraie pour toute cubique (cf. remarque).

Le repère orthonormal direct $(O; \mathbf{u}_\theta, \mathbf{v}_\theta)$ est dit *repère mobile*.

Le point de coordonnées polaires (ρ, θ) est le point $m = O + \rho\mathbf{u}_\theta$. Ses coordonnées cartésiennes sont $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$; on a $x + iy = \rho\, e^{i\theta}$. Inversement tout point $m \in \mathscr{E}$ admet une infinité de systèmes de coordonnées polaires (cf. II.6.3.*1*, 1°). Nous constatons que $\theta \longmapsto \mathbf{u}_\theta$ et $\theta \longmapsto \mathbf{v}_\theta$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\mathbf{u}_\theta) = \mathbf{v}_\theta \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\mathbf{v}_\theta) = -\,\mathbf{u}_\theta.$$

2° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soit f une application de classe C^k ($k \geqslant 0$) d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant : $\forall t \in I \quad |f(t)| = 1$.**

Alors il existe des applications continues $\theta : I \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in I \qquad e^{i\theta(t)} = f(t)$$

On les appelle *relèvements* de f. Si θ_1 et θ_2 sont deux d'entre elles, alors il existe $h \in \mathbb{Z}$ tel que : $\forall t \in I \quad \theta_2(t) - \theta_1(t) = 2h\pi$. Ces relèvements sont de classe C^k.

— Vérifions d'abord le dernier point. S'il existe deux relèvements θ_1 et θ_2, alors : $e^{i(\theta_2(t) - \theta_1(t))} = 1$ pour tout $t \in I$, et donc (IV.3.3.*1*) $\theta_2 - \theta_1$ prend ses valeurs dans $2\pi\mathbb{Z}$. Or $\theta_2 - \theta_1$ est continue, I connexe et $2\pi\mathbb{Z}$ discret; on en déduit que $\theta_2 - \theta_1$ est constante, de la forme $t \longmapsto 2h\pi$. □

Notons qu'inversement si θ_1 est un relèvement, alors, pour tout $h \in \mathbb{Z}$, $t \longmapsto \theta_1(t) + 2h\pi$ est aussi un relèvement.

— Venons-en à la preuve de l'existence d'un relèvement.

Preuve dans le cas $k \geqslant 1$. — Puisque f ne prend pas la valeur 0, nous disposons de $f'/f : I \to \mathbb{C}$ de classe C^{k-1}, et donc continue. Nous disposons donc de $\varphi : I \to \mathbb{C}$ définie, pour $t_0 \in I$ arbitrairement fixé, par :

$$\forall t \in I \qquad \varphi(t) = \frac{1}{i}\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)}\,\mathrm{d}u.$$

φ est de classe C^k, et on a : $\varphi'(t) = -\,i f'(t)/f(t)$. Il en résulte que $t \longmapsto f(t)e^{-i\varphi(t)}$ est de dérivée nulle sur I, et donc constante.

De $\varphi(t_0) = 0$ nous déduisons alors : $\forall t \in I \quad f(t) = f(t_0)e^{i\varphi(t)}$.

Comme $|f(t_0)| = 1$, nous pouvons poser : $f(t_0) = e^{i\theta_0}$, avec $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

D'où : $\qquad f(t) = e^{i\theta(t)}, \qquad$ avec $\qquad \theta(t) = \varphi(t) + \theta_0$.

$\theta : I \to \mathbb{C}$ est ainsi de classe C^k; mais, comme $|f(t)| = 1$, θ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. □

La suite de la démonstration, plus délicate, peut être réservée à une seconde lecture.

Preuve dans le cas $k = 0$ et $I = [a, b]$. Introduisons $A_+ = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ et $A_- = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ qui sont des ouverts de $\mathbb{C}$ de réunion $\mathbb{C}^*$, et notons ψ l'application $z \longmapsto e^{iz}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$. Le lecteur vérifiera :

$$\psi^{-1}(A_+) = \bigcup_{h \in \mathbb{Z}} \Omega_h^+, \qquad \text{avec} \qquad \Omega_h^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathscr{R}e(z) \in](2h-1)\pi, (2h+1)\pi[\}$$

$$\psi^{-1}(A_-) = \bigcup_{h \in \mathbb{Z}} \Omega_h^-, \qquad \text{avec} \qquad \Omega_h^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathscr{R}e(z) \in]2h\pi, (2h+2)\pi[\}.$$

D'après III.8.5.5, 3°, pour tout $h \in \mathbb{Z}$, ψ induit un homéomorphisme de Ω_h^+ (resp. Ω_h^-) sur A_+ (resp. A_-), qui est noté ψ_h^+ (resp. ψ_h^-).

— Soit alors $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, continue, vérifiant : $\forall t \in [a, b] \quad |f(t)| = 1$. Désignons par E l'ensemble des $x \in [a, b]$ tels que la restriction de f à $[a, x]$ admette des relèvements (continus). De $a \in E$, nous déduisons $E \neq \varnothing$; d'où l'existence de $c = \sup E$, avec $c \in [a, b]$. Il s'agit de montrer : $c \in E$ et $c = b$.

— D'après $f(c) \neq 0$, nous avons, par exemple $f(c) \in A_+$ (la démonstration serait analogue pour $f(c) \in A_-$) ; A_+ étant ouvert et f continue, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $f(]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\cap [a, b]) \subset A_+$.

— Choisissons arbitrairement $\xi \in]c - \varepsilon, c] \cap E$, ce qui est possible d'après $c = \sup E$, et soit θ un relèvement de la restriction de f à $[a, \xi]$; nous avons $e^{i\theta(\xi)} = f(\xi) \in A_+$, et il existe un unique $h \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta(\xi) \in \Omega_h^+$.

— Choisissons maintenant un élément quelconque ξ_1 de l'ensemble non vide $[c, c + \varepsilon[\cap [a, b]$.

Nous avons $\xi \leqslant \xi_1$ et $f(t) \in A_+$ pour tout $t \in [\xi, \xi_1]$; h étant l'entier déterminé ci-dessus, posons : $\theta_1(t) = (\psi_h^+)^{-1}(f(t))$, ce qui entraîne $e^{i\theta_1(t)} = f(t)$ et donc $\theta_1(t) \in \mathbb{R}$; on détermine ainsi une application $\theta_1 : [\xi, \xi_1] \to \mathbb{R}$, qui est continue ; on constate $\theta(\xi) = \theta_1(\xi)$.

— Il en résulte que l'application $\hat{\theta}$ de $[a, \xi_1]$ dans $\mathbb{R}$ dont les restrictions à $[a, \xi]$ et à $[\xi, \xi_1]$ sont respectivement θ et θ_1 est continue, et qu'elle vérifie :

$$\forall t \in [a, \xi_1] \qquad e^{i\hat{\theta}(t)} = f(t).$$

Nous avons ainsi : $\xi_1 \in E$. En particulier (grâce à un bon choix de ξ_1) : $c \in E$.

Par ailleurs, si on avait $c < b$, il existerait $\xi_1 \in E$ tel que $c < \xi_1$, en contradiction avec $c = \sup E$; d'où $c = b$. □

Preuve dans le cas $k = 0$ et I quelconque. — Nous pouvons choisir d'abord $t_0 \in I$, puis $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\theta_0} = f(t_0)$.

Pour tout $(a, b) \in I^2$ vérifiant $a \leqslant t_0 \leqslant b$, il existe des relèvements (continus) de la restriction de f à $[a, b]$ et on constate que, parmi eux, il en est un et un seul, $\theta_{a,b}$, tel que $\exp(i\theta_{a,b}(t_0)) = \exp(i\theta_0)$.

On en déduit aisément qu'il existe une unique application $\theta : I \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(a, b) \in I^2$ vérifiant $a \leqslant t_0 \leqslant b$, $\theta_{a,b}$ soit la restriction de θ à $[a, b]$; θ est continue (tout point de I admet un voisinage de la forme $[a, b]$ pour la topologie induite), et : $\forall t \in I \quad e^{i\theta(t)} = f(t)$. □

REMARQUE. — Si f est de classe C^k, pour toute application *continue* θ telle que $\forall t \in I \quad e^{i\theta(t)} = f(t)$, θ est de classe C^k.

3° COROLLAIRE. — **Soit (I, f) un C^k-arc paramétré de $\mathscr{E}$ ($k \geqslant 0$) dont le support ne contient pas O. Alors il existe des couples (ρ, θ) d'applications de classe C^k de I dans $\mathbb{R}$, vérifiant :**

$$\forall t \in I \qquad f(t) = O + \rho(t)\mathbf{u}_{\theta(t)}$$

A tout $t \in I$ associons le réel non nul $\rho(t) = \|\overrightarrow{Of(t)}\|$. Comme $\|.\|$ est de classe C^∞ sur $E \backslash \{0\}$, l'application $\rho : I \to \mathbb{R}$ ainsi définie est de classe C^k. Notons :

$$\forall t \in I \qquad \frac{1}{\rho(t)} \overrightarrow{Of(t)} = \xi(t)\mathbf{i} + \eta(t)\mathbf{j}$$

Nous disposons ainsi de l'application $g : t \longmapsto \xi(t) + i\eta(t)$ de I dans $\mathbb{C}$, qui est de classe C^k et vérifie : $\forall t \in I \quad |g(t)| = 1$; g admet donc des relèvements ; sur θ l'un d'eux ; il est de classe C^k et, pour tout $t \in I$, nous avons : $\exp(i\theta(t)) = g(t)$, et donc $\mathbf{u}_{\theta(t)} = \dfrac{1}{\rho(t)} \overrightarrow{Of(t)}$. □

1.4.2. Étude locale

Dans ce qui suit, nous nous donnons un arc paramétré (I, f) de classe C^k ($k \geqslant 1$) par :

$$\forall t \in I \qquad f(t) = O + \rho(t)\mathbf{u}_{\theta(t)} \tag{1}$$

où $t \longmapsto (\rho(t), \theta(t))$ est de classe C^k.

D'après le **1.4.1**, 3°, tout arc de classe C^k dont le support ne contient pas O, est susceptible d'une telle représentation. Mais inversement, l'étude qui suit ne suppose pas forcément cette hypothèse réalisée.

Pour l'essentiel, la théorie est celle faite au **1.2.3**, à laquelle on pourra toujours se reporter. Nous nous intéressons surtout ici au caractère pratique de l'étude.

— Par dérivation de (1), nous avons :

$$\forall t \in I \qquad f'(t) = \rho'(t)\mathbf{u}_{\theta(t)} + \rho(t)\theta'(t)\mathbf{v}_{\theta(t)} \tag{2}$$

1° ***Tangentes***. — *a*) Soit $M(t)$ un *point régulier* de (I, f), ce qui signifie $f'(t) \neq 0$, ou, d'après (2) : $(\rho'(t), \rho(t)\theta'(t)) \neq (0, 0)$. L'arc admet en M une tangente $\mathscr{T}$.

— Si $\rho'(t) = 0$ (et donc $\rho(t)\theta'(t) \neq 0$), $\mathscr{T}$ est dirigée par $\mathbf{v}_{\theta(t)}$;

— Si $\rho'(t) \neq 0$, la mesure V (modulo π) de l'angle orienté de droites $\widehat{\mathbb{R}\mathbf{u}_{\theta(t)}, \mathscr{T}}$ est donnée par : $\operatorname{tg} V = \dfrac{\rho(t)\theta'(t)}{\rho'(t)}$.

b) En un *point stationnaire*, on étudie les vecteurs dérivés d'ordre supérieur à un, conformément à la théorie générale.

c) ***Cas particulier où le support contient O***. — Soit $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = O$, i.e. $\rho(t_0) = 0$. Posons $\theta(t_0) = \theta_0$ et faisons l'hypothèse (réalisée en pratique) que pour t suffisamment voisin de t_0, on ait : $(t \neq t_0) \Rightarrow (\rho(t) \neq 0)$.

Alors la droite affine $\mathscr{D}_t = \operatorname{Aff}(O, f(t))$ admet pour limite $O + \mathbb{R}\mathbf{u}_{\theta_0}$ lorsque $t \neq t_0$ tend vers t_0.

Il en résulte que *si l'arc paramétré admet une tangente en $M_0(t_0)$* (resp. *si le support admet une tangente en O*), *il s'agit de la droite affine $O + \mathbb{R}\mathbf{u}_{\theta_0}$* (cf. **1.2.2**, 2°).

Ce résultat, que l'on peut retrouver par *a*) lorsque $f'(t_0) \neq 0$, est valable également en un point stationnaire.

2° ***Branches infinies***. — *a*) L'arc paramétré (I, f) présente une branche infinie relative à $t_0 \in \bar{I} \backslash I$ si et seulement si : $\lim\limits_{t \to t_0} |\rho(t)| = +\infty$ (ce qui équivaut, grâce à la continuité de ρ, à $\lim\limits_{t \to t_0} \rho(t) \in \{-\infty, +\infty\}$).

b) Lorsque cette hypothèse est réalisée, l'arc présente une direction asymptotique si et seulement si $\theta(t)$ admet une limite $\theta_0 \in \mathbb{R}$ lorsque t tend vers t_0, la direction asymptotique étant alors $\mathbb{R}\mathbf{u}_{\theta_0}$ (cf. **1**.1.2, 5°, théorème II).

c) ***Recherche d'une asymptote.*** — Nous supposons que simultanément :

$$\lim_{t \to t_0} |\rho(t)| = +\infty, \qquad \lim_{t \to t_0} \theta(t) = \theta_0 \quad (\theta_0 \in \mathbb{R}).$$

Dans le repère $(O\,;\, \mathbf{u}_{\theta_0}, \mathbf{v}_{\theta_0})$, le point $f(t)$ a pour coordonnées

$$X(t) = \rho(t)\cos(\theta(t) - \theta_0) \qquad \text{et} \qquad Y(t) = \rho(t)\sin(\theta(t) - \theta_0),$$

et on constate : $\lim_{t \to t_0} |X(t)| = +\infty$. Il en résulte :

— Si $\lim_{t \to t_0} Y(t) = Y_0$ $(Y_0 \in \mathbb{R})$, l'arc admet pour asymptote la droite d'équation $Y - Y_0 = 0$ dans le repère $(O\,;\, \mathbf{u}_{\theta_0}, \mathbf{v}_{\theta_0})$. La position de l'arc par rapport à son asymptote résulte de l'étude du signe de $Y(t) - Y_0$.

— Si $\lim_{t \to t_0} Y(t) \in \{-\infty, +\infty\}$, il y a branche parabolique de direction $\mathbb{R}\mathbf{u}_{\theta_0}$.

— Dans tous les autres cas, il n'y a ni asymptote, ni branche parabolique.

3° *Spirales et cercles asymptotes.*

a) Lorsque $\lim_{t \to t_0} |\rho(t)| = +\infty$ et $\lim_{t \to t_0} \theta(t) \in \{-\infty, +\infty\}$, il y a branche infinie mais pas de direction asymptotique. L'arc présente une allure de spirale.

EXEMPLES. — $I = \mathbb{R}$, $\theta(t) = t$, $\rho(t) = at$ (spirale d'Archimède) (fig. 17)
$I = \mathbb{R}$, $\theta(t) = t$, $\rho(t) = ae^{mt}$, $m \neq 0$ (spirale logarithmique) (fig. 18).

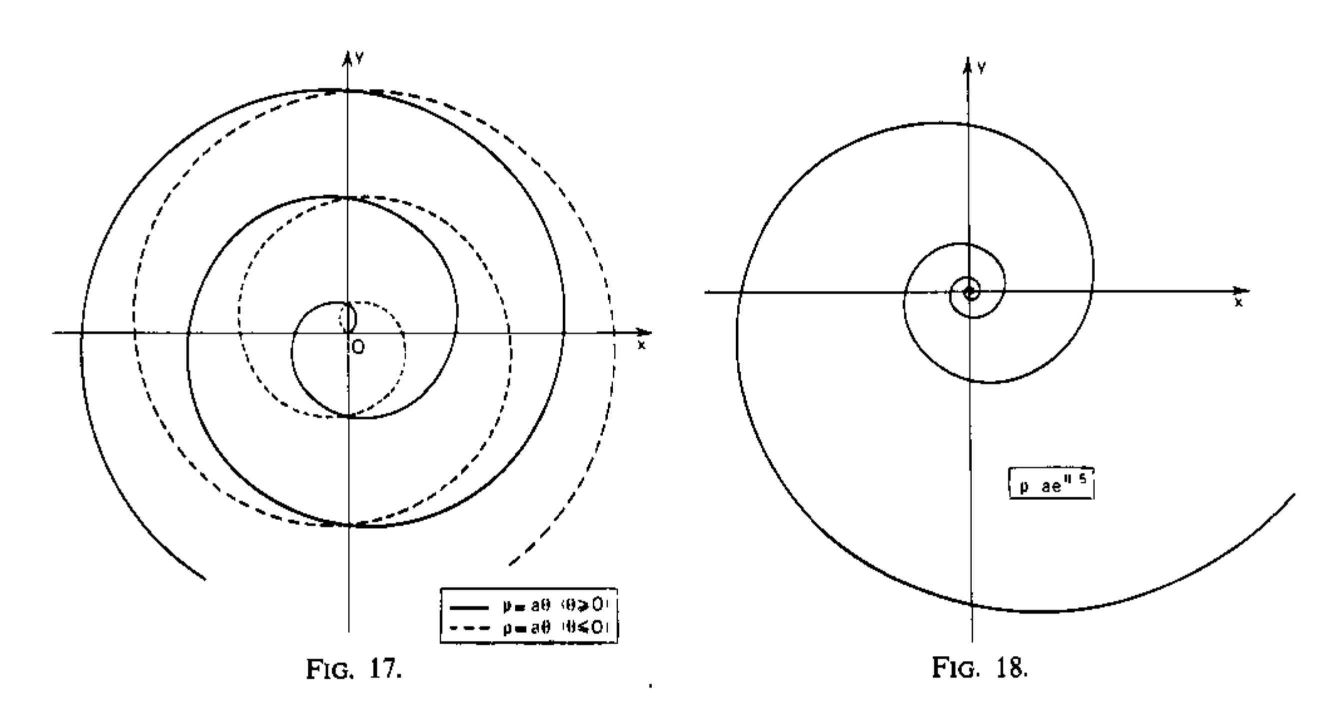


FIG. 17. FIG. 18.

b) Lorsque $\lim_{t\to t_0} \rho(t) = \rho_0$ et $\lim_{t\to t_0} \theta(t) \in \{-\infty, +\infty\}$, l'arc ne présente pas de branche infinie, mais on parle de « cercle asymptote » de centre O et de rayon $|\rho_0|$.

EXEMPLE. — $I = \mathbb{R}^*$, $\theta(t) = t$, $\rho(t) = 1 + 1/t$ (fig. 19).

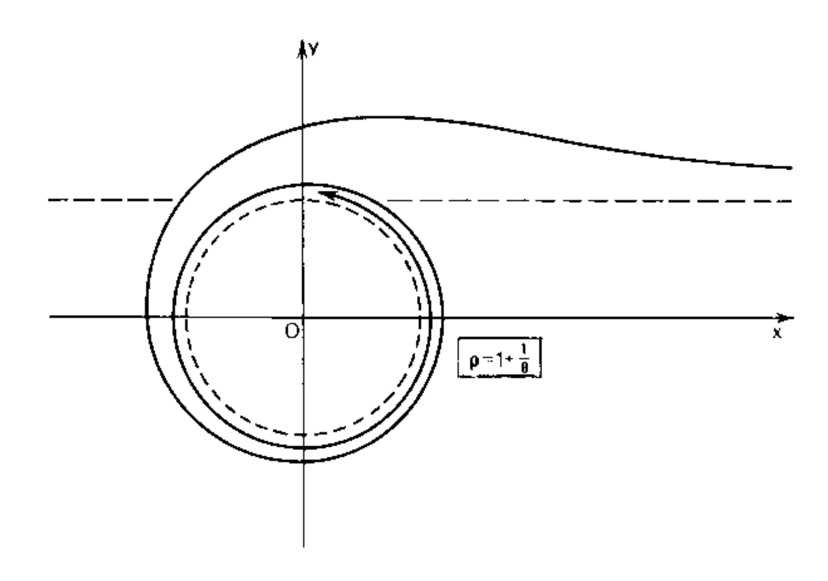


FIG. 19.

4° ***Cas particulier*** $\theta(t) = t$. — Ici l'arc paramétré (I, f) est défini par :

$$\forall \theta \in I \qquad f(\theta) = O + \rho(\theta)\mathbf{u}_\theta$$

où $\rho : I \to \mathbb{R}$ est de classe $C^k (k \geqslant 2)$. On a par dérivations :

$$f'(\theta) = \rho'(\theta)\mathbf{u}_\theta + \rho(\theta)\mathbf{v}_\theta ; \quad f''(\theta) = (\rho''(\theta) - \rho(\theta))\mathbf{u}_\theta + 2\rho'(\theta)\mathbf{v}_\theta$$

et le déterminant du système $(f'(\theta), f''(\theta))$ dans la base $(\mathbf{u}_\theta, \mathbf{v}_\theta)$ s'écrit :

$$\begin{vmatrix} \rho'(\theta) & \rho''(\theta) - \rho(\theta) \\ \rho(\theta) & 2\rho'(\theta) \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad (\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')(\theta). \qquad (3)$$

D'où les résultats suivants :

a) $M(\theta)$ est *régulier* si, et seulement si $(\rho(\theta), \rho'(\theta)) \neq (0, 0)$. En un tel point la mesure V de l'angle de droites $\widehat{\mathbb{R}\mathbf{u}_\theta, \mathcal{T}}$ est donnée par l'une des formules :

$$\operatorname{tg} V = \rho(\theta)/\rho'(\theta) \text{ ou } \operatorname{cotg} V = \rho'(\theta)/\rho(\theta)$$

REMARQUE. — La normale, dirigée par le vecteur $-\rho(\theta)\mathbf{u}_\theta + \rho'(\theta)\mathbf{v}_\theta$, passe par le point : $O + \rho'(\theta)\mathbf{v}_\theta$ (« pied de la sous-normale »).

Si $\rho'(\theta) \neq 0$, la tangente, dirigée par le vecteur $-\rho(\theta)\mathbf{u}_\theta - \rho^2(\theta)/\rho'(\theta).\mathbf{v}_\theta$, passe par le point : $O + 1/g'(\theta).\mathbf{v}_\theta$, où g désigne $1/\rho$ (« pied de la sous-tangente »).

b) $M(\theta)$ est *bi-régulier* si et seulement si $(f'(\theta), f''(\theta))$ est libre ce qui s'écrit

$$(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')(\theta) \neq 0$$

Soit $M(\theta)$ un point birégulier d'image m distincte de $O(\rho(\theta) \neq 0)$; on constate (par cotg V) que $O \notin \mathscr{T}$. La concavité de l'arc en M contient O si et seulement si les bases $(f'(\theta), f''(\theta)$ et $(f'(\theta), \overrightarrow{mO})$ de E sont de même sens ce qui s'écrit, en utilisant (3) :

$$(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')(\theta) > 0$$

c) Une condition *nécessaire*, non *suffisante* pour que $M(\theta)$ soit point d'inflexion est :

$$(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')(\theta) = 0$$

REMARQUE. — Pour tout $\theta \in I$ tel que $\rho(\theta) \neq 0$, on constate :

$$\operatorname{sgn}(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')(\theta) = \operatorname{sgn}(\omega(\omega + \omega''))(\theta), \qquad \text{où} \qquad \omega = 1/\rho$$

d) Un *point stationnaire* $(\rho(\theta) = \rho'(\theta) = 0)$ a nécessairement pour image O et s'étudie comme au 1° *c*).

1.4.3. Construction du support

La théorie générale du **1.3** s'applique. Nous exposerons sur des exemples les particularités propres aux coordonnées polaires. L'une d'elles est que, s'il est nécessaire de discuter sgn ρ, dans un tracé approximatif on peut parfois se passer de l'étude des variations de ρ.

Dans le cas d'un arc $(\mathbb{R}, f)$ avec $f(\theta) = O + \rho(\theta)\mathbf{u}_\theta$, où f admet une période $2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, le lecteur s'inspirera de l'exemple II ci-dessous.

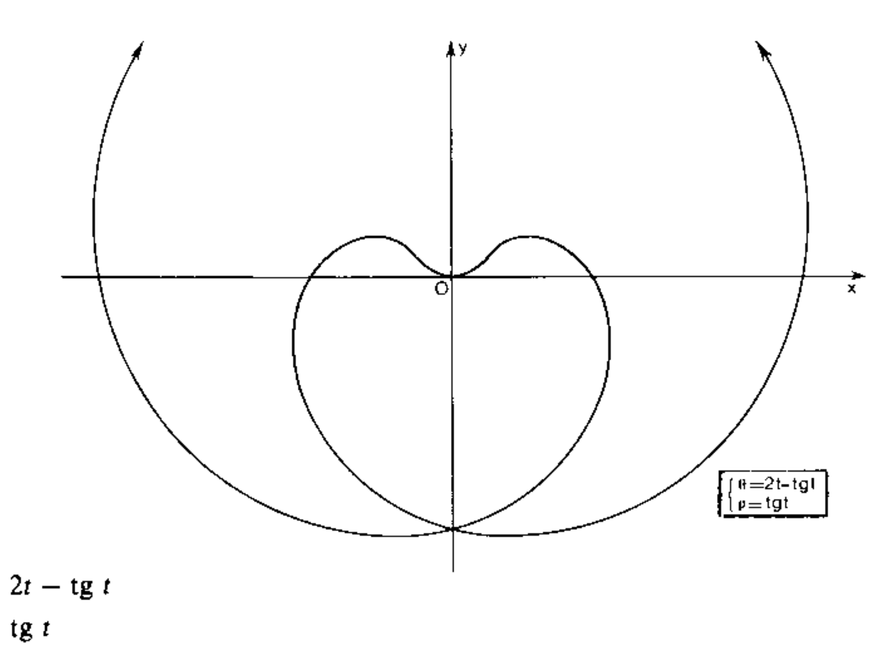
EXEMPLE I. — $\theta(t) = 2t - \operatorname{tg} t$, $\rho(t) = \operatorname{tg} t$.

Définie sur $\mathbb{R}\backslash(\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$, f admet la période π. Il s'agit donc de construire le support de l'arc paramétré $(]-\pi/2, \pi/2[, f)$.

De $\rho(-t) = -\rho(t)$ et $\theta(-t) = -\theta(t)$ on déduit $f(-t) = s_y(f(t))$. Nous tracerons la partie du support relative à $t \in [0, \pi/2[$ et nous compléterons par s_y.

En utilisant $\theta'(t) = 1 - \text{tg}^2\, t$, nous avons (sans qu'il soit nécessaire d'utiliser $\rho'(t)$) :

t	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$\theta'(t)$		$+$	0	$-$	
$\theta(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2} - 1$	$\searrow$	$-\infty$
$\rho(t)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



$$\begin{cases} \theta = 2t - \text{tg}\, t \\ \rho = \text{tg}\, t \end{cases}$$

FIG. 20.

On notera que ρ ne prend que des valeurs positives (dans l'intervalle considéré) (le calcul de $\rho'(t) = 1 + \text{tg}^2\, t$ pourra servir à préciser certaines tangentes).

Au point $M_0(0)$, d'image O, la tangente est Ox.

Pour $t < \pi/2$ tendant vers $\pi/2$, l'arc présente une branche spirale.

Le tracé (fig. 20) fait apparaître des points multiples et des points d'inflexion que nous n'étudierons pas ici.

EXEMPLE II. — $\rho(\theta) = \sin(2\theta/3)$. (Ici $t = \theta$).

Définie sur $\mathbb{R}$, ρ admet visiblement la période 3π. Mais on remarque que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\rho(\theta + 3\pi/2) = -\rho(\theta)$.

Désignant par r_α la rotation de centre O et de mesure α, nous en déduisons $f(\theta + 3\pi/2) = r_{\pi/2}(f(\theta))$, $r_{\pi/2}$ apparaissant comme le composée de $r_{3\pi/2}$, qui correspond au changement de θ en $\theta + 3\pi/2$, et de r_π qui correspond au changement de ρ en $-\rho$.

D'après la théorie générale du **1.3.*1***, 2°, il suffit donc d'effectuer le tracé dans un intervalle quelconque J d'amplitude $\frac{3\pi}{2}$, et de compléter par les rotations $r_{k\pi/2}$, avec $k \in \{1, 2, 3\}$.

Mais en outre $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$, et donc $f(-\theta) = s_y\,(f(\theta))$, ce qui conduit à adopter $J = [-3\pi/4, 3\pi/4]$. En définitive, nous ferons varier θ dans $[0, 3\pi/4]$, puis nous ferons la symétrie par rapport à Oy, et nous ferons subir à l'ensemble ainsi obtenu les trois rotations $r_{k\pi/2}$.

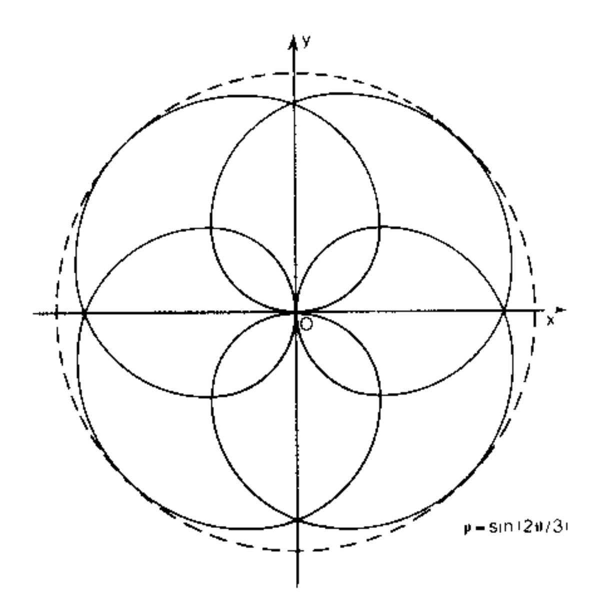


FIG. 21.

La restriction de ρ à $[0, 3\pi/4]$ est visiblement croissante, à valeurs positives. Au point $M_0(0)$, d'image O la tangente est Ox ; la formule $\operatorname{tg} V = 3/2 . \operatorname{tg}(2\theta/3)$ permet de préciser quelques tangentes. La figure fait apparaître des points multiples en évidence sur les axes et leurs bissectrices. En s'inspirant de la méthode exposée dans l'exemple qui suit, le lecteur montrera qu'il n'y en a pas d'autre.

EXEMPLE III. — $\rho(\theta) = 1 + \operatorname{tg}(\theta/2)$.

Définie sur $\mathbb{R} \backslash (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$, f admet la période 2π et il s'agit de construire le support de l'arc paramétré $(]-\pi, \pi[, f)$.

Sans dériver, on obtient le tableau suivant, où apparaît $\operatorname{sgn}(\rho)$:

θ	$-\pi$		$-\pi/2$		0		$\pi/2$		π
$\rho(\theta)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$\rho'(\theta) = 1/2 . \left(1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{\theta}{2}\right)$ permet de construire les tangentes aux points $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$.

Branches infinies. — L'arc $(]-\pi, \pi[, f)$ admet deux branches infinies, respectivement obtenues lorsque θ tend vers π par valeurs inférieures et vers $-\pi$ par valeurs supérieures. A l'une et à l'autre correspond la direction asymptotique Ox et le repère auxiliaire $(\mathbf{u}_\pi, \mathbf{v}_\pi)$, avec $\mathbf{u}_\pi = -\mathbf{i}$ et $\mathbf{v}_\pi = -\mathbf{j}$. Nous les étudierons simultanément en notant $Y(\theta) = \rho(\theta) \sin(\theta - \pi)$, cf. **1.4**.*2*, 2°.

Au voisinage de $h = 0$, on a :

$$Y(-\pi + h) = Y(\pi + h) = \sin h - 2\cos^2 h/2 = -2 + h + o(h)$$

ce qui montre que chaque branche infinie admet pour asymptote la droite dont $Y = -2$ est une équation dans le repère auxiliaire, et ce qui permet de situer le support par rapport à l'asymptote, au voisinage de $-\pi + 0$ ou de $+\pi - 0$ suivant le cas.

Notons que $Y(-\pi + h) + 2 = 2\sqrt{2}\sin\frac{h}{2}\sin\left(\frac{h}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ avec ici $h \in]0, 2\pi[$, permet de placer tout le support par rapport à l'asymptote, et, en particulier, de déterminer l'intersection du support et de l'asymptote.

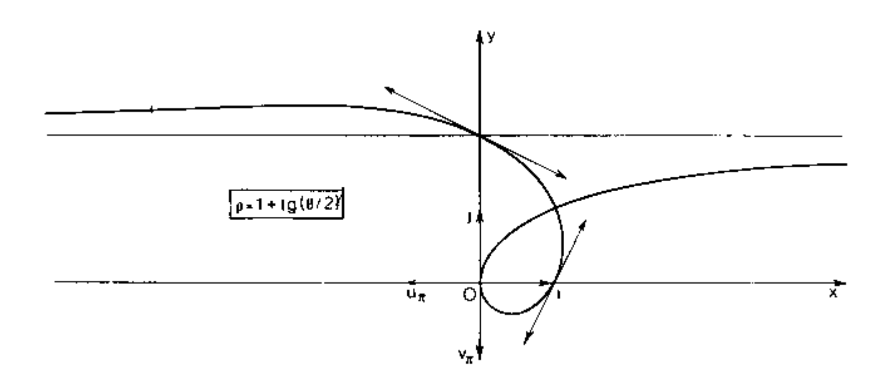


Fig. 22.

Points multiples. — D'après II.6.3.*1*, 1°, nous sommes amenés à chercher deux valeurs θ et θ' du paramètre [1] vérifiant l'une des relations :

$$\theta' = \theta + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}^*) \quad \text{et} \quad \rho(\theta') = \rho(\theta) \qquad (4)$$

$$\theta' = \theta + \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad \rho(\theta') = -\rho(\theta) \qquad (5)$$

S'agissant ici d'un arc paramétré $(]-\pi, \pi[, f)$, la condition $(\theta, \theta') \in (]-\pi, \pi[)^2$ est incompatible avec (4) et (si l'on impose $\theta' < \theta$) elle n'est compatible avec (5) que si :

$$(\theta \in]0, \pi[) \wedge (\theta' = \theta - \pi) \wedge (1 - \operatorname{cotg}(\theta/2) = -1 - \operatorname{tg}(\theta/2))$$

ce qui s'écrit :

$$(\theta \in]0, \pi[) \wedge (\theta' = \theta - \pi) \wedge \left(\frac{2\operatorname{tg}(\theta/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(\theta/2)} = 1\right)$$

La solution, unique, est $(\theta = \pi/4, \theta' = -3\pi/4)$. D'où l'existence d'un point double (ce qu'une ébauche du tracé laissait soupçonner); il s'agit du point $O + \mathbf{i} + \mathbf{j}$; le lecteur vérifiera que les tangentes aux points d'angles polaires $\pi/4$ et $-3\pi/4$ sont orthogonales.

Point d'inflexion. — L'équation $(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')(\theta) = 0$ s'écrit, en posant $t = \operatorname{tg}\theta/2$:

$$t^3 - 3t^2 - 3t - 3 = 0$$

Cette dernière équation n'admet qu'une racine réelle, dont une valeur approchée est 3,951 37; d'où les valeurs approchées $x \simeq -4{,}3553$ et $y \simeq 2{,}3553$ des coordonnées du point d'inflexion.

Autres points remarquables. — On pourra, par exemple, chercher les points en lesquels la tangente est dirigée par **j** ou par **i**, ce qui conduit à écrire que la dérivée de

(1) Le lecteur généralisera aisément au cas où le paramètre n'est pas θ.

$\theta \longmapsto (1 + \operatorname{tg}(\theta/2))\cos\theta$ ou de $\theta \longmapsto (1 + \operatorname{tg}(\theta/2))\sin\theta$ est nulle. Le second calcul conduit à :

$$\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

ce qui s'écrit $\operatorname{tg}\theta = -1$ $\left(\text{en passant par l'intermédiaire de } t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)$. On obtient deux points à tangentes parallèles à Ox ; leurs images sont sur la deuxième bissectrice.

1.5. COURBES PLANES DÉFINIES IMPLICITEMENT

1.5.*1*. Notations et définition

1° *Notations.* — Dans le présent chapitre, on se donne un plan affine $(\mathscr{E}, E)$ et une application F de classe $C^k (k \geqslant 1)$ d'un ouvert $\mathscr{W}$ de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$; on note $\mathscr{C} = F^{-1}(0)$. On dit que *le couple* $(F, \mathscr{C})$ *est la courbe d'équation* $F(m) = 0$ (ou encore *la courbe définie implicitement par* $F(m) = 0$).

Il se peut que l'ensemble $\mathscr{C}$ soit vide (il en est ainsi si F est une constante non nulle).

— On rapporte $\mathscr{E}$ à un repère $\mathscr{R} = (O ; \mathbf{i}, \mathbf{j})$, en général quelconque. On dispose ainsi de $\varpi \in \operatorname{Diff}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathscr{E})$ défini par $(x, y) \longmapsto O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. On note $f = F \circ \varpi : (x, y) \longmapsto F(O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$; il s'agit d'une application de classe C^k d'un ouvert $W = \varpi^{-1}(\mathscr{W})$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

— Dans les paragraphes **1.5.*2*** et **1.5.*3***, on se donne en outre un point de $\mathscr{C}$, $m_0 = O + x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$, avec $F(m_0) = 0$, et on se propose d'étudier *localement* $\mathscr{C}$ au voisinage de m_0.

2° DÉFINITION. — **Avec les notations du 1°,** $m_0 \in \mathscr{C}$ **est dit** *point régulier* **ou** *point singulier* **de la courbe** [1] $(F, \mathscr{C})$ **suivant que la différentielle de** F **en** m_0, $\mathrm{d}F(m_0)$, **est** *non nulle* **ou** *nulle.*

$\mathrm{d}F(m_0)$ s'écrivant $h\mathbf{i} + k\mathbf{j} \longmapsto hf'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0)$, $m_0 \in \mathscr{E}$ est point singulier de $(F, \mathscr{C})$ si, et seulement si :

$$f(x_0, y_0) = 0; \qquad f'_x(x_0, y_0) = 0; \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0 \qquad (1)$$

REMARQUE. — La précaution qui consiste à considérer une courbe comme un couple trouve ici son sens. En effet, si F est affine non constante, $\mathscr{C} = F^{-1}(0)$ est une droite qui s'écrit aussi $G^{-1}(0)$, avec $G = F^2$; or tout $m_0 \in \mathscr{C}$ est point régulier de $(F, \mathscr{C})$ et point singulier de $(G, \mathscr{C})$. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité, il nous arrivera cependant d'écrire $\mathscr{C}$ pour $(F, \mathscr{C})$.

---

[1] Le mot *courbe* n'a le sens général que nous lui donnerons au **3.3.*1*** que lorsqu'il n'existe pas de point singulier.

1.5.2. Étude d'une courbe au voisinage d'un point régulier

THÉORÈME. — **Avec les notations du 1.5.*1*, 1°, on suppose que m_0 est un point régulier de la courbe $(F, \mathscr{C})$. Alors il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de m_0 dans $\mathscr{E}$ tel que $\mathscr{V} \cap \mathscr{C}$ soit le support d'un C^k-arc géométrique plongé. La tangente à cet arc au point d'image m_0 admet l'équation $\mathrm{d}F(m_0).\overrightarrow{m_0m} = 0$, qui s'écrit (quel que soit le choix du repère $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$) :**

$$(x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0) = 0 \qquad (1)$$

Supposons $f(x_0, y_0) = 0$, et, pour fixer les idées : $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Le théorème des fonctions implicites nous assure l'existence de voisinages ouverts I de x_0 et J de y_0 dans $\mathbb{R}$, ainsi que d'une application $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe C^k, tels que :

i) $I \times J \subset W$; ii) $\forall(x, y) \in I \times J \qquad (f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x))$

et on peut même supposer que I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

$\mathscr{V} = \varpi(I \times J)$ est un ouvert de $\mathscr{E}$ tel que $\{m_0\} \subset \mathscr{V} \subset \mathscr{W}$; $\mathscr{V} \cap \mathscr{C}$ est le support de l'arc cartésien (I, G), où $G(t) = O + t\mathbf{i} + \varphi(t)\mathbf{j}$; cet arc admet au point de paramètre $t = x_0$ la tangente $\mathscr{T}_0 = m_0 + \mathbb{R}(\mathbf{i} + \varphi'(x_0)\mathbf{j})$, dont une équation dans $\mathscr{R}$ est : $y - y_0 - \varphi'(x_0)(x - x_0) = 0$.

Compte-tenu de $\varphi'(x_0) = -f'_x(x_0, y_0)/f'_y(x_0, y_0)$, (1) est aussi une équation de $\mathscr{T}_0$. Si l'on avait supposé $f'_y(x_0, y_0) = 0$, alors on aurait eu $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, et, en transposant $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$, et donc x et y, on aurait retrouvé (1).

□

REMARQUES. — *a*) On sait que tous les arcs plongés de classe C^k ayant $\mathscr{V} \cap \mathscr{C}$ comme support sont C^k-équivalents. $\mathscr{V} \cap \mathscr{C}$ est donc le support d'un unique arc géométrique plongé.

b) Si tous les points de $\mathscr{C}$ sont réguliers, nous dirons que $\mathscr{C}$ est *localement* le support d'un arc plongé de classe C^k. On démontre que si $\mathscr{C}$ est connexe il est support d'un arc géométrique (globalement).

c) D'après le théorème III du 1.2.2, 2°, si m_0 est un point régulier de $(F, \mathscr{C})$, alors $\mathscr{C}$ admet en m_0 une tangente géométrique.

1.5.3. Étude d'une courbe au voisinage d'un point singulier

1° Les notations sont celles de **1.5.*1***, 1°, à cela près qu'ici $k \geqslant 3$ ($k \geqslant 2$ suffirait au 2°), et que m_0 est un point singulier de la courbe $(F, \mathscr{C})$:

$$F(m_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}F(m_0) = 0.$$

Si, en outre, $\mathrm{d}^2F(m_0) \neq 0$, on dit que m_0 est un *point double* de la courbe.

Nous aurons à utiliser la forme quadratique sur E, Φ_{m_0}, définie par :

$$\forall \mathbf{h} \in E \qquad \Phi_{m_0}(\mathbf{h}) = \mathrm{d}^2F(m_0).\mathbf{h}^2$$

Le repère $\mathscr{R} = (O\,;\,\mathbf{i},\,\mathbf{j})$ étant quelconque, l'hypothèse s'écrit :

$$f(x_0, y_0) = 0\,; \qquad f'_x(x_0, y_0) = 0, \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

et d'après III.8.3.3, 4° nous avons, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$:

$$\Phi_{m_0}(h\mathbf{i} + k\mathbf{j}) = rh^2 + 2shk + tk^2$$

avec :
$$r = \mathrm{d}^2F(m_0).\mathbf{i}^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\,; \quad t = \mathrm{d}^2F(m_0).\mathbf{j}^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\,;$$
$$s = \mathrm{d}^2F(m_0).\mathbf{i}.\mathbf{j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0, y_0).$$

Les résultats dépendent de la signature de Φ_{m_0}, mais non du choix de $\mathscr{R}$, bien que celui-ci intervienne dans leur formulation par l'intermédiaire de r, s, t (qui dépendent de $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, mais non de O).

2° *Cas où* Φ_{m_0} *est définie* $(rt - s^2 > 0)$ ***positive*** $(r > 0$ **et** $t > 0)$ ***ou négative*** $(r < 0$ **et** $t < 0)$. — En passant par l'intermédiaire de f nous constatons (III.8.3.3, 4°) que F admet en m_0 un extremum relatif strict (minimum si $r > 0$, maximum si $r < 0$). D'où l'existence d'un voisinage $\mathscr{V} \subset \mathscr{W}$ de m_0 dans $\mathscr{E}$ tel que $F(m)$ soit non nul (et même de signe fixe) pour tout $m \in \mathscr{V} \setminus \{m_0\}$. On a $\mathscr{V} \cap \mathscr{C} = \{m_0\}$; m_0 est un *point double isolé* de la courbe $(F, \mathscr{C})$.

3° *Cas où* Φ_{m_0} *est non dégénérée, mais non définie* $(rt - s^2 < 0)$. — L'indifférence du choix du repère nous autorise à adopter ici $\mathscr{R} = (O\,;\,\mathbf{i},\,\mathbf{j})$, où O est m_0, et où $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ est une base de E réduite pour Φ_{m_0} (II.1.2.2, 1°, corollaire I), ce qui entraîne :

$$\Phi_{m_0}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = x^2 - y^2\,; \qquad r = 1, \qquad s = 0, \qquad t = -1 \quad (1)$$

Il existe un ouvert $\mathscr{W}' \subset \mathscr{W}$ étoilé par rapport à m_0 (i.e. un ouvert $W' = \varpi^{-1}(\mathscr{W}')$ de $\mathbb{R}^2$ étoilé par rapport à $(0, 0)$), et la formule de Taylor à l'ordre 1, avec reste intégral (III.8.3.1, 4) permet d'écrire pour tout $m \in \mathscr{W}'$, avec $m = m_0 + \mathbf{h}$ et $\mathbf{h} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$:

$$F(m) = \int_0^1 (1 - t)\,\mathrm{d}^2F(m_0 + t\mathbf{h}).\mathbf{h}^2\,\mathrm{d}t$$

On a donc :
$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2u(x, y) + 2xyv(x, y) + y^2w(x, y)) \qquad (2)$$

où u, v, w sont les applications de classe C^{k-2} de W' dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$u(x, y) = 2\int_0^1 (1 - t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx, ty)\,\mathrm{d}t, \text{ et ainsi de suite.}$$

En particulier :

$$u(0, 0) = 2\int_0^1 (1 - t)r\,\mathrm{d}t = 1\,; \text{ de même : } v(0, 0) = 0\,;\; w(0, 0) = -1. \;(3)$$

Par continuité, on déduit de (3) qu'il existe un ouvert W'' de $\mathbb{R}^2$ tel que $\{(0, 0)\} \subset W'' \subset W'$ sur lequel les fonctions u et $v^2 - uw$ sont à valeurs strictement positives. D'où les égalités entre applications de classe C^{k-2} de W'' dans $\mathbb{R}$:

$$2f = \varphi^2 - \psi^2 \qquad \text{et} \qquad f = f_1 . f_2$$

avec :

$$\varphi(x, y) = \left(x + y\frac{v(x, y)}{u(x, y)}\right)\sqrt{u(x, y)}\,; \qquad \psi(x, y) = y\sqrt{\frac{v^2(x, y)}{u(x, y)} - w(x, y)}$$

et :

$$f_1 = 1/\sqrt{2}.(\varphi - \psi)\,; \qquad f_2 = 1/\sqrt{2}.(\varphi + \psi)$$

En utilisant encore (3), on calcule sans difficulté :

$$\begin{bmatrix} \varphi'_x(0, 0) & \varphi'_y(0, 0) \\ \psi'_x(0, 0) & \psi'_y(0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

D'où :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0) = -\frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (5)$$

$\mathscr{W}''$ désignant $\varpi(W'')$, on a : $\mathscr{W}'' \cap \mathscr{C} = \mathscr{C}' \cup \mathscr{C}''$, où $(f_1 \circ \varpi^{-1}, \mathscr{C}')$ et $(f_2 \circ \varpi^{-1}, \mathscr{C}'')$ sont des courbes dont m_0 est un point régulier. D'après **1.5.2**, il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de m_0 dans $\mathscr{E}$ tel que $\mathscr{V} \cap \mathscr{C}$ soit la réunion des supports $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ de deux C^{k-2}-arcs géométriques plongés qui admettent au point d'image m_0 *les tangentes respectives* $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$, dont (d'après (5)) $x - y = 0$ et $x + y = 0$ sont des équations. La gerbe $\mathscr{G} = \mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2$ admet $x^2 - y^2 = 0$ pour équation dans le repère (particulier) $\mathscr{R}$, et donc (d'après (1)) : $d^2F(m_0).\overrightarrow{m_0m}^2 = 0$ pour équation intrinsèque, ce qui permet d'en obtenir une équation dans un repère quelconque.

A titre de complément, remarquons que l'application de classe C^{k-2} :

$$(\varphi, \psi) : W \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y) \longmapsto (X = \varphi(x, y), Y = \psi(x, y))$$

vérifie :

$$(\varphi, \psi)(0, 0) = (0, 0) \quad \text{et} \quad d(\varphi, \psi)(0, 0) = Id_{\mathbb{R}^2}.$$

Quitte à remplacer $\mathscr{V}$ par un voisinage de m_0 « plus petit », on en déduit que $(\varphi, \psi) \circ \varpi^{-1}$ induit $\theta \in \mathrm{Diff}^{k-2}(\mathscr{V}, U)$, où U est un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$. On a $\mathscr{S}_i = \theta^{-1}(U \cap d_i)$, où d_1 et d_2 sont les droites de $\mathbb{R}^2$ d'équations $X - Y = 0$ et $X + Y = 0$. Il en résulte que m_0 est le seul point singulier de $(F, \mathscr{C})$ inclus dans $\mathscr{V}$ et que $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2 = \{m_0\}$.

En conclusion de cette étude, énonçons :

THÉORÈME. — **Soit m_0 un point double de la courbe $(F, \mathscr{C})$ tel que la forme quadratique $\mathbf{h} \longmapsto d^2F(m_0).\mathbf{h}^2$ soit non dégénérée et non définie. Alors il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de m_0 dans $\mathscr{E}$ tel que :**

— m_0 soit le seul point singulier de $(F, \mathscr{C})$ appartenant à $\mathscr{V}$;

— $\mathscr{V} \cap \mathscr{C}$ soit la réunion des supports $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ de deux C^{k-2}-arcs plongés tels que $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2 = \{m_0\}$.

La gerbe $\mathscr{G} = \mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2$ des tangentes (distinctes) à ces arcs en leur point d'image m_0 admet l'équation : $d^2F(m_0).\overrightarrow{m_0m}^2 = 0$.

Dans un repère *quelconque* $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ **l'hypothèse s'écrit :**

$$f(x_0, y_0) = 0; \qquad f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0; \qquad rt - s^2 < 0$$

et $\mathscr{G}$ **admet l'équation :** $r(x - x_0)^2 + 2s(x - x_0)(y - y_0) + t(y - y_0)^2 = 0.$

Notons que $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ sont tangentes géométriques en m_0 à $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ respectivement (au sens de la définition II du **1**.2.2, 2°), mais ne sont pas tangentes géométriques à $\mathscr{C}$ en m_0. Par abus de langage, nous conviendrons cependant de dire que $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ sont les *tangentes à* $\mathscr{C}$ *au point* m_0.

COMPLÉMENTS. — *a*) On appelle *lignes de niveau* de l'application $F : \mathscr{W} \to \mathbb{R}$ les sous-ensembles $\mathscr{C}_\lambda = (F - \lambda)^{-1}(0)$ de $\mathscr{E}$. L'étude précédente permet d'étudier les $\mathscr{C}_\lambda$ au voisinage d'un point singulier m_0 de $(F, \mathscr{C})$ en lequel $rt - s^2 < 0$. $\mathscr{V}$ et U étant les voisinages de m_0 et de $(0, 0)$ mis en évidence dans l'étude précédente, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathscr{V} \cap \mathscr{C}_\lambda$ est l'image par le difféomorphisme θ^{-1} de $U \cap H_\lambda$, où H_λ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ d'équation $X^2 - Y^2 = 2\lambda$ (seules interviennent les λ de valeur absolue « assez petite »). Sur les figures 23 et 24, on a régionné U et $\mathscr{V}$ d'après sgn λ (on a adopté $\lambda'_2 < \lambda'_1 < 0 < \lambda_1 < \lambda_2$).

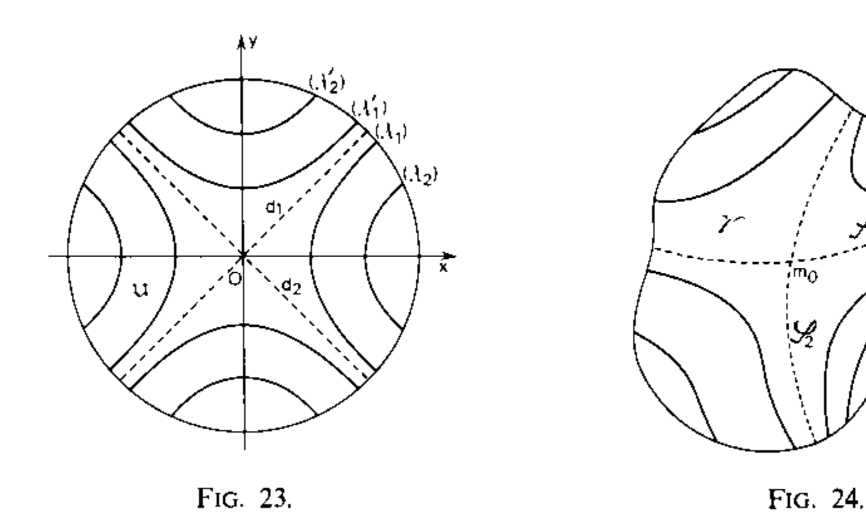


FIG. 23. FIG. 24.

b) L'étude s'étend au cas d'un point double m_0 de $(F, \mathscr{C})$ en lequel la forme Φ_{m_0} est définie $(rt - s^2 > 0)$. Si $r > 0$ (resp. $r < 0$) on utilise un repère d'origine m_0 tel que :

$$\Phi_{m_0}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = x^2 + y^2 \quad (\text{resp. } \Phi_{m_0}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = -x^2 - y^2).$$

Il existe encore un voisinage $\mathscr{V}$ de m_0 sur lequel m_0 est le seul point de $\mathscr{C}$. Ici H_λ a pour équation $X^2 + Y^2 = 2\lambda$ (resp. $-X^2 - Y^2 = 2\lambda$) et $r\lambda > 0$ est une condition nécessaire pour que $\mathscr{V} \cap \mathscr{C}_\lambda$ ne soit pas vide ; cet ensemble est alors difféomorphe à un cercle (la figure est laissée au lecteur).

4° ***Cas où*** Φ_{m_0} ***est dégénérée et non nulle*** $(rt - s^2 = 0,\ (r, s, t) \neq (0, 0, 0))$.

Ici Φ_{m_0} est le carré d'une forme linéaire non nulle ; l'ensemble de ses vecteurs isotropes est de la forme $\mathbb{R}\mathbf{j}$, avec $\mathbf{j} \in E \setminus \{0\}$. Nous supposons $k \geqslant 7$.

Nous nous limiterons au cas où, pour un vecteur isotrope non nul $\mathbf{j}$ de Φ_{m_0} on a :

$$d^3F(m_0).\mathbf{j}^3 \neq 0 \tag{6}$$

Nous allons montrer que, sous ces hypothèses, il existe un voisinage $\mathscr{V}$ *de* m_0 *tel que* $\mathscr{V} \cap \mathscr{C}$ *soit le support d'un arc admettant en* m_0 *un point de rebroussement de 1*[re] *espèce.*

Soit $\mathbf{i} \notin \mathbb{R}\mathbf{j}$; en utilisant : $d^3F(m_0).(\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}).\mathbf{j}^2 = d^3F(m_0).\mathbf{i}.\mathbf{j}^2 + \alpha d^3F(m_0).\mathbf{j}^3$, nous constatons que nous pouvons choisir $\mathbf{i} \notin \mathbb{R}\mathbf{j}$ pour que $d^3F(m_0).\mathbf{i}.\mathbf{j}^2 = 0$. Notons alors $f(x, y) = F(m_0 + x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$. En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2, avec reste intégral, nous

constatons, quitte à remplacer F par λF ($\lambda \in \mathbb{R}^*$), ce qui n'altère pas $\mathscr{C}$, qu'il existe un voisinage $\mathscr{W}'$ de m_0 sur lequel :

$$f(x, y) = x^2 + x^3 a(x, y) + x^2 y b(x, y) + xy^2\, c(x, y) + y^3 d(x, y)$$

où a, b, c et d sont de classe C^{k-3} vérifient : $a(0, 0) = \frac{1}{6} d^3 F(m_0).\mathbf{i}^3$, etc... En particulier : $c(0, 0) = 0$ et $d(0, 0) \neq 0$.

Par une nouvelle application de Taylor (quitte à restreindre $\mathscr{W}'$), $c(0, 0) = 0$ nous permet d'écrire : $c(x, y) = xc_1(x, y) + yc_2(x, y)$, où c_1 et c_2 sont de classe C^{k-4}. Il vient :

$$f(x, y) = x^2[1 + xa(x, y) + yb(x, y) + y^2 c_1(x, y)] + y^3[xc_2(x, y) + d(x, y)]$$

Soit alors l'application θ, définie au voisinage de m_0, par :

$$m_0 + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \longmapsto [x(1 + xa(x, y) + yb(x, y) + y^2 c_1(x, y))^{1/2}, \quad y(xc_2(x, y) + d(x, y))^{1/3}]$$

Le lecteur vérifiera (en utilisant $d(0, 0) \neq 0$) que θ est un C^{k-4}-difféomorphisme d'un voisinage ouvert $\mathscr{V}$ de m_0 sur un voisinage ouvert U de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$. Or, par construction, $\theta(\mathscr{V} \cap \mathscr{C})$ est le sous-ensemble de U d'équation $X^2 + Y^3 = 0$ et il admet donc un paramétrage de la forme (I, g), où $g(t) = (t^3, -t^2)$ et I est un intervalle ([1]) ouvert contenant 0.

Notons pour simplifier $\varphi = \theta^{-1}$; l'ensemble $\mathscr{V} \cap \mathscr{C}$ est ainsi paramétré par $(I, \varphi \circ g)$, et $m_0 = (\varphi \circ g)(0)$. Étudions donc les dérivées successives de $\varphi \circ g$:

$$(\varphi \circ g)'(t) = d\varphi(g(t)).g'(t)$$
$$(\varphi \circ g)''(t) = d^2\varphi(g(t)).g'(t)^2 + d\varphi(g(t)).g''(t)$$
$$(\varphi \circ g)'''(t) = d^3\varphi(g(t)).g'(t)^3 + 3d^2\varphi(g(t)).g'(t).g''(t) + d\varphi(g(t)).g'''(t)$$

Or : $g'(0) = 0$, $g''(0) \neq 0$ et le système $(g''(0), g'''(0))$ est libre ; $d\varphi(g(0))$ étant un isomorphisme, il en résulte :

$$(\varphi \circ g)'(0) = 0, \qquad (\varphi \circ g)''(0) \neq 0 \text{ et le système } ((\varphi \circ g)''(0), (\varphi \circ g)'''(0)) \text{ est libre.}$$

Ainsi $(I, \varphi \circ g)$ présente en $m_0 = (\varphi \circ g)(0)$ un point de rebroussement de 1re espèce (plus précisément, la suite caractéristique en ce point est $(0, 2, 3)$).

REMARQUES. — *a*) Sous l'hypothèse (6), l'équation $d^2F(m_0).\overrightarrow{m_0 m}^2 = 0$ représente encore la gerbe des tangentes en m_0 à $\mathscr{C}$.

b) l'hypothèse (6) est nécessaire dans l'étude qui précède, ainsi que le prouve :

CONTRE-EXEMPLE I. — $F(x, y) = y^4 - x^3 y + x^2$ ($\mathscr{E} = \mathbb{R}^2$).

$m_0 = O$ est bien un point double et Φ_{m_0} est de rang 1. Mais (6) n'est pas vérifiée (ici $d^3F(m_0) = 0$).

En remarquant que $\mathscr{C} \cap Oy = \{O\}$, et qu'en tout point de $\mathscr{C} \setminus \{Oy\}$ on a : $xy = 1 + y^4/x^2 \geqslant 1$, on constate que O est un point isolé de $\mathscr{C}$. Oy n'est donc pas tangente à $\mathscr{C}$.

CONTRE-EXEMPLE II. — $F(x, y) = y^4 - 2xy^2 + x^2$ ($\mathscr{E} = \mathbb{R}^2$).

Ici $\mathscr{C}$ est la parabole d'équation $y^2 - x = 0$; $m_0 = O$ est un point double, Φ_{m_0} est de rang 1 mais (6) n'est pas vérifiée (bien que $d^3F(m_0) \neq 0$).

On remarque ici que Oy est tangent à $\mathscr{C}$, mais $\mathscr{C}$ ne présente pas en m_0 l'allure d'un point de rebroussement.

4° *Généralisation :* Cas où $dF(m_0) = d^2F(m_0) = \ldots = d^{q-1}F(m_0) = 0$, $d^qF(m_0) \neq 0$. — Si le polynôme associé à $d^qF(m_0)$ est défini-positif ou défini-négatif (ce qui exige q pair), alors on montre comme en 2° que m_0 est un *point isolé* de $\mathscr{C}$ (cf. III.8.3.3, 3°). Dans le cas contraire, on peut seulement dire que *s'il existe* un arc géométrique plongé Γ dont le support est inclus dans $\mathscr{C}$ et contient m_0, alors la tangente à Γ au point d'image m_0 appartient à la gerbe $\mathscr{G}$ d'équation $d^qF(m_0).\overrightarrow{m_0 m}^q = 0$, qui est dite : *gerbe des tangentes à* $\mathscr{C}$ *en* m_0.

([1]) Pour cela il faut éventuellement remplacer U et donc $\mathscr{V}$ par des voisinages plus petits.

1.5.4. Compléments et exemples

1° THÉORÈME I. — **Soient $a_1, \ldots, a_n$ des applications de classe C^k, $k \geqslant 1$, d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. A tout $t \in I$ on associe l'équation à l'inconnue $x \in \mathbb{R}$:**

$$(e_t) \quad h(t, x) = 0, \qquad \text{où} \qquad h(t, x) = x^n - a_1(t)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n(t)$$

On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}_n$ tel que, pour tout $t \in I$, (e_t) ait exactement p racines, toutes simples, que l'on peut noter $\varphi_i(t)$, $i \in N_p$, avec :

$$\forall t \in I \qquad \varphi_1(t) < \ldots < \varphi_p(t) \tag{1}$$

Alors les applications $\varphi_i : I \to \mathbb{R}$ sont de classe C^k.

Soient $t_0 \in I$ et $i \in \mathbb{N}_p$; $\varphi_i(t_0)$, noté x_i, étant racine simple de (e_{t_0}), on a :

$$h(t_0, x_i) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial h}{\partial x}(t_0, x_i) \neq 0$$

Par application du théorème des fonctions implicites à h en (t_0, x_i), il existe un intervalle ouvert U_i tel que $\{t_0\} \subset U_i \subset I$, un voisinage ouvert V_i de x_i et une application $\psi_i : U_i \to \mathbb{R}$, de classe C^k, tels que, pour tout $t \in U_i$, (e_t) admette $\psi_i(t)$ pour solution unique dans V_i ; on a $\psi_i(t_0) = x_i$.

Quitte à modifier les U_i, nous pouvons même supposer que les V_i sont deux à deux disjoints. Considérons alors l'intervalle ouvert $U = \bigcap_{i=1}^{p} U_i$ de $\mathbb{R}$, qui contient t_0. Pour tout $t \in U$, d'une part (e_t) admet (par hypothèse) exactement p racines simples $\varphi_i(t)$ liées par (1), d'autre part (e_t) admet les $\psi_i(t)$ pour racines et, à cause du choix des V_i, on a : $\psi_1(t) < \ldots < \psi_p(t)$. Il en résulte :

$$\forall t \in U \qquad \forall i \in \mathbb{N}_p \qquad \varphi_i(t) = \psi_i(t)$$

ce qui montre que (t_0 étant quelconque) les φ_i sont de classe C^k sur U. □

Notons que le théorème reste vrai si, J désignant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, on considère (e_t) comme une équation à l'inconnue $x \in J$.

PROPOSITION. — **Soient U l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ constitué par les $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vérifiant $x_1 < \ldots < x_n$ et V l'ensemble des $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que l'équation algébrique :**

$$\xi^n - y_1 \ \xi^{n-1} + \cdots + (-1)^n y_n = 0$$

à l'inconnue $\xi \in \mathbb{R}$ admette n racines distinctes $\theta_1(y) < \cdots < \theta_n(y)$. Alors V est ouvert et l'application $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ est un C^∞-difféomorphisme de V sur U.

Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ qui à $x = (x_1, \ldots, x_n)$ associe $(\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x))$, où σ_p est la p-ième fonction symétrique élémentaire (I, **6**.10.2). En utilisant I.**8**.1.2, 2°, on constate que f est injective. D'autre part le lecteur vérifiera que f est C^∞ et que pour tout $x \in U$, le jacobien de f est, au coefficient $(-1)^{n(n-1)/2}$ près, le déterminant de Van der Monde de $(x_1, \ldots, x_n)$, et, donc, est non nul. Il en résulte (III.**8**.5.5, 3°) que $W = f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et que la bijection $\bar{f} : U \to W$ qui coïncide avec f sur U est un C^∞-difféomorphisme. Reste à vérifier que $W = V$ et que $\theta = \bar{f}^{-1}$, ce qui est aisé. □

Notons que, pour $p = n$, le théorème I est un corollaire de la proposition.

• THÉORÈME II. — **Soient $\mathscr{C}$ la courbe d'équation** $f(x, y) = 0$ (notations du **1**.5.1, avec $k \geqslant 2$), **et $\mathscr{D}$ la droite $A + \mathbb{R}\mathbf{u}$ où $A = O + a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ et $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$. On pose $\varphi(\rho) = f(a + \rho\alpha, b + \rho\beta)$ et on dit que $\varphi(\rho) = 0$ est « l'équation aux ρ de $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}$ ».**

Soient ρ_0 une racine de $\varphi(\rho) = 0$, et $m_0 = A + \rho_0\mathbf{u}$ le point correspondant de $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}$.

i) **ρ_0 est racine *simple* de $\varphi(\rho) = 0$ si, et seulement si m_0 est un point régulier de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ distincte de la tangente en m_0 à $\mathscr{C}$.**

ii) ρ_0 **est racine** *au moins double* **de** $\varphi(\rho) = 0$ **si, et seulement si** m_0 **est un point singulier de** $\mathscr{C}$, **ou un point régulier de** $\mathscr{C}$ **en lequel la tangente est** $\mathscr{D}$.

iii) **Si** m_0 **est un point double de** $\mathscr{C}$ **en lequel** $rt - s^2 \neq 0$, **alors** ρ_0 **est racine au moins triple de** $\varphi(\rho) = 0$ **si, et seulement si** $\mathscr{D}$ **est l'une des deux tangentes en** m_0 **à** $\mathscr{C}$ **(ce qui implique** $rt - s^2 < 0$**).**

On utilise :

$$\varphi'(\rho_0) = \alpha f'_x(x_0, y_0) + \beta f'_y(x_0, y_0)$$
$$\varphi''(\rho_0) = \alpha^2 f''_{x^2}(x_0, y_0) + 2\alpha\beta f''_{xy}(x_0, y_0) + \beta^2 f''_{y^2}(x_0, y_0). \qquad \square$$

REMARQUE. — Le lecteur généralisera en remplaçant $\mathscr{D}$ par le support d'un C^k-arc paramétré γ. La discussion fera alors intervenir la régularité de m_0 sur $\mathscr{C}$ et le (ou les) tangentes en m_0 à $\mathscr{C}$, mais aussi la régularité du point de γ d'image m_0 et la tangente en ce point.

2° ***Notions sur les courbes algébriques.*** — Les notations sont celles du **1.5.*1***, 1°.

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soit** $(F, \mathscr{C})$ **une courbe. S'il existe un repère** $(O\,;\,\mathbf{i}, \mathbf{j})$ **de** $\mathscr{E}$ **pour lequel l'application** $f = F \circ \varpi$ **est une fonction polynôme de degré** p, **il en est de même pour tout repère (l'entier** p **étant indépendant du repère) ; on dit dans ce cas que** $(F, \mathscr{C})$ **est une** *courbe algébrique de degré p*.

Vérification aisée. $\square$

Une étude détaillée des courbes algébriques relèverait de la géométrie algébrique ; nous nous limiterons ici à étudier quelques propriétés qui permettent de faciliter la construction de telles courbes.

• ***Étude au voisinage d'un point*** m_0. — On peut se ramener à $m_0 = O$. On a ainsi (en éliminant le cas, trivial, d'une gerbe de droites) :

$$f(x, y) = \sum_{i=q}^{p} f_i(x, y), \qquad 1 \leqslant q < p.$$

où f_i est une fonction polynomiale homogène de degré i.

On a : $d^qF(O).\overrightarrow{Om}^q = q\,!\,f_q(x, y)$; la gerbe $\mathscr{G}$ des tangentes en O admet l'équation $f_q(x, y) = 0$.

• L'étude du **1.5.*3*** permet de conclure dans les cas suivants :

a) $q = 1$: O est un *point régulier*, à tangente d'équation $f_1(x, y) = 0$;

b) $q = 2$ et $rs - t^2 > 0$: O est *point double isolé* ;

c) $q = 2$ et $rs - t^2 < 0$: O est *point double à branches distinctes*, admettant pour tangentes en O les droites de la gerbe d'équation $f_2(x, y) = 0$.

• Dans le cas général, on note $\mathscr{D}_t$ la droite d'équation $y = tx$ (si c'est nécessaire on transpose x et y). L'équation aux x de $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}_t$ admet 0 pour racine d'ordre au moins égal à q, ce qui permet de la remplacer par l'équation : $x^{-q}f(x, tx) = 0$, qui s'écrit :

$$x^{p-q}f_p(1, t) + \cdots + xf_{q+1}(1, t) + f_q(1, t) = 0 \qquad (e_t)$$

Soit c une racine simple de l'équation $f_q(1, t) = 0$. En reprenant la démonstration du théorème du 1°, on constate qu'il existe un intervalle ouvert U contenant c, un voisinage ouvert V de 0 et un C^k-arc paramétré :

$$\gamma = (U, t \longmapsto O + \psi(t)\mathbf{i} + t\psi(t)\mathbf{j})$$

dont le support $\mathscr{S}$ est l'intersection de $\mathscr{C}$ et de la partie de $\mathscr{E}$:

$$\{O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \mid (x \in V) \wedge (y = tx) \wedge (t \in U)\}$$

$\mathscr{S}$ admet visiblement la droite $\mathscr{D}_c$ pour tangente géométrique au point O.

— Pour construire $\mathscr{S}$, on pose $y = (c + u)x$ et on prend comme nouvelles variables x et u, ce

qui conduit à étudier la courbe $\mathscr{C}_1$ du plan $\mathbb{R}^2$ d'équation :

$$g(x, u) = 0, \qquad \text{avec} \qquad g(x, u) = x^{-q} f(x, cx + ux)$$

qui présente à l'origine, une singularité « plus simple » que celle de $\mathscr{C}$. Si nécessaire, on réitère.

— Nous admettrons que le résultat subsiste lorsque c est racine multiple de $f_q(1, t)$, à cela près que l'on a alors plusieurs branches $\mathscr{S}'$, $\mathscr{S}''$ ... de $\mathscr{C}$ tangentes à $\mathscr{D}_c$ en O.

EXEMPLE. — $f(x, y) = 16x^5 + 2y^2(y^2 - x^2) + (y - x)(y + x)^2$. Ici $q = 3$ et $f_3(1, t) = 0$ admet la racine simple 1 et la racine double -1.

Branche tangente à $\mathscr{D}_1$: $y = x$. — On a ici :

$$g(x, y) = 16x^2 + u(4 + P(x, u)), \quad \text{avec} \quad P(0, 0) = 0$$

$\mathscr{C}_1$ admet une branche tangente en $(0, 0)$ à « l'axe des x », représentée par $u = \varphi(x)$, avec $\varphi(x) \sim -4x^2$. $\mathscr{C}$ admet donc une branche $\mathscr{S}$ tangente en O à $\mathscr{D}_1$, sur laquelle $y - x \sim -4x^3$, ce qui montre que $\mathscr{D}_1$ est tangente d'inflexion et que $\mathscr{S}$ est « au-dessus » de $\mathscr{D}_1$ pour $x < 0$.

Branches tangentes à $\mathscr{D}_{-1}$: $y = -x$. — On a ici :

$$g(x, u) = 16x^2 + (-4u + 2u^2)(-1 + u)^2 x + u^2(-2 + u)$$

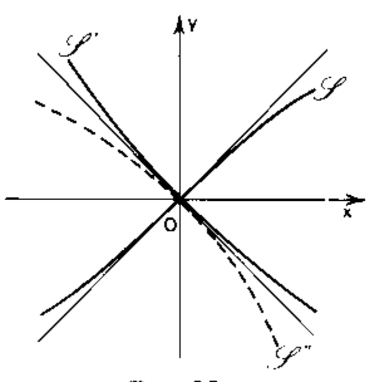


FIG. 25.

La courbe $\mathscr{C}_1$ d'équation $g(x, u) = 0$ possède deux branches admettant respectivement pour tangentes en $(0, 0)$ les droites d'équations $u = 2x$ et $u = -4x$. La courbe $\mathscr{C}$ admet donc deux branches tangentes en O à $\mathscr{D}_{-1}$, $\mathscr{S}'$ et $\mathscr{S}''$ sur lesquelles on a respectivement :

$$y + x \sim 2x^2 \qquad \text{et} \qquad y + x \sim -4x^2.$$

Sur la figure 25, $\mathscr{S}''$ a été dessinée en trait ponctué.

• ***Directions asymptotiques; asymptotes.*** — Nous ne ferons pas d'étude systématique et nous nous contenterons d'admettre que *les directions asymptotiques éventuelles des arcs paramétrés dont la réunion des supports est* $\mathscr{C}$ *appartiennent à la gerbe d'équation* $f_p(x, y) = 0$ (on pourrait étudier la transformée $\mathscr{C}_\infty$ de $\mathscr{C}$ par $(x, y) \longmapsto (1/x, 1/y)$, cf. exemple II du 3°).

3° ***Construction d'une courbe algébrique*** $\mathscr{C}$. — Après avoir étudié les points singuliers et les directions asymptotiques, on « coupe » en général $\mathscr{C}$ par des droites $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ qui passent par un point fixe ou ont une direction fixe : cette étude est basée sur les théorèmes I et II du 1°.

EXEMPLE I. — $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^3 + x(x + y)$.

a) Régionnement. — En tout point de $\mathscr{C}$: $x(x^3 + 2x^2 + x + y) = -y^4 \leqslant 0$. D'où un régionnement utilisant Oy et $\mathscr{C}'$ d'équation $y = -x^3 - 2x^2 - x$.

b) Étude à l'origine. — Au voisinage du point double O, on a deux branches $\mathscr{S}'$ et $\mathscr{S}''$ de $\mathscr{C}$ admettant des tangentes en O d'équations respectives $x = 0$ et $x + y = 0$. Le régionnement donne l'allure de $\mathscr{S}'$. Pour $\mathscr{S}''$, on utilise la méthode exposée ci-dessus : on pose $y = -x + ux$ et on

étudie la courbe d'équation $g(x, u) = 0$, où :

$$g(x, u) = x^2(1 + (-1 + u)^4) + 2x + u$$

On en déduit que, sur $\mathscr{S}''$, on a : $y + x \sim -2x^2$ (fig. 26).

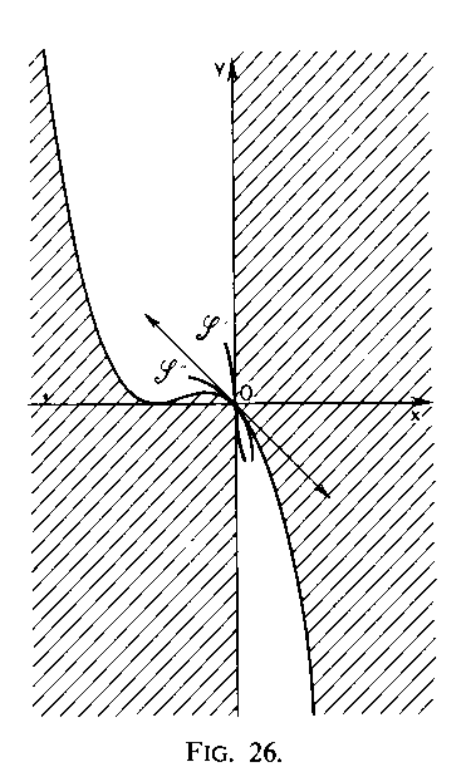


FIG. 26.

c) *Étude à l'infini.* — Nous avons d'après a) : $\mathscr{C} \cap (Oy) = \{O\}$ et $\mathscr{C} \cap (Ox) = \{O, a\}$, avec $a = O - \mathbf{i}$.

$\mathscr{C} \backslash \{O, a\}$ est l'image par la transformation $(x, y) \longmapsto (1/x, 1/y)$ de $\mathscr{C}_\infty \backslash \{O\}$, où $\mathscr{C}_\infty$ est la courbe d'équation :

$$X^4 + Y^4 + 2XY^4 + X^2Y^3(X + Y) = 0.$$

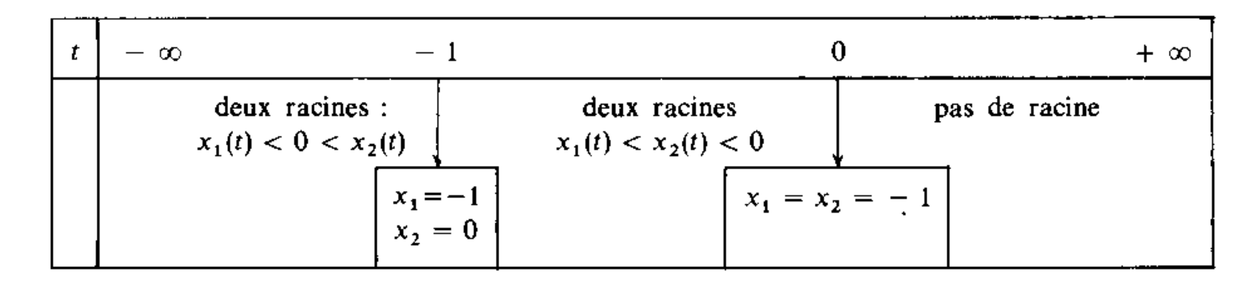
D'après **1**.5.3, 2° *in fine*, (0, 0) est point singulier isolé de $\mathscr{C}_\infty$. On en déduit que $\mathscr{C}$ est borné (et donc compact, car fermé) : les arcs dont la réunion des supports est $\mathscr{C}$ n'admettent pas de branche infinie.

d) *Construction.* — L'étude du système : $f(x, y) = f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = 0$ nous apprend que O est le seul point singulier de $\mathscr{C}$. Étudions $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}_t$ où $\mathscr{D}_t$ est la droite d'équation $y = tx$ (on rappelle $\mathscr{C} \cap (Oy) = \{O\}$). Il vient, après suppression de la racine connue $x = 0$:

$$x^2(1 + t^4) + 2x + (1 + t) = 0$$

dont nous étudions le nombre et le signe des racines par la méthode classique :

$$\Delta'(t) = -t(t^4 + t^3 + 1);\ s(t) = -2/(1 + t^4);\ p(t) = (1 + t)/(1 + t^4)$$



t	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
	deux racines : $x_1(t) < 0 < x_2(t)$	$x_1 = -1$, $x_2 = 0$	deux racines $x_1(t) < x_2(t) < 0$	$x_1 = x_2 = -1$	pas de racine

D'après le théorème I ([1]) les fonctions $t \longmapsto x_1(t)$ et $t \longmapsto x_2(t)$ sont de classe C^∞ sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ et $]-1, 0[$.

Pour $t = 0$, on obtient le point a en lequel la tangente est Ox (théorème II, ou calcul de $f'_x(-1, 0)$ et $f'_y(-1, 0)$).

Pour $t = -1$, on obtient outre O (contact) le point b de coordonnées $(-1, 1)$ en lequel la tangente est dirigée par $3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ (calcul de f'_x et f'_y).

Nous sommes en mesure, après cette étude, de donner une allure approximative de $\mathscr{C}$ (sachant que, en dehors de O, il s'agit localement du support d'un arc plongé).

e) *Précisions.* — On peut encore améliorer le tracé :

— en cherchant les points à tangentes parallèles aux axes, par résolution des systèmes :

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f'_x(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Le lecteur trouvera, par un calcul approché, les points de coordonnées

$(-1{,}59 ;\ 0{,}74)$ et $(0{,}19 ; -0{,}36)$ (tangente dirigée par $\mathbf{j}$)
$(-0{,}15 ; -0{,}43)$ et $(-0{,}33 ; 0{,}15)$ (tangente dirigée par $\mathbf{i}$)

— en déterminant, par des méthodes de calcul numérique, d'autres points de $\mathscr{C}$ et les tangentes correspondantes. * Notons qu'on peut en ces points calculer le rayon de courbure (en supposant $\mathscr{E}$ euclidien) par dérivation d'une fonction implicite, et obtenir alors grâce aux cercles osculateurs un tracé très précis *.

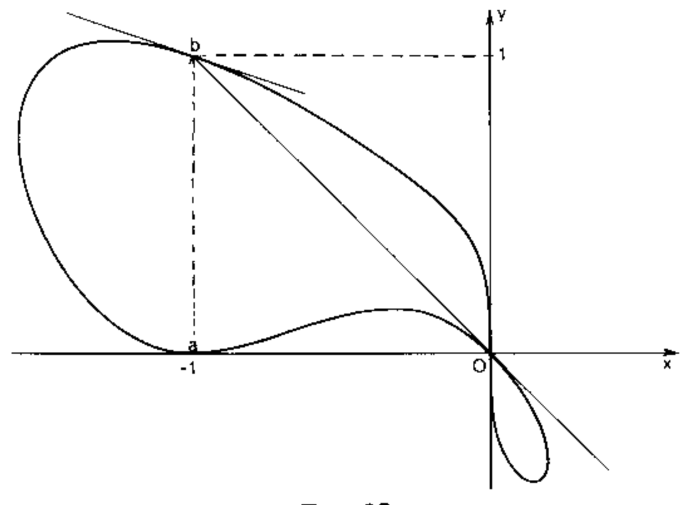


FIG. 27.

EXEMPLE II. — $f(x, y) = x^3y^3 - x^6 - 3x^2y + 1$.

On constate que $\mathscr{C}$ n'admet pas de point singulier. En tout point, $\mathscr{C}$ est donc localement le support d'un C^∞-arc plongé.

a) Coupons $\mathscr{C}$ par les droites parallèles à Oy. Comme $\mathscr{C} \cap (Oy) = \varnothing$, il s'agit d'étudier, suivant le paramètre *non nul* x, l'équation incomplète du troisième degré à l'inconnue $y \in \mathbb{R}$:

$$(e_x) \quad g_x(y) = 0, \qquad \text{avec} \qquad g_x(y) = x^3y^3 - 3x^2y - x^6 + 1.$$

([1]) Bien entendu, l'équation étant ici de degré 2, le théorème I peut se vérifier par résolution effective. On pourrait alors ramener la construction de $\mathscr{C}$ à celle des supports de deux arcs paramétrés. Plus rigoureuse, cette méthode serait plus compliquée en pratique, et elle ne se généralise pas à des degrés plus élevés.

On pourrait étudier sgn $(4p^3 + 27q^2)$, avec $p = -3/x$ et $q = (-x^6 + 1)/x^3$. En fait, nous aurons des renseignements plus précis sur la position des racines en étudiant, pour $x \in \mathbb{R}^*$ donné, les variations de g_x, dont la dérivée au point y est $3x^2(xy^2 - 1)$.

Cas $x < 0$. — Ici g_x est strictement décroissante et $g_x(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, (e_x) admet donc une unique racine, que nous notons $y_1(x)$. Nous disposons ainsi de $y_1 : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$, de classe C^∞ d'après le théorème I du 2°. En utilisant $g_x(0) = -x^6 + 1$, on peut même affirmer que y_1 est à valeurs négatives sur $]-\infty, -1]$, positives sur $[-1, 0[$.

On précise la tangente en $(-1, 0)$ grâce à $f'_x(-1, 0) = 6$, $f'_y(-1, 0) = -3$. Notons que : $g_x(1/\sqrt{-x}) = 4x\sqrt{-x} - x^6 + 1$ entraîne $y_1(x) > 1/\sqrt{-x}$ au voisinage de 0^-, et que : $g_x(-1/\sqrt{-x}) = -4x\sqrt{-x} - x^6 + 1$ entraîne $y_1(x) < -1/\sqrt{-x}$ au voisinage de $-\infty$.

Cas $x > 0$. — Les variations de g_x apparaissent dans le tableau :

y	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{x}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{x}}$		$+\infty$
$g'_x(y)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g_x(y)$	$-\infty$	$\nearrow$	M_x	$\searrow$	$1 - x^6$	$\searrow$	m_x	$\nearrow$	$+\infty$

On a :

$$m_x = -2x^{3/2} - x^6 + 1, \ M_x = 2x^{3/2} - x^6 + 1.$$

On calcule des valeurs approchées des racines de $(x^6 - 1)^2 - 4x^3 = 0$ et on constate :

– que $m_x = 0$ pour $x = x'$, avec $x' \simeq 0{,}6085$ $(1/\sqrt{x'} \simeq 1{,}2819)$,

– que $M_x = 0$ pour $x = x''$, avec $x'' \simeq 1{,}2487$ $(1/\sqrt{x'} \simeq 0{,}8949)$.

D'où la discussion :

– $g_{x'}$ a deux zéros, l'un double $1/\sqrt{x'}$, l'autre simple $-2/\sqrt{x'}$;

– $g_{x''}$ a deux zéros, l'un double $-1/\sqrt{x''}$, l'autre simple $2/\sqrt{x''}$;

– Pour $0 < x < x'$, g_x a un unique zéro, noté $y_1(x)$, et $y_1(x) < -1/\sqrt{x}$;

– Pour $x' < x < 1$, g_x a trois zéros ; on peut les noter de telle sorte que :

$$y_1(x) < -1/\sqrt{x}, \qquad 0 < y_2(x) < 1/\sqrt{x} < y_3(x).$$

– g_1 a trois zéros $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$ (le lecteur déterminera les tangentes) ;

– Pour $1 < x < x''$, g_x a trois zéros ; on peut les noter de telle sorte que :

$$y_1(x) < -1/\sqrt{x} < y_2(x) < 0, \qquad 1/\sqrt{x} < y_3(x).$$

– Pour $x'' < x$, g_x a un unique zéro, noté $y_1(x)$, et $1/\sqrt{x} < y_1(x)$.

Les fonctions y_1, y_2, y_3 ainsi introduits sont C^∞ sur chacun des intervalles (ouverts) où elles sont définies.

En chacun des points $(x', 1/\sqrt{x'})$ et $(x'', -1/\sqrt{x''})$ la tangente est parallèle à Oy. D'autres tangentes remarquables se déduisent du tableau suivant (où * désigne des valeurs approchées) :

(x, y)	$(1, -\sqrt{3})$	$(1, 0)$	$(1, \sqrt{3})$	$(x', -2/\sqrt{x'})$	$(x'', 2/\sqrt{x''})$
$f'_x(x, y)$	$-11{,}20$ *	-6	$-0{,}80$ *	$-9{,}86$ *	$-4{,}81$ *
$f'_y(x, y)$	6	-3	6	$3{,}33$ *	$14{,}03$ *

Les résultats seront résumés sur la figure 28 par un régionnement :

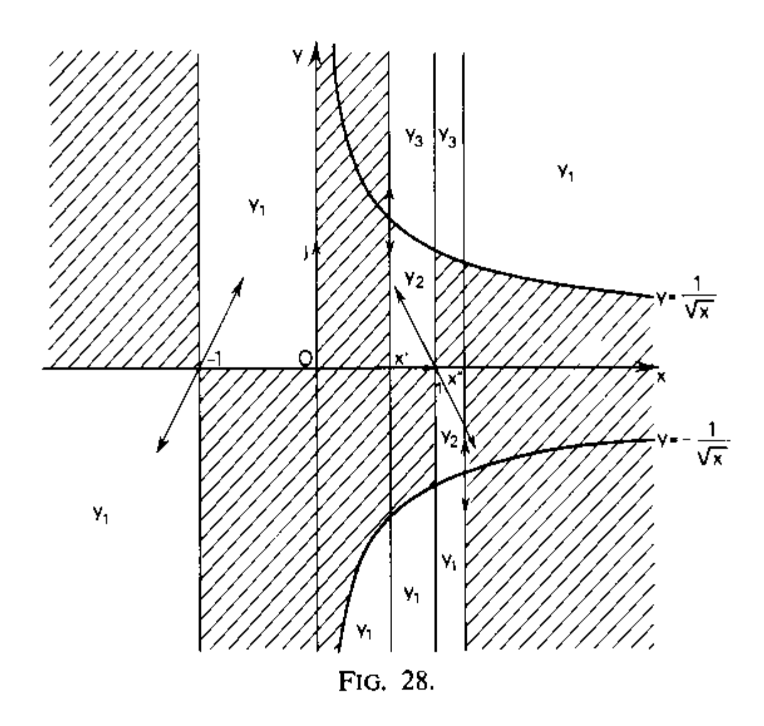


FIG. 28.

b) Branches infinies. — On constate que $\mathscr{C}$ privé des points $(x', 1/\sqrt{x'})$ et $(x'', -1/\sqrt{x''})$, est la réunion des supports de quatre C^∞-arcs plongés dont trois admettent des branches infinies.

— Pour $x \in]0, x'[$, l'unique racine de $g_x(y) = 0$ vérifie $y_1(x) < -1/\sqrt{x}$. D'où $\lim_{x \to 0, x > 0} y_1(x) = -\infty$: l'un des arcs paramétrés de support inclus dans $\mathscr{C}$ admet Oy pour asymptote ; par abus de langage, nous dirons que Oy est une asymptote de $\mathscr{C}$.

— Pour $x < 0$ et $|x|$ assez petit, l'unique racine de $g_x(y) = 0$ vérifie $y_1(x) > 1/\sqrt{-x}$. D'où $\lim_{x \to 0, x < 0} y_1(x) = +\infty$; Oy est encore asymptote.

— Pour $x > x''$, l'unique racine de $g_x(y) = 0$ vérifie $y_1(x) > 1/\sqrt{x}$, et donc $3x^2 y_1(x) > 3x\sqrt{x} > 1$, si bien qu'en écrivant :

$$y_1(x) - x = \frac{3x^2 y_1(x) - 1}{x^3(x^2 + xy_1(x) + y_1^2(x))}$$

on en déduit, d'abord $y_1(x) > x$, puis, en majorant le numérateur de la fraction par $3x^2 y_1(x)$ et en minorant le dénominateur par $x^4 y_1(x)$:

$$x < y_1(x) < x + \frac{3}{x^2} \tag{4}$$

La droite $\mathscr{A}$, d'équation $y - x = 0$ est donc asymptote à $\mathscr{C}$; $\mathscr{C}$ se trouve au-dessus de l'asymptote pour $x > x''$.

— Pour $x < x'''$, où $x''' < -1$ est choisi, de valeur absolue assez grande, l'unique racine de $g_x(y) = 0$ vérifie $y_1(x) < -1/\sqrt{-x}$. On retrouve ainsi l'encadrement (4) et on en déduit la même conclusion.

On peut même affiner (4) en le remplaçant par :

$$y_1(x) - x \sim \frac{1}{x^2}.$$

Autre méthode. — On peut étudier, au voisinage de l'origine la courbe $\mathscr{C}_\infty$ transformée de $\mathscr{C}$ par $(x, y) \longmapsto (1/x, 1/y)$, qui admet l'équation :

$$X - Y + g(X, Y) = 0 \qquad \text{avec} \qquad g(X, Y) = \frac{X^6Y^3 - 3X^4Y^2}{X^2 + XY + Y^2}$$

(On prolonge par : $g(0, 0) = (0,0)$).

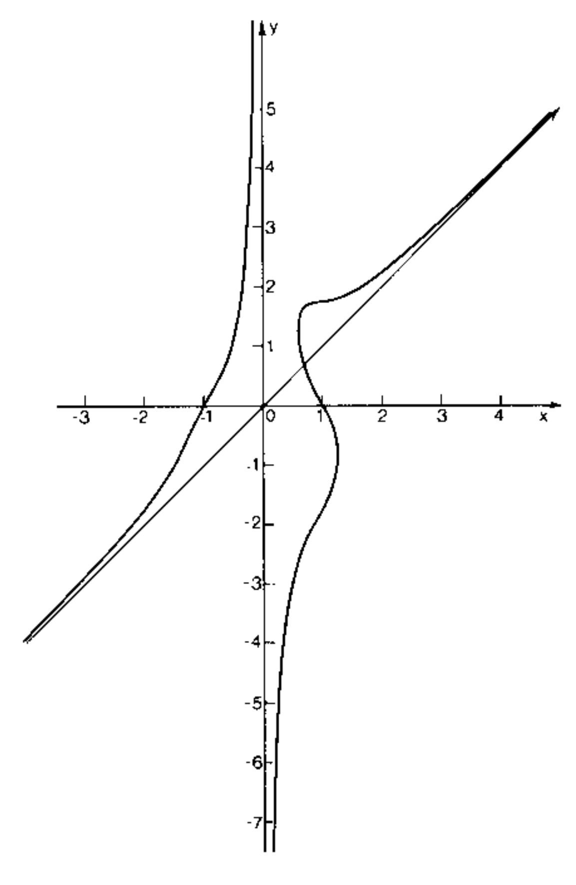


FIG. 29.

REMARQUE. — ***Étude de la concavité en un point.*** — L'étude systématique de la concavité de $\mathscr{C}$ (i.e. de la concavité des arcs dont le support est inclus dans $\mathscr{C}$) n'est pas facile. Cependant il est aisé de chercher la concavité *en un point donné de* $\mathscr{C}$. Étudions l'exemple précédent :

Considérons le point $m_0 = O - \mathbf{i}$. Nous avons déjà vu qu'au voisinage de m_0, $\mathscr{C}$ est le support d'un C^∞-arc plongé (et même cartésien) d'équation $y = \varphi(x)$. La fonction φ est définie implicitement par : $x^3\varphi(x)^3 - x^6 - 3x^2\varphi(x) + 1 = 0$.

Par dérivation on obtient :

$$3x^2\varphi(x)^3 + 3x^3\varphi(x)^2\varphi'(x) - 6x^5 - 6x\varphi(x) - 3x^2\varphi'(x) = 0$$

et, en utilisant $\varphi(-1) = 0$, on retrouve : $\varphi'(-1) = 2$.

Le lecteur vérifiera que, par une nouvelle dérivation, on trouve : $\varphi''(-1) = -2$.

Il en résulte qu'en m_0 la concavité est tournée « du côté des $y < 0$ ». On constate sur la figure que $\mathscr{C}$ présente au moins deux points d'inflexion d'abscisse négative. (Cet exemple prouve le caractère approximatif de ce genre de tracé : la présence de ces deux points d'inflexions n'était absolument pas prévisible).

* Le lecteur pourra calculer, après étude du chapitre **2**, la valeur absolue du rayon de courbure en m_0 : $R = 5^{3/2}/2 = 5{,}5902_*$.

EXEMPLE DE COURBE NON ALGÉBRIQUE. — $f(x, y) = x^2 - y^2 - \sin(xy)$.

Régionnement. — $\mathscr{C}$ qui est conservée par la symétrie s_0 et par la rotation $r(O, \pi/2)$, est incluse dans la partie du plan d'équation $|x^2 - y^2| \leqslant 1$, limitée par les hyperboles $(L) x^2 - y^2 = 1$, $(L') x^2 - y^2 = -1$ et contenant O.

Étude au voisinage de O. On calcule :

$$f'_x(x, y) = 2x - y\cos(xy); \qquad f'_y(x, y) = -2y - x\cos(xy) \tag{5}$$

On en déduit que O est un point singulier et que : $r = 2, s = -1, t = -2$. Au voisinage de O on a deux arcs dont les pentes des tangentes en O sont données par $2\mu/(1 - \mu^2) = 2$; les angles de Ox et de ces tangentes sont α et $\alpha + \pi/2$ avec $\alpha = 1/2 . \text{Arc tg } 2$; à cause de s_O, il s'agit de tangentes d'inflexion.

Construction. — $\mathscr{C}$ est engendrée, quand t varie, par $H_t \cap K_t$, où H_t et K_t sont les hyperboles d'équations respectives $xy = t$ et $x^2 - y^2 = \sin t$.

$K_{\pi/2 + 2k\pi}$ est L et, aux points $L \cap H_{\pi/2+2k\pi}$, $\mathscr{C}$ et L ont la même tangente ; en effet aux points considérés les dérivées partielles du premier ordre sont, d'après (5), les mêmes pour f et pour $(x, y) \longmapsto x^2 - y^2$.

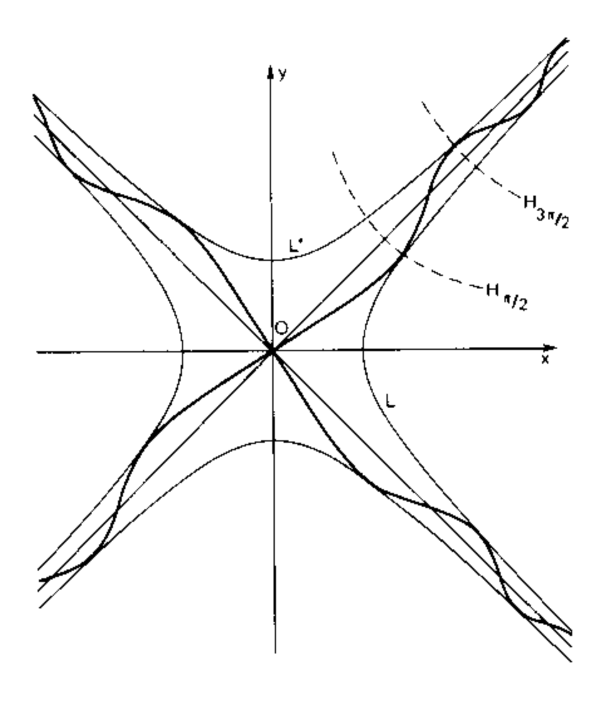


FIG. 30.

On peut tracer une ébauche de la courbe que l'on peut préciser en remarquant que $\mathscr{C}$ se déduit par la symétrie s_0 suivie de la rotation $r(O, \pi/2)$ du support $\mathscr{C}'$ du C^∞-arc paramétré $([0, +\infty[, g)$ tel que :

$$\forall t \in [0, +\infty[\qquad g(t) \doteq O + \dot{\rho}(t)\mathbf{u}_{\theta(t)}$$

où :

$$\rho(t) = \sqrt[4]{4t^2 + \sin^2 t}, \quad 2\theta(t) = \pi/2 - \text{Arc tg}\,\frac{\sin t}{2t} \text{ si } t > 0$$

et

$$2\theta(0) = \text{Arc tg } 2.$$

1.6. THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES ENVELOPPES DE DROITES

La théorie des enveloppes est difficile, et nous n'en aborderons que des aspects élémentaires (le véritable cadre de cette théorie est celui de la géométrie projective qui n'est pas étudiée dans ce cours).

L'étude qui suit est essentiellement affine. $(\mathscr{E}, E)$ désigne un espace affine normé de dimension 2 ou 3 (qui sera quelquefois supposé euclidien pour la commodité des calculs).

1.6.*1*. Position du problème

Dans tout le sous-chapitre, on se donne un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une famille, $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$, de droites affines de $\mathscr{E}$; la direction de la droite $\mathscr{D}_t$ est notée D_t.

DÉFINITION. — **S'il existe un arc paramétré de classe C^1 au moins, défini sur I et admettant, pour tout $t \in I$, la droite $\mathscr{D}_t$ pour tangente au point de paramètre t, on dit que cet arc est *une* enveloppe de la famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$.**

EXEMPLE. — Si la famille est constante (i.e. si, pour tout $t \in I$, $\mathscr{D}_t$ est une droite fixe $\mathscr{D}$), tout arc de support inclus dans $\mathscr{D}$ et admettant une tangente en tout point est enveloppe de la famille.

Nous aurons, bien entendu, à faire, lors de la recherche d'une enveloppe, des hypothèses de régularité sur l'application $t \longmapsto \mathscr{D}_t$. Faute de structure convenable sur l'ensemble des droites de $\mathscr{E}$, nous ne pourrons pas exprimer ces hypothèses sous forme intrinsèque ; nous aurons donc recours à un repère de $\mathscr{E}$ (étant entendu que l'on pourrait, chaque fois, vérifier l'invariance par changement de repère).

1.6.*2*. Cas où les $\mathscr{D}_t$ sont données par des équations cartésiennes

Dans ce paragraphe, on suppose que $\mathscr{E}$ est un plan.

Notation. — $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère $\mathscr{R} = (O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ et, pour chaque $t \in I$, $\mathscr{D}_t$ est donnée par une équation :

$$u(t)x + v(t)y + w(t) = 0$$

où u, v, w sont des applications connues de I dans $\mathbb{R}$, de classe C^k ($k \geqslant 1$), telles que u et v ne prennent pas simultanément le valeur 0. Par abus de langage, on dit que l'on obtient ainsi une *C^k-famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ définie cartésiennement.*

1° ***Exhibition d'une condition nécessaire.*** — Supposons qu'il existe une enveloppe (I, f), avec $f(t) = O + \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j}$, où φ et ψ sont de classe C^1 (au moins). La condition suivante est nécessairement vérifiée :

$$\forall t \in I \qquad (f(t) \in \mathscr{D}_t) \wedge (f'(t) \in D_t) \qquad \text{(I)}$$

Elle s'écrit :

$$\forall t \in I \quad \begin{cases} u(t)\varphi(t) + v(t)\psi(t) + w(t) = 0 & (1) \\ u(t)\varphi'(t) + v(t)\psi'(t) = 0 & (2) \end{cases}$$

Or, par dérivation de (1), compte tenu de (2), on a encore :

$$\forall t \in I \qquad u'(t)\varphi(t) + v'(t)\psi(t) + w'(t) = 0 \qquad (1')$$

Ainsi, *pour chaque* $t \in I$, $(\varphi(t), \psi(t))$ *est solution du système :*

$$(u(t)x + v(t)y + w(t) = 0) \wedge (u'(t)x + v'(t)y + w'(t) = 0) \quad (L_t)$$

2° *Étude de la réciproque.* — Nous supposons ici qu'il existe un couple (φ, ψ) d'applications de classe C^m, $m \geqslant 1$, vérifiant (1) et (1′). En dérivant (1), nous constatons, compte tenu de (1′), que (φ, ψ) vérifie (1) et (2).

Désignons par γ l'arc paramétré (I, f), avec $f(t) = O + \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\,\mathbf{j}$, qui vérifie la condition nécessaire I, et cherchons s'il est enveloppe. Nous utiliserons les deux résultats suivants :

α) *Soit* $M_0(t_0)$ *un point régulier de* γ. Il existe une tangente à γ en M_0 et, d'après I, c'est $\mathscr{D}_{t_0}$.

β) *Soit* $M_0(t_0)$ *un point stationnaire de* γ *en lequel il existe une tangente.* C'est qu'il existe un premier entier caractéristique non nul p, avec

$$f'(t_0) = \ldots = f^{(p-1)}(t_0) = 0, \qquad f^{(p)}(t_0) \neq 0, \quad (1 < p \leqslant m). \quad (3)$$

A condition que $(p - 1) \leqslant k$, on peut dériver $p - 1$ fois l'égalité (2) par la formule de Leibniz et, compte tenu de (3) en déduire :

$$u(t_0)\varphi^{(p)}(t_0) + v(t_0)\psi^{(p)}(t_0) = 0, \qquad \text{i.e.} \qquad f^{(p)}(t_0) \in D_{t_0}$$

Ici encore *la tangente à* γ *en* M_0 *est* $\mathscr{D}_{t_0}$.

CONCLUSION. — **Pour que l'arc γ considéré soit enveloppe, il suffit qu'en chacun de ses points il existe un premier entier caractéristique non nul et au plus égal à $k + 1$ (condition qui est vérifiée si γ est régulier).**

REMARQUE. — Il va de soi que si γ admet un point stationnaire en lequel il n'existe pas de tangente (i.e. en lequel tous les entiers caractéristiques sont nuls), γ n'est pas enveloppe (cette situation se produit dans le cas où, sans être fixes, les $\mathscr{D}_t$ contiennent un point fixe).

Pratique. — On suppose $k \geqslant 2$. On introduit l'application $\delta : t \longmapsto u(t)v'(t) - u'(t)v(t)$, et on constate, par application des formules de Cramer :

PROPOSITION. — **Si $\delta : I \to \mathbb{R}$ ne prend pas la valeur 0, il existe un unique couple (φ, ψ) d'applications vérifiant (1) et (1′). Elles s'écrivent :**

$$\varphi(t) = \frac{v(t)w'(t) - v'(t)w(t)}{u(t)v'(t) - u'(t)v(t)}, \qquad \psi(t) = \frac{w(t)u'(t) - w'(t)u(t)}{u(t)v'(t) - u'(t)v(t)} \quad (4)$$

et sont de classe C^{k-1}. Il y a, dans ce cas, au plus une enveloppe.

Comme δ *ne prend pas la valeur* 0, *l'arc* γ *défini à l'aide de* (4) *est régulier si et seulement si l'application* Δ *définie par :*

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} u(t) & v(t) & w(t) \\ u'(t) & v'(t) & w'(t) \\ u''(t) & v''(t) & w''(t) \end{vmatrix}$$

ne prend pas la valeur 0. *Lorsque cette condition est remplie,* γ *est enveloppe unique.*

Pour tout $t \in I$ on a effet :

$$\begin{cases} u(t)\varphi'(t) + v(t)\psi'(t) = 0 \\ u'(t)\varphi'(t) + v'(t)\psi'(t) = -(u''(t)\varphi(t) + v''(t)\psi(t) + w''(t)) \end{cases}$$

(la première de ces égalités est (2), l'autre est déduite de (1) par dérivation).

On en déduit que : $\forall t \in I \quad (\varphi'(t), \psi'(t)) \neq (0, 0)$

s'écrit : $\forall t \in I \quad u''(t)\varphi(t) + v''(t)\psi(t) + w''(t) \neq 0$

et aussi (compte tenu de la définition de φ et ψ) : $\forall t \in I \ \Delta(t) \neq 0$.

• L'étude systématique du cas où δ prend la valeur 0 ne sera pas entreprise (nous verrons des exemples). Nous partagerons donc en général l'intervalle I en sous intervalles sur lesquels δ ne s'annule pas

3° COMPLÉMENTS. — On reprend la C^k-famille $(\mathscr{D}_t)_{t\in I}$ définie cartésiennement au début du **1.6.2**, en se limitant au cas où $k \geqslant 2$, où $\delta = uv' - u'v$ ne prend pas la valeur 0, et où l'arc (I, f), défini par le couple (φ, ψ) donné par (4), est enveloppe unique.

a) Il est clair que *toute* C^k-*famille* $(\mathscr{D}_t^*)_{t\in I}$, *définie cartésiennement et telle que* $\mathscr{D}_t^* = \mathscr{D}_t$ *pour tout* $t \in I$, *s'obtient en remplaçant* (u, v, w) *par* $(\rho u, \rho v, \rho w)$ *où* $\rho : I \to \mathbb{R}$, *de classe* C^k, *ne prend pas la valeur* 0. On constate que, pour tout $t \in I$, (L_t) est remplacé par :

$$\begin{cases} u(t)x + v(t)y + w(t) = 0 \\ u'(t)x + v'(t)y + w'(t) + \rho'(t)/\rho(t).[u(t)x + v(t)y + w(t)] = 0 \end{cases}$$

Bien que la seconde équation ait changé, ce système admet $(\varphi(t), \psi(t))$ pour solution unique; $(\mathscr{D}_t^*)_{t\in J}$ *admet donc* (I, f) *pour enveloppe unique.* Notons que ρ et Δ sont remplacés par $\rho^2\delta$ et $\rho^3\Delta$.

b) *Changement de paramètre.* — Soit θ un C^k-difféomorphisme d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ sur I. Cherchons l'enveloppe de la famille de droites $(\mathscr{D}'_\lambda = \mathscr{D}_{\theta(\lambda)})_{\lambda\in J}$. Nous avons à résoudre, pour tout $\lambda \in J$, un système L'_λ qui, compte tenu de la non nullité de $\theta'(\lambda)$, s'écrit :

$$\begin{cases} u(\theta(\lambda))x + v(\theta(\lambda))y + w(\theta(\lambda)) = 0 \\ u'(\theta(\lambda))x + v'(\theta(\lambda))y + w'(\theta(\lambda)) = 0 \end{cases}$$

On constate qu'il s'agit de $L_{\theta(\lambda)}$ et on en déduit que L'_λ admet la solution unique $(\varphi(\theta(\lambda)), \psi(\theta(\lambda)))$; $(\mathscr{D}'_\lambda)_{\lambda\in J}$ *admet donc l'arc paramétré* $(J, f \circ \theta)$, C^{k-1}- *équivalent à* (I, f), *pour enveloppe unique.* Ici ρ et Δ sont remplacés par $\theta' . \delta \circ \theta$ et $\theta'^3 . \Delta \circ \theta$.

• Dans les deux cas, les deux familles de droites jouent des rôles symétriques.

• Terminons par quelques exemples.

EXEMPLE I. — On donne $\mathscr{D}_t$, $t \in \mathbb{R}$, par : $2tx - y - 2pt^2 = 0$ $(p \in \mathbb{R}_+^*)$.

Ici L_t est : $(2tx - y - 2pt^2 = 0) \wedge (2x - 4pt = 0)$.

Il est de Cramer pour toute valeur de t et donne la solution unique :

$$x = 2pt, \quad y = 2pt^2$$

$\gamma = (\mathbb{R}, f)$, avec $f(t) = O + 2pt\,\mathbf{i} + 2pt^2\,\mathbf{j}$ est un C^∞ arc-paramétré qui est visiblement régulier, et est donc l'enveloppe unique de la famille.

REMARQUE. — L'équation cartésienne de supp γ s'obtient en éliminant $t \in \mathbb{R}$ entre les deux équations de L_t. Ceci revient à écrire que $2tx - y - 2pt^2 = 0$, équation à l'inconnue $t \in \mathbb{R}$, admet une racine double, ce que l'on peut faire ici en annulant un discriminant : on trouve $x^2 - 2py = 0$ (supp γ est une parabole).

Cette méthode, souvent commode, pose des problèmes de réciproque : elle fournit seulement une partie du plan à laquelle appartient le support de l'enveloppe si elle existe.

EXEMPLE II. — On donne $\mathscr{D}_t$, $t \in \mathbb{R}$, par :

$$(3t^2 - t^6)x + (3t^4 - 1)y - 2t^3 = 0.$$

$$\text{Ici } L_t \text{ est : } \begin{cases}(3t^2 - t^6)x + (3t^4 - 1)y - 2t^3 = 0 \\ t(1 - t^4)x + 2t^3y - t^2 = 0\end{cases}$$

Pour $t \neq 0$, il est de Cramer, de solution unique : $x = \dfrac{t}{t^4 + 1}$, $y = \dfrac{t^3}{t^4 + 1}$. On constate que $\gamma = (\mathbb{R}, f)$, où $f(t) = O + \dfrac{t}{t^4 + 1}\mathbf{i} + \dfrac{t^3}{t^4 + 1}\mathbf{j}$ est le seul arc de classe C^1 qui vérifie L_t pour tout $t \in \mathbb{R}$ (y compris $t = 0$). Il est C^∞ et on constate qu'il est régulier ; il est donc enveloppe unique de la famille. Son support est une lemniscate de Bernoulli (cf. **1**.2.*1*, 1° et fig. 3).

EXEMPLE III. — On donne $\mathscr{D}_t$, $t \in \mathbb{R}$, par : $x \sin t - y + \cos t = 0$.

Ici L_t est : $(x \sin t - y + \cos t = 0) \wedge (x \cos t - \sin t) = 0$.

— Pour $t \in \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$, L_t n'a pas de solution : $(\mathscr{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ n'a donc pas d'enveloppe.

— Pour $t \notin \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$, L_t a la solution unique : $x = \operatorname{tg} t$, $y = 1/\cos t$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, notons $I_k =]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$. On constate que chaque famille $(\mathscr{D}_t)_{t\in I_k}$ admet l'enveloppe unique $\gamma_k = (I_k, t \longmapsto O + \operatorname{tg} t\,\mathbf{i} + 1/\cos t\,.\mathbf{j})$ dont le support est, selon la parité de k, l'une ou l'autre des branches d'une hyperbole $\mathscr{H}$, dont les asymptotes sont précisément les droites $\mathscr{D}_{\pi/2+k\pi}$ qu'il a fallu écarter.

REMARQUE. — L'étude des équations trigonométriques apprend que l'équation $x \sin t - y + \cos t = 0$, à l'inconnue $t \in \mathbb{R}$ a une racine double si et seulement si $x^2 + 1 = y^2$: c'est une équation de $\mathscr{H}$.

4° ***Cas particulier.*** — Ici le plan est euclidien et rapporté à un repère $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ orthonormal. On donne une C^k-famille de droites $(\mathscr{D}_\lambda)_{\theta\in I}$, *par leurs équations normales :*

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p(\theta) = 0 \qquad (1)$$

où $p : I \to \mathbb{R}$ est de classe $C^k (k \geqslant 1)$. On a ici :

$$x \cos(\theta + \pi/2) + y \sin(\theta + \pi/2) - p'(\theta) = 0 \qquad (1')$$

équation normale d'une droite $\mathscr{D}'_\theta$ orthogonale à $\mathscr{D}_\theta$. Pour tout $\theta \in I$, L_θ est un système de Cramer. La seule solution possible est ainsi le C^{k-1}-arc paramétré $\gamma = (I, f)$ avec :

$$f(\theta) = O + p(\theta)\mathbf{u}_\theta + p'(\theta)\mathbf{v}_\theta$$

Si γ admet une tangente au point de paramètre θ, il s'agit de $\mathscr{D}_\theta$ (et alors $\mathscr{D}'_\theta$ est la normale). Comme :

$$f'(\theta) = (p(\theta) + p''(\theta))\mathbf{v}_\theta$$

on peut affirmer que γ est enveloppe de la famille $(\mathscr{D}_\theta)_{\theta\in I}$ au moins s'il est régulier, *i.e* si $p + p''$ ne prend pas la valeur 0.

REMARQUE. — En dérivant (1'), on obtient :

$$x \cos \theta + y \sin \theta - (-p''(\theta)) = 0 \qquad (1'')$$

En associant (1') et (1''), on obtient (en général) l'enveloppe de la famille des normales à γ, i.e.

la développée de γ (cf. 2.2.1, 5°); le centre de courbure de γ au point de paramètre θ est (en général) :

$$O - p''(\theta)\mathbf{u}_\theta + p'(\theta)\mathbf{v}_\theta = f(\theta) - (p(\theta) + p''(\theta))\mathbf{u}_\theta$$

et on a :
$$|\mathbf{R}_\theta| = |p(\theta) + p''(\theta)|.$$

De même, en associant à (1) l'équation :

$$x \cos(\theta - \pi/2) + y \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \int_{\theta_0}^{\theta} p(u)\,\mathrm{d}u = 0$$

on obtient une développante Δ_{θ_0} de γ (cf. 2.2.1, 7°).

Exemple. — *Astroïde.*

Deux points q et q' décrivent deux droites orthogonales de $\mathscr{E}_2$ euclidien de façon que $\mathrm{d}(q, q')$ garde une valeur constante a. On peut prendre les deux droites pour axes de coordonnées et repérer le couple (q, q') par des coordonnées polaires du point i de $\mathscr{E}_2$ se projetant orthogonalement en q sur Ox et en q' sur Oy, qu'il est commode d'écrire $(\pi/2 - \theta, a)$, avec $\theta \in [0, 2\pi[$. La droite qq' s'écrit ainsi

$$(\mathscr{D}_\theta) \quad x \cos\theta + y \sin\theta - a \sin\theta \cos\theta = 0$$

L'enveloppe éventuelle est ainsi l'arc paramétré $([0, 2\pi[, f)$, avec

$$f(\theta) = O + a \sin^3\theta\,\mathbf{i} + a \cos^3\theta\,\mathbf{j}$$

$(p + p'')(\theta) = 0$ s'écrivant $\sin\theta\cos\theta = 0$, les seuls points stationnaires de γ sont ceux qui correspondent à $\theta \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$. En calculant $f''(\theta)$, on constate qu'en chacun de ces points γ admet une tangente de rebroussement, qui est la droite $\mathscr{D}_\theta$ correspondante.
On dit que γ est une *astroïde*. On constate que la développée γ' de γ s'en déduit (fig. 31) par une similitude de centre O (attention cependant aux points de γ en lesquels $\mathbf{R}_\theta = 0$!).

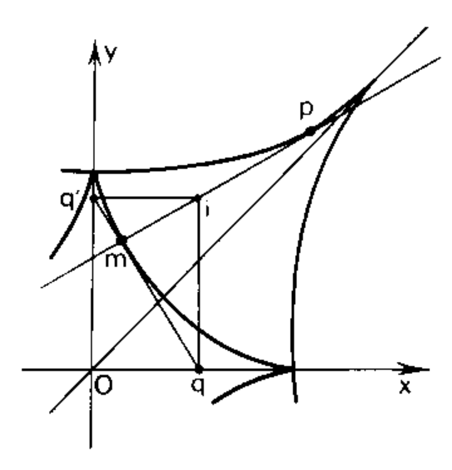


Fig. 31.

1.6.3. Cas d'une famille définie paramétriquement

{ *Dans ce paragraphe,* $\mathscr{E}$ *est de dimension* 2 *ou* 3. }

1° ***Notations.*** — On donne deux applications a et $\mathbf{b}$ de classe C^k $(k \geqslant 1)$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathscr{E}$ et dans $E\backslash\{0\}$ respectivement. Pour

chaque $t \in I$, on désigne par $\mathscr{D}_t$ la droite affine $a(t) + \mathbb{R}\mathbf{b}(t)$ de $\mathscr{E}$. On obtient ici une *C^k-famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ définie paramétriquement.* On cherche si elle admet une enveloppe.

2° *Exhibition d'une condition nécessaire.* — THÉORÈME. — **Avec les notations du 1°, une condition nécessaire d'existence d'une enveloppe est :**

$$\forall t \in I \qquad \textbf{le système} \quad (a'(t), \mathbf{b}(t), \mathbf{b}'(t)) \quad \textbf{est lié} \qquad \text{(I)}$$

Supposons qu'il existe une enveloppe $\gamma = (I, f)$, arc paramétré de classe C^m. C'est qu'il existe une application $\lambda : I \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in I \qquad f(t) = a(t) + \lambda(t)\mathbf{b}(t) \qquad (1)$$

Cette application est de classe $C^{\inf(k,m)}$, ainsi qu'on le constate en munissant provisoirement $\mathscr{E}$ d'une structure euclidienne et en calculant :

$$\lambda(t) = \|\mathbf{b}(t)\|^{-2}(\overrightarrow{a(t)f(t)} \mid \mathbf{b}(t))$$

On a par dérivation de (1) :

$$\forall t \in I \qquad f'(t) = a'(t) + \lambda'(t)\mathbf{b}(t) + \lambda(t)\mathbf{b}'(t) \qquad (1')$$

et comme nécessairement : $f'(t) \in \mathbb{R}\mathbf{b}(t)$, on a (I). □

REMARQUE. — Dans le cas de $\mathscr{E}_3$, (I) n'est qu'exceptionnellement vérifiée$_*$. En anticipant sur 3, on constate que (I) équivaut à :

La C^k-nappe géométrique réglée représentée par $(I \times \mathbb{R}, F)$, où

$$F(u, v) = a(u) + v\mathbf{b}(u)$$

est développable. $_*$

3° *Étude de la réciproque.* — Les notations étant celles du 1°, nous supposons que la condition (I) du 2° est remplie.

Une enveloppe ne peut être que de la forme $\gamma = (I, f)$, avec $f_\lambda(t) = a(t) + \lambda(t)\mathbf{b}(t)$, où $\lambda : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 au moins et vérifie :

$$\forall t \in I \qquad a'(t) + \lambda(t)\mathbf{b}'(t) \in \mathbb{R}\mathbf{b}(t) \qquad (2)$$

(condition équivalente à : $\forall t \in \mathbb{R} \quad f'_\lambda(t) \in \mathbb{R}\mathbf{b}(t)$).

En munissant provisoirement $\mathscr{E}$ d'une structure euclidienne orientée, on constate que (2) s'écrit :

$$\forall t \in I \qquad \lambda(t)\mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{b}'(t) = a'(t) \wedge \mathbf{b}(t)$$

ce qui, compte tenu de ce que (I) implique que $\mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{b}'(t)$ et $a'(t) \wedge \mathbf{b}(t)$ sont colinéaires, fournit un unique $\lambda(t)$ pour tout t tel que $\mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{b}'(t) \neq 0$. D'où :

PROPOSITION. — **Si la condition (I) est remplie, si l'application $\mathbf{b} \wedge \mathbf{b}'$ ne prend pas la valeur 0 et si $k \geqslant 2$, alors il existe une unique solution possible, à savoir le C^{k-1}-arc paramétré (I, f) défini sans ambiguïté par :**

$$(f = a + \lambda\mathbf{b}) \wedge (\lambda\mathbf{b} \wedge \mathbf{b}') = a' \wedge \mathbf{b}) \qquad (3)$$

Cet arc est effectivement enveloppe si et seulement s'il admet une tangente en chacun de ses points, condition qui est remplie s'il est régulier.

Il reste, dans chaque cas concret, à étudier les $t \in I$ tels que $\mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{b}'(t) = 0$, et à éventuellement scinder I en sous-intervalles sur lesquels on peut appliquer le résultat précédent.

***Cas où* dim $\mathscr{E} = 2$.** — L'énoncé précédent se simplifie en ce sens que (I) est automatiquement remplie et que (3) prend la forme, d'un emploi plus aisé :

$$(\forall t \in I) \qquad f(t) = a(t) + \frac{[a'(t), \mathbf{b}(t)]}{[\mathbf{b}(t), \mathbf{b}'(t)]}\, \mathbf{b}(t) \tag{4}$$

4° EXEMPLE. — $\mathscr{E}_3$ est euclidien orienté, rapporté à $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ orthonormal direct. $(\mathscr{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est définie, avec les notations du 1°, par :

$$\begin{cases} a(t) = O + (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j} \\ \mathbf{b}(t) = -\sin t\, \mathbf{i} + \cos t\, \mathbf{j} + \alpha \mathbf{k} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

* (le lecteur vérifiera que l'arc paramétré $(\mathbb{R}, a)$ représente une développante de cercle 2.2.3, 7°). *

On constate aisément que (I) est remplie et que, $t \longmapsto \mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{b}'(t)$ ne prenant pas la valeur 0, (1) détermine un unique arc paramétré

$$\gamma = (\mathbb{R}, t \longmapsto O + \cos t\, \mathbf{i} + \sin t\, \mathbf{j} + \alpha t\, \mathbf{k})$$

qui est visiblement un arc régulier (hélice circulaire), et est ainsi l'enveloppe (unique) de la famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

5° ***Compléments.*** — On reprend la C^k-famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ où $\mathscr{D}_t$ désigne $a(t) + \mathbb{R}\mathbf{b}(t)$, en se limitant au cas où (I) est vérifié, où $k \geqslant 2$, où $\mathbf{b} \wedge \mathbf{b}'$ ne prend pas la valeur 0 et où le C^{k-1}-arc paramétré (I, f) défini par (3) est effectivement enveloppe unique.

Le lecteur vérifiera que, dans ces conditions :

a) Toute C^k-famille $(\mathscr{D}_t^*)_{t \in I}$ définie paramétriquement et *telle que $\mathscr{D}_t^* = \mathscr{D}_t$ pour tout $t \in I$ admet (I, f) pour enveloppe unique.*

[On utilisera le fait qu'une telle famille s'obtient en remplaçant (a, b) par $(a + \omega\mathbf{b}, \rho\mathbf{b})$, où ρ ne prend pas la valeur 0, et que l'application $\mathbf{b} \wedge \mathbf{b}'$ est multipliée par ρ^2].

b) Si dim $\mathscr{E} = 2$, *toute C^k-famille $(\mathscr{D}_t^*)_{t \in I}$ définie cartésiennement et telle que $\mathscr{D}_t^* = \mathscr{D}_t$ pour tout $t \in I$ admet (I, f) pour enveloppe unique.*

[On peut se limiter (grâce à 1.6.2, 3°) au cas où $\mathscr{D}_t^*$ est donnée par l'équation cartésienne :

$$[X - a(t), \mathbf{b}(t)] = 0, \quad \text{où } X \text{ est le point générique de } \mathscr{E}.$$

On obtient L_t en adjoignant :

$$[X - a(t), \mathbf{b}'(t)] - [a'(t), \mathbf{b}'(t)] = 0$$

L_t admet clairement la solution unique : $X = a(t) + \lambda\mathbf{b}(t)$ avec

$$\lambda[\mathbf{b}(t), \mathbf{b}'(t)] = [a'(t), \mathbf{b}'(t)], \text{ i.e. } \quad X = f(t)].$$

c) Pour tout $\theta \in \mathrm{Diff}^k(J, I)$ la C^k-famille de droites $(\mathscr{D}'_\lambda = \mathscr{D}_{\theta(\lambda)})_{\lambda \in J}$ admet l'arc paramétré $(J, f \circ \theta)$, C^{k-1} équivalent à (I, f) pour enveloppe unique.

En conclusion, on dispose d'une grande souplesse dans la recherche de l'enveloppe d'une C^k-famille de droites d'un plan dont l'ensemble des éléments est imposé (par exemple l'ensemble des normales à un arc paramétré).

EXERCICES

• Nous considérerons comme donnés un espace affine $\mathscr{E}$, de dimension 2 ou 3, et un repère $\mathscr{R}$ de $\mathscr{E}$. Il sera commode (même si ce n'est indispensable que dans des exercices que le lecteur reconnaîtra aisément) de supposer que $\mathscr{E}$ a été muni d'une structure euclidienne et $\mathscr{R}$ choisi orthonormal.

• Nous désignerons souvent par la même lettre un arc paramétré et son support, un point de l'arc et son image ; les invariants affines (et plus tard métriques) associés au point de l'arc seront considérés comme liés à l'image (quelques précautions sont à prendre dans le cas de points multiples).

• La notion générale de « courbe » relève de l'étude des sous-variétés de $\mathscr{E}_n$ (cf. 3.3) : une courbe apparaîtra (sous certaines conditions) comme une réunion de supports d'arcs plongés. Nous conformant à la tradition, dans l'énoncé des exercices nous désignerons par « courbes » (et plus tard par « surfaces ») des sous-ensembles de $\mathscr{E}_2$ et de $\mathscr{E}_3$ que le contexte permettra d'identifier (en général le support d'un arc paramétré ou une réunion finie de tels supports).

• Le mot « lieu » doit être compris au sens d'ensemble.

• Ces conventions sont valables pour tous les exercices du cours.

Courbe de Peano

1.01. — Soit C le compact $[0, 1]^2$ de $\mathbb{R}^2$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, nous allons définir par récurrence une subdivision $(C_n^k)_{0 \leqslant k \leqslant 4^n - 1}$ de C en 4^n carrés égaux (de côté $1/2^n$) C est divisé en quatre carrés égaux (de côté 1/2) numérotés arbitrairement : C_1^0, C_1^1, C_1^2, C_1^3. La subdivision $(C_n^k)_{0 \leqslant k \leqslant 4^n - 1}$ étant supposée construite on obtient la subdivision $(C_{n+1}^k)_{0 \leqslant k \leqslant 4^{n+1} - 1}$ en subdivisant chaque C_n^k en quatre carrés égaux :

$$C_n^0 = \bigcup_{k=0}^{3} C_{n+1}^k, \ldots, C_n^{k'} = \bigcup_{k=4k'}^{4k'+3} C_{n+1}^k, \ldots$$

Soit alors $t \in [0, 1[$. A tout $n \in \mathbb{N}^*$ associons le carré $K_n = C_n^{E(4^n t)}$.

a) Montrer que $K_{n+1} \subset K_n$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} K_n = \{(x(t), y(t))\}$.

b) Montrer que les applications x et y ainsi obtenues sont uniformément continues et qu'elles se prolongent en des applications continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

c) Vérifier que $t \longmapsto (x(t), y(t))$ est surjective de $[0, 1]$ dans C. En déduire que C est le support d'un arc continu.

Géométrie plane

1.02. — Construire la « courbe » définie par l'une des équations :

$$y = \sqrt{x^5 - 1}\ ; \qquad y = \sqrt{x^2 - 1} - x\ ; \qquad y = \sqrt[3]{x^3 + 1} + \sqrt[3]{x^3 - 1}\ ;$$

$$y = e^{1/x}\sqrt{(x(x + 2)}$$

$$y = x \exp(2x/(x^2 - 1))\ ; \quad y = x^{-3} \operatorname{Log}(1 + x + x^2/2) - x^{-2}\ ; \quad y = \operatorname{ch} x \cos x$$

$$y = 2\sqrt[3]{x^2 + 2} + \varepsilon\sqrt{(4x^2 + 1)/(x + 2)}, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}$$

1.03. — Étudier les branches infinies de la « courbe » définie par l'une des équations :

$$y = \operatorname{Arc\,tg}\frac{x}{x - 1} - \frac{4x^2}{2x - 1}\ ; \qquad y = x + \sqrt{\frac{x^2(x + 2)}{x + 1}}$$

$$y = x^2 \operatorname{Arc\,sin} x/(x + 1)\ ; \qquad y = x \exp(\operatorname{Arc\,tg} x)\ ; \qquad y = (1 + x)^{\coth x}$$

$$y = x^{1 + 1/(\operatorname{Log} x)^2}\ ; \qquad y = (x + 1)^{1 + 1/\operatorname{Log} x}$$

1.04. — Symétries de la « courbe » d'équation : $y = (ae^x + b)/(ce^x + d)$.

1.05. — Étudier la déformation, quand le paramètre λ varie, de la « courbe » d'équation :

$$a)\ y = \text{Log}\frac{1-x}{1-\lambda x}; \qquad b)\ y = (\text{ch}\, x + \lambda\, \text{sh}\, x)^{1/x}; \qquad c)\ y = \lambda^{(\lambda^x)}.$$

Pour la dernière, on déterminera la nature du lieu des points d'inflexion éventuels (quand λ varie).

1.06. — Construire les supports des arcs paramétrés définis par :

$$\begin{cases} x = t^3 + t^4 \\ y = t^6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^5 + t^6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t^3 + t^4 \\ y = t^6 + t^7 \end{cases}$$

(dans chaque cas : étude directe au voisinage de l'origine).

1.07. — Construire les supports des arcs paramétrés définis par :

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{1-t^2} \\ y = \dfrac{t(1-2t^2)}{1-t^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{t^2+3t-2}{t^2-3t+2} \\ y = \dfrac{t^2-t+2}{t^2+t-2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2t}{(1+t^2)^2} \\ y = \dfrac{t^2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{1-t^2} \\ y = \displaystyle\int_0^t \frac{1-u}{\sqrt{1+u^2}}\,du \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{t} + \dfrac{2}{t+1} + \dfrac{3}{t-1} \\ y = \dfrac{2}{t} + \dfrac{3}{t+1} + \dfrac{1}{t-1} \end{cases}$$ (*asymptotes; alignement de trois points; inflexions*)

$$\begin{cases} x = te^t \\ y = t^{-1}e^t \end{cases}$$ (*concavité*) $$\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{t^2-9} \\ y = t(t-2) \end{cases}$$ (*alignement de trois points*)

$$\begin{cases} x = \cos t.(\sqrt{2}\cos t + 1) \\ y = \sin t.(\sqrt{2}\cos t - 1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \sqrt{|t+2|} + \sqrt{|t|} \\ y = \sqrt{|t^2-1|} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \sin t \\ y = \text{tg}\, t\,(1 - \sin t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int_0^t \cos 2u \sin u\, du \\ y = \displaystyle\int_0^t \sin 2u \cos u\, du \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t\,\text{Log}\, t \\ y = t^{-1}\,\text{Log}\, t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t - 2\,\text{ch}\, t \\ y = 2/\text{ch}\, t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (1 + 2t\sqrt{1-t^2})^{1/2} \\ y = (1 - 2t\sqrt{1-t^2})^{1/2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = e^t/\cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \text{ch}\, t/\text{sh}\, t \\ y = \cos t/\text{sh}\, t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (t+1)\exp(1/(t^2-1)) \\ y = (t-1)\exp(1/(t^2-1)) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = te^{2/t} \\ y = (t-2)e^{-1/t} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos t/3 + \sin t/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \text{tg}\, t + \sin t \\ y = 1/\cos t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1/\cos 3t \\ y = 1/\sin 2t \sin^2 3t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 5\,\text{Log}\, t^4/(t-2)^2 \\ y = t^2/(t-6) \end{cases}$$

1.08. — Étudier la déformation, quand le paramètre λ ou (λ, μ) varie, des supports des arcs paramétrés γ_λ, ou $\gamma_{\lambda,\mu}$ définis par :

a) $x = 1/2 . \mathrm{tg}^2 t - \lambda \cos t, \quad y = \mathrm{tg}\, t + \lambda \sin t$;

b) $x = t(t - \lambda)(t - 1)^{-2}, \quad y = t^{-1}(t - 1)^{-2}$;

c) $x = t + \lambda t^2, \quad y = t^2 + 4\mu/t$ (on déterminera la nature du lieu des points de rebroussement);

d) $x = t^2 + \lambda/t, \quad y = (t + 1)^2 + \mu/t$ (lieu des points de rebroussement; l'asymptote passe par un point fixe; parabole asymptote).

1.09. — Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 sur un voisinage de 0, telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ assez petit la droite d'équation $y = \lambda$ coupe la « courbe » $\mathscr{C}$ d'équation $y = f(x)$ en deux points m et m'. Soient p le milieu de mm' et q le point d'intersection des tangentes en m et m' a $\mathscr{C}$. Les droites $\mathscr{D}_{Op}$ et $\mathscr{D}_{Oq}$ ont-elles des limites quand λ tend vers 0 ?

1.10. — Construire le support $\mathscr{C}$ de l'arc paramétré γ défini par :

$$x = (1 + t^2)/(1 + t^4), \qquad y = t/(1 + t^4).$$

En s'inspirant sur l'étude du **1**.3.2, 2°, écrire une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une droite $\mathscr{D}$ telle que l'équation aux t des points de $\mathscr{D} \cap \mathscr{C}$ admette un système de racines donné (t_1, t_2, t_3, t_4). En déduire les points d'inflexion de γ (justification à l'appui).

1.11. — Étudier les arcs paramétrés représentés par :

$$x = \frac{1 - 2t - t^2}{1 - t}, \qquad y = \frac{2 - 3t - t^2}{1 - t}$$

Construire leurs supports.

1.12. — Soit γ l'arc paramétré défini par : $x = at^2$, $y = at^3$.

a) Lieu des points d'où on peut mener à γ deux tangentes orthogonales.

b) Lieu des points d'où l'on peut mener à γ trois tangentes telles que le cercle circonscrit au triangle formé par les points de contact soit centré sur $\operatorname{supp} \gamma$.

1.13. — Soit $\mathscr{C}$ la lemniscate de Bernoulli représentée par :

$$x = t/(1 + t^4); \qquad y = t^3/(1 + t^4)$$

a) Former, sous forme de relations entre les fonctions symétriques élémentaires σ_i de leurs paramètres t_i, une condition nécessaire et suffisante pour que quatre points m_i, $i \in \mathbb{N}_4$, de $\mathscr{C}$ soient alignés.

b) Soit m un point de $\mathscr{C}$ tel que la tangente en m à $\mathscr{C}$ recoupe $\mathscr{C}$ en deux points m_1 et m_2. Déterminer le centre du cercle circonscrit au triangle Om_1m_2.

c) Montrer que par un point m de $\mathscr{C}$ de paramètre $t \neq 0$ passent deux tangentes à $\mathscr{C}$ dont les points de contact p_1 et p_2 sont distincts de m. Écrire une équation de la droite $\mathscr{D}_t$ qui contient p_1 et p_2. * Trouver l'enveloppe des familles $(\mathscr{D}_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$ et $(\mathscr{D}_t)_{t \in \mathbb{R}_-^*}$. *

1.14. — Soit $\mathscr{C}$ la « courbe » représentée par : $x = 1/P(t)$, $y = t/P(t)$, où P est un polynôme de degré 3. Rechercher la limite éventuelle de la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathscr{C}$ ainsi définie : $m_0 \in \mathscr{C}$ est donné, m_{n+1} est le point où la tangente en m_n à $\mathscr{C}$ recoupe la « courbe ».

COORDONNÉES POLAIRES (REPÈRES ORTHONORMAUX)

1.15. — Construire les supports des arcs paramétrés définis, en coordonnées polaires, par :

$$\begin{cases}\theta = t + 1/t \\ \rho = t^2 - 4\end{cases} \qquad \begin{cases}\theta = t - 2\sin t \\ \rho = \operatorname{tg} t\end{cases} \qquad \begin{cases}\theta = \operatorname{th} t \\ \rho = t/\operatorname{sh} t\end{cases}$$

1.16. — Construire les supports des arcs paramétrés définis en coordonnés polaires par $\rho = af(\theta)$, où $f(\theta)$ admet successivement les expressions :

$$\sin n\theta, \text{ ou } \cos n\theta, \text{ ou } \operatorname{tg} n\theta, \; n \in \{1, 2, 3, 4, 1/2, 1/3, 2/3\}$$

$$\frac{\cos p\theta}{\cos q\theta}, \text{ ou } \frac{\cos p\theta}{\sin q\theta}, \; (p, q) \in \{2, 3\} \text{ puis } (p, q) \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$$

$$\frac{g(\theta)}{h(\theta)} \text{ avec } \begin{cases} g(\theta) = \sin\theta, \sin 2\theta, \sin^2\theta, \operatorname{tg}\theta \\ h(\theta) = \sin\theta - \cos\theta, 2\cos\theta - 1, 1 + 2\cos\theta \end{cases}$$

$$\sqrt{1 + \sin 2\theta} + \sqrt{1 - \sin 2\theta}\,; \cos\theta - \cos 2\theta\,; \sqrt{\cos 2\theta}$$

$$\frac{1}{\cos\theta - \cos 2\theta}; \; \frac{\sin\theta/2}{1 - \cos\theta/3}; \frac{\sin(2\theta - \pi/4)}{\sin 3\theta}; \frac{\sin\theta/2}{\sin\theta/3}$$

$$\frac{\sin\theta/2}{1 - 2\sin\theta/2}; \; \frac{\sin 2\theta/3}{\sin\theta + \cos\theta}; \; \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta\cos 2\theta}; \; \frac{\operatorname{tg}\theta/2}{1 - \sin\theta}; \; \frac{\sin^2 2\theta}{\sin(\theta - \pi/3)}$$

$$\frac{\sin\theta}{\theta}; \; \frac{\theta}{\sin\theta}; \; \frac{\theta - 1}{\theta + 1}; \; \frac{\theta^2}{\theta^2 - \pi^2/9}; \; \operatorname{th}\frac{\theta}{2}$$

$$(1 + \operatorname{tg}\theta)^{2/3} + (1 - \operatorname{tg}\theta)^{2/3}; \; \operatorname{ch}(\theta + 1)/\operatorname{ch}\theta\,; \; (\cos\theta + \sin\theta)/\cos 2\theta$$

1.17. — Construire les « courbes » d'équations polaires $\rho^2 = a^2 f(\theta)$, où $f(\theta)$ admet successivement les expressions :

$$\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}; \; \frac{\operatorname{tg}\theta}{\cos 2\theta}; \; 1 - \operatorname{tg} 2\theta\,; \; \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}; \; \frac{\sin\theta}{2 + \cos\theta}$$

1.18. — Construire les « courbes » d'équations polaires :

$$\rho^2\cos\theta - 2a\rho + 4a^2\sin\theta = 0; \quad \rho^2\cos\theta - 2a\rho\cos 2\theta + a^2\cos\theta = 0$$
$$\rho^4 - 4\rho + 6(1 - \operatorname{tg}^2\theta) = 0; \; (\rho - 1)^2(\rho + 1)\theta = \rho\,; \theta = \rho(\rho + 1)(\rho + 2)$$
$$\rho^2 - 2\theta\rho + 1 = 0\,; \theta^2 = \rho(2 - \rho)\,; \sin\theta = (\rho^2 - 3\rho)/(\rho + 1)$$

1.19. — Étudier la déformation, lorsque λ varie, de la « courbe » d'équation polaire :

$$(\rho + 1/\rho)\cos\theta = \lambda\,; \; \rho = \sin 2\theta + \lambda\,; \; \rho = \frac{1}{1 - \lambda\cos 2\theta}$$

$$\rho = a\cos\theta + \lambda \text{ (limaçon de Pascal)}$$

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} + \lambda \text{ (conchoïde de droite)}$$

(Dans les deux derniers cas, étudier le lieu des points d'inflexion quand λ varie).

1.20. — Soit $\mathscr{C}_\lambda$ la « courbe » d'équation polaire

$$\rho^2 - 2a\rho\cos\theta - \lambda a^2\sin^2\theta = 0, \qquad a \in \mathbb{R}_+^* \text{ donné.}$$

a) Construire $\mathscr{C}_\lambda$ et étudier sa déformation quand λ varie ;

b) Pour λ donné, lieu des milieux des segments $[m, m']$ où m et m' sont deux points distincts de $\mathscr{C}_\lambda \backslash \{O\}$, alignés avec O.

c) Pour λ donné, lieu des centres des cercles qui contiennent O et sont tangents à $\mathscr{C}_\lambda$ en un point distinct de O.

1.21. — Montrer que l'équation polaire $\rho = a\sin\theta/3$ représente un limaçon de Pascal.

1.22. — Nombre des points d'inflexion de la « courbe » d'équation :

$$\rho(\cos n\theta + \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta) = 1, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Montrer que ces points sont alignés.

1.23. — Asymptotes de la « courbe » d'équation :

$$\rho^n(\alpha\cos n\theta + \beta\sin n\theta) = 1, \ (n \in \mathbb{N}).$$

1.24. — Montrer que l'on peut mener à la cardioïde d'équation $\rho = a(1 + \cos\theta)$ trois tangentes de direction donnée δ. Étudier, quand δ varie, l'aire $\mathscr{A}_\delta$ du triangle formé par les points de contact ; lieu de l'isobarycentre m_δ de ces points.

1.25. — Lieu du point d'intersection des tangentes (resp. des normales) à une cardioïde en deux points alignés avec le point de rebroussement.

1.26. — Lieu des projections orthogonales de O sur les tangentes à la spirale logarithmique d'équation $\rho = ae^{m\theta}$

1.27. — Lieu des pieds des normales menées par un point fixe à une spirale logarithmique de grandeur constante qui tourne autour de son point asymptote.

1.28. — Lieu, quand λ varie, des points de contact des tangentes à la conique

$$(\mathscr{C}_\lambda) \quad \rho(1 + e\cos\theta) = \lambda, \ (e \text{ fixé})$$

qui contiennent le point donné $O + a\mathbf{i}$.

1.29. — Lieu des points par lesquels passent deux tangentes orthogonales à la « courbe » d'équation :

a) $\rho = ae^{m\theta}$ *b*) $\rho(1 + e\cos\theta) = p$; *c*) $\rho = a(1 + \cos\theta)$

1.30. — Construire la « courbe » $\mathscr{C}$ d'équation polaire :

$$\rho = \cos\theta/\theta \quad [\text{resp. } \rho = 1/\text{ch}\,\theta]$$

Une droite contenant O coupe $\mathscr{C}$ en une infinité de points. Montrer que les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points sont concourantes (resp. tangentes à une même conique).

1.31. — Montrer que les asymptotes de la courbe d'équation $\rho(\theta\cos\theta - \sin\theta) = 1$ sont tangentes à une courbe algébrique.

1.32. — On considère celles des tangentes à une cardioïde $\mathscr{C}$ qui recoupent la « courbe » en deux points distincts m_1 et m_2 ; lieu du point d'intersection des tangentes à $\mathscr{C}$ en m_1 et m_2.

COURBES DÉFINIES IMPLICITEMENT

1.33. — Construire la courbe définie par l'une des équations :

$$y^4 - x^2y^2 - y^3 = 0 \qquad (y-x)(x^2+y^2-1) = (y+x+1)(x+1)$$
$$(x^4-1)y^2 + (x^3-2)y - 1 = 0 \qquad 4x^5 - 5x^4y - y^3 + 2y^2 = 0$$
$$x(y^2-x^2) + x^2 - 2y^2 = 0 \qquad x^2(x-y) + 4x^2 - y^2 = 0$$
$$(x^2-y^2)^2 - (x^2+y^2) = 0 \qquad x^4 - y^4 + x^3 - y^3 - xy = 0$$
$$x^5 + 2xy^3 - 3y^2 = 0 \qquad (y-x^2)(y-2x^2) - x^8 = 0$$
$$xy(x-y) + x^2 + y^2 - x = 0 \qquad x^2y^2 + x^2y + xy - 1 = 0$$
$$x^4 - y^4 - (x^2+2xy-y^2) = 0 \qquad x^4 + y^4 - y(x^2+2y^2) + y^2 = 0$$
$$y^4 + (x+y)^3 + x^2 - y^2 = 0 \qquad x^2y^2 - x^3 + y^3 = 0$$
$$(x-1)(x-2)(x-3) + (y-1)(y-2)(y-3) = 0$$

1.34. — Étudier la déformation, quand λ varie de la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ d'équation :

a) $(y+2x)^2(y+x) - \lambda(x-y) = 0$

b) $x^4 + y^4 - \lambda x^2y^2 - \lambda(x^2+y^2) + 1 = 0$

c) $(4x^2-y^2)^2 + \lambda(2x-y)x^2 + 8x^2 + y^2 = 0$

d) $x^\lambda e^x = y^\lambda e^y$

1.35. — Construire les courbes définies par les équations :

$$x^2 - \operatorname{Log} x = y^2 - \operatorname{Log} y\,;\ x^y = y^x\,;\ x \sin y = y \sin x\,;\ \cos x \operatorname{ch} y = \cos y \operatorname{ch} x$$
$$y + \operatorname{Log} y = x + \operatorname{Log} x + \lambda \text{ (déformation quand } \lambda \text{ varie)}$$
$$x \operatorname{Log} x + y \operatorname{Log} y = \lambda$$

(L'équation étant écrite $f(y) = f(x)$, ou $f(y) = \pm f(x) + \lambda$, on utilisera la représentation graphique de la fonction f).

1.36. — Étudier la déformation, quand $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ varie, de la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ ensemble des points dont le produit des distances aux sommets d'un carré donné est λ^4.

1.37. — Lieu, quand λ varie, du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$, d'équation

$$(y-\lambda x)(x^2+y^2) - a(x^2-y^2) = 0, \quad (a \in \mathbb{R}_+^* \text{ donné})$$

avec son asymptote.

1.38. — Montrer que la courbe d'équation :

$$(x^2+y^2)y^2 + 2(\sqrt{2}-1)x(x^2+y^2) + x^2 - y^2 = 0$$

est une conchoïde de conique (de foyer O) i.e. admet une équation polaire de la forme :

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta} + k.$$

1.39. — La courbe d'équation $xy^4 - x^3 + y = 0$ admet une branche tangente à l'origine à l'axe des x, représentée par $y = \varphi(x)$. Trouver un développement limité à l'ordre 25 de la fonction φ, au voisinage de 0.

1.40. — Construire la courbe $\mathscr{C}$ d'équation :

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - a^2) - 2ax(x^2 + y^2) = 0$$

Trouver le lieu des centres des cercles tangents à $\mathscr{C}$ en deux points alignés avec O.

1.41. — Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $f(x, y) = 0$, où f est définie sur un ouvert W de $\mathbb{R}^2$, et de classe C^2. Montrer que pour qu'un point régulier m de $\mathscr{C}$ en soit un point d'inflexion, il faut et il suffit que les coordonnées (x, y) de m vérifient $h(x, y) = 0$, avec :

$$h = \begin{vmatrix} 0 & f'_x & f'_y \\ f'_x & f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f'_y & f''_{xy} & f''_{y^2} \end{vmatrix} \qquad (h \text{ est dite } \textit{hessienne} \text{ de } f)$$

ENVELOPPES.

1.42. — Construire l'enveloppe γ de la famille $(\mathscr{D}_\theta)_{\theta\in\mathbb{R}}$, avec :

$$(\mathscr{D}_\theta) \quad x \cos \theta + y \sin \theta - a(2 + \cos 2\theta) = 0$$

Que peut-on dire de la distance de deux tangentes parallèles à γ ?

1.43. — On donne un triangle abc. Trouver l'enveloppe des droites qui le partagent en un triangle de sommet a et en un quadrilatère dont le rapport des aires est donné.

1.44. — Enveloppe de la famille des droites $(\mathscr{D}_t)_{t\in I}$ une équation de $\mathscr{D}_t$ étant :

a) $\quad x \operatorname{ch}^2 t + y \operatorname{sh}^2 t - a \operatorname{ch}^2 2t = 0$

b) $\quad (1 - 3t^2)x + t(3 - t^2)y - a = 0$

c) $\quad x \cos t + y \sin t - a\sqrt{\sin 2t} = 0$

1.45. — Enveloppe des cordes d'une ellipse vues du centre sous un angle droit (resp. vues d'un foyer sous un angle donné).

1.46. — Enveloppe des cordes d'une parabole qui déterminent avec la courbe des domaines d'aire donnée.

1.47. — Enveloppe du second côté d'un angle de mesure donnée dont le sommet décrit une droite fixe et dont le premier côté passe par un point fixe.

1.48. — Enveloppe des cordes de la courbe :

a) $x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0$; *b*) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$; *c*) $\rho(\cos \theta + \cos 3\theta) = a$

vues de O sous un angle droit :

1.49. — On considère l'arche $\mathscr{C}$ de cycloïde représentée par :

$$x = a(t - \sin t); \qquad y = a(1 - \sin t); \qquad t \in [0,2\pi]$$

Au point m de $\mathscr{C}$, de paramètre t, on associe la droite $\mathscr{D}_t$ symétrique de la tangente en m à $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $m + \mathbb{R}\mathbf{i}$. Enveloppe de la famille $(\mathscr{D}_t)_{t\in[0,2\pi]}$.

1.50. — On donne la strophoïde droite $\mathscr{C}$ représentée par :

$$x = a(1 - t^2)/(1 + t^2), \quad y = tx$$

D'un point m de l'asymptote $\mathscr{A}$ on mène deux tangentes à $\mathscr{C}$, dont les points de contact déterminent une droite $\mathscr{D}_m$. Enveloppe de la famille $(\mathscr{D}_m)_{m\in\mathscr{A}}$.

1.51. — Soit γ la cissoïde droite définie par :

$$x = at^2/(1 + t^2), \quad y = at^3/(1 + t^2)$$

Déterminer un cercle C tel que la polaire par rapport à C d'un point quelconque de γ soit une tangente à γ.

1.52. — Caustique par réflexion d'une cardioïde $\rho = a(1 + \cos\theta)$, le point lumineux étant O.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE $\mathscr{E}_3$.

1.53. — $\mathscr{E}_3$ est euclidien et $(O\,;\,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ est orthonormal. On appelle Δ l'ensemble des droites de $\mathscr{E}$ qui ne sont pas parallèles au plan $\mathscr{P}$ d'équation $z = 0$. Pour tout $(\mathscr{D}, \mathscr{D}') \in \Delta^2$ on dispose :

— d'une part des traces m et m' de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sur $\mathscr{P}$, de l'angle $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ et donc de :

$$\delta_1(\mathscr{D}, \mathscr{D}') = \|\overrightarrow{mm'}\| + \theta$$

— d'autre part des équations, uniques caractérisant $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$:

$$(\mathscr{D}) \qquad (x = az + p) \wedge (y = bz + q)$$
$$(\mathscr{D}') \qquad (x = a'z + p') \wedge (y = b'z + q')$$

et donc de : $\delta_2(\mathscr{D}, \mathscr{D}') = |a - a'| + |b - b'| + |p - p'| + |q - q'|$

a) Montrer que δ_1 et δ_2 sont des distances sur Δ, et qu'elles sont topologiquement équivalentes.

b) Montrer que le sous-ensemble de Δ formé par les éléments contenant un point donné de $\mathscr{E}$ est un fermé.

c) Montrer que le sous-ensemble de Δ formé par les éléments rencontrant une sphère fixe en deux points est un ouvert

d) L'espace métrique (Δ, δ_1) [resp. (Δ, δ_2)] est-il complet ?

1.54. — Équation du plan osculateur en un point de l'arc paramétré défini par :

$$x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = t\sqrt{2}$$
$$x = t/(t^2 + 1), \quad y = t^2/(t^2 + 1)^2, \quad z = t/(t^2 + 1)^2$$
$$\rho = e^{m\theta}, \quad z = e^{m\theta} \quad \text{(coordonnées cylindriques).}$$

1.55. — L'arc paramétré $\gamma_{\lambda,\mu}$ défini par :

$$x = t^2, \quad y = t^4 - t, \quad z = t^4 + \lambda t^3 + \mu t^2$$

peut-il admettre un point double ?

1.56. — Montrer que les arcs paramétrés définis par

$$x = (t + 2)/(t^2 - 1), \quad y = t/(t^2 - 1), \quad z = t^2/(t^2 - 1)$$

sont plans ; déterminer leurs asymptotes.

1.57. — Étudier les branches infinies des arcs paramétrés définis par :

$$x = t/(t-1), \quad y = t^2/(t-1), \quad z = t^3/(t-1)$$

(asymptote, parabole asymptote).

1.58. — Soit γ l'arc paramétré défini par :

$$x = a\cos^2 t, \qquad y = a\sin t\cos t, \qquad z = a\sin^2 t$$

a) Lieu des traces des tangentes à γ sur le plan xOy.

b) Enveloppe des traces des plans normaux à γ sur le plan d'équation $x = a$.

1.59. — Soit γ l'arc paramétré défini par :

$$x = 1/(1+t^2), \qquad y = t/(1+t^2), \qquad z = t^3/(1+t^2)$$

a) Écrire, sous forme d'une relation entre les fonctions symétriques élémentaires des t_i, une condition nécessaire et suffisante pour que trois points $m_i(t_i)$, $i \in \mathbb{N}_3$, de γ soient coplanaires. En déduire (avec justification à l'appui) l'équation du plan osculateur à γ au point $m(t)$.

b) Montrer que par un point donné p de $\mathscr{E}$ passent trois plans osculateurs à γ, et que leurs points de contact déterminent un plan qui contient p. Soit $\mathscr{P}_p$ ce plan ; montrer que si p décrit une droite $\mathscr{D}$, alors $\mathscr{P}_p$ pivote autour d'une droite $\mathscr{D}'$. Montrer que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ jouent des rôles symétriques.

1.60. — Lieu des points p tels que deux des plans osculateurs à l'arc paramétré

$$x = at, \quad y = bt^2, \quad z = ct^3$$

qui contiennent p aient des traces orthogonales sur xOy.

1.61. — Pour chacun des arcs paramétrés définis par :

a) $$x = t, \quad y = t^3, \quad z = t^4$$

b) $$x = \frac{2t}{t^4+1}, \quad y = \frac{t(t^2+1)}{t^4+1}, \quad z = \frac{t^2-t+2}{t^4+1}$$

écrire une condition nécessaire et suffisante pour que les trois points $m_i(t_i)$, $i \in \mathbb{N}_3$, de γ soient alignés. Étudier l'ensemble des « sécantes triples » à γ.

1.62. — Soit γ l'arc paramétré défini par :

$$x = t/(1+t^4), \quad y = t^2/(1+t^4), \quad z = t^3/(1+t^4)$$

a) Trouver les plans bitangents à γ.

b) On donne deux points $m_1(t_1)$ et $m_2(t_2)$ de γ. Un plan variable contenant m_1 et m_2 recoupe γ en deux points p_1 et p_2. Étudier l'ensemble des droites $\mathscr{D}_{p_1p_2}$.

1.63. — Nature de l'ensemble des droites qui rencontrent l'arc paramétré γ :

$$x = t^3, \quad y = t^2, \quad z = t$$

en deux points en lesquels les plans osculateurs sont orthogonaux

1.64. — On reprend l'arc paramétré $\gamma : x = t^3,\ y = t^2,\ z = t.$

a) Montrer que par un point $m(t)$ de γ passent quatre normales à γ dont les pieds sont distincts de m. Ces quatre pieds déterminent une sphère S_t, qui recoupe γ en deux points définissant une droite $\mathscr{D}_t$. Que peut-on dire de la puissance de O par rapport à S_t ?

Quelle est la nature de l'ensemble des droites $\mathscr{D}_t$?

b) Une sphère Σ est tangente à γ en trois points $m_i(t_i)$. Étudier les ensembles respectivement engendrés par le centre de Σ et par le cercle déterminé par les points m_i.

1.65. — Soit $\mathscr{C}$ la courbe (cubique de Chasles) défini par :

$$x = \frac{\alpha}{t - a}, \quad y = \frac{\beta}{t - b}, \qquad z = \frac{\gamma}{t - c}$$

a) Si un tétraèdre a ses sommets sur $\mathscr{C}$ et si deux couples d'arêtes opposées sont orthogonales, alors il en est de même du troisième couple et l'orthocentre du tétraèdre est un point de $\mathscr{C}$.

b) Soit S une sphère centrée sur $\mathscr{C}$. Il existe une infinité de tétraèdres dont les sommets appartiennent à $\mathscr{C}$ et sont deux à deux conjugués par rapport à S ; les sphères circonscrits à ces tétraèdres ont deux points communs ; quel est le lieu de leurs centres ?

1.66. — Déterminer une application f de classe $\mathscr{C}^2$ pour que l'arc paramétré γ représenté par :

$$\theta \longmapsto \mathbf{u}_\theta + f(\theta)\mathbf{k}$$

admette au point de paramètre θ un plan osculateur qui fasse un angle de mesure donnée avec le vecteur $\mathbf{u}_\theta$.

Que devient l'arc γ ainsi obtenu dans le développement du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1$?

2
ÉTUDE MÉTRIQUE DES ARCS

> *Dans ce chapitre, ($\mathscr{E}$, E) désigne un espace affine normé qui, à partir du* **2.1.***2 sera supposé euclidien. Moyennant quelques modifications de détail, on peut le remplacer, au début, par un espace métrique ($\mathscr{E}$, d).*

2.1. LONGUEUR D'UN ARC; ABSCISSE CURVILIGNE

2.1.*1*. Longueur d'un arc paramétré

1° *Notion d'arc rectifiable.* – On considère un C^0-arc paramétré $\gamma = (I, f)$; pour tout $(t, t') \in I^2$ tel que $t < t'$, $\gamma_{t,t'}$ désigne le sous-arc compact $([t, t'], f|[t, t'])$ de γ. Sauf avis contraire, on suppose que γ est compact, c'est-à-dire que I est un segment $[a, b]$, $a < b$.

A toute subdivision $\sigma \in \mathcal{S}$ de $[a, b]$, avec (cf. notations du III.**6.** 2-1) :

$$\sigma = (t_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}; \qquad t_0 = a, \quad t_n = b; \qquad \forall i \in \mathbb{N}_n \quad t_{i-1} < t_i$$

on associe le réel positif (appelé *longueur d'une ligne polygonale inscrite*) :

$$l_\sigma(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} d[f(t_{i-1}), f(t_i)].$$

PROPOSITION. – **Si deux éléments σ et σ' de $\mathcal{S}$ vérifient $\sigma \prec \sigma'$, alors :**

$$l_\sigma(\gamma) \leqslant l_{\sigma'}(\gamma).$$

On envisage d'abord le cas où σ' s'obtient en adjoignant un point à l'image $A(\sigma)$. On termine le raisonnement par récurrence. □

• DÉFINITION I. – **On appelle** *longueur* **de l'arc paramétré** *compact* γ **l'élément** $l(\gamma) = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} l_\sigma(\gamma)$ **de** $\overline{\mathbb{R}}_+$. **On dit que** γ **est** *rectifiable* **si, et seulement si** $l(\gamma) < +\infty$.

Notons qu'en considérant la subdivision $\sigma = (a, b)$ on obtient :

$$l(\gamma) \geqslant d[f(a), f(b)]$$

et que $l(\gamma)$ est nulle si, et seulement si f est constante.

• DÉFINITION II. — **Soit $\gamma = (I, f)$ un C^0-arc paramétré, où I est exceptionnellement un intervalle** *quelconque*. **On dit que γ est** *localement rectifiable* **si, et seulement si, pour tout $(t, t') \in I^2$ tel que $t < t'$, l'arc paramétré compact $\gamma_{t,t'}$ est rectifiable.**

EXEMPLES. — *a*) Soient $(p, q) \in \mathscr{E}^2$ et $f : t \longmapsto tp + (1 - t)q$.

— L'arc $([0, 1], f)$ est rectifiable de longueur $d(p, q)$; en effet, pour tout $\sigma \in \mathscr{S}$, on a ici $l_\sigma(\gamma) = d(p, q)$.

— L'arc $(\mathbb{R}, f)$ est localement rectifiable.

b) Soit γ un C^0-arc de Jordan de $\mathscr{E}$ dont le support est inclus dans une droite $\mathscr{D}$, munie d'un repère $(O, \mathbf{i})$; on a $\gamma = (I, f)$, où $I = [a, b], a < b$, et $f(t) = x(t)\mathbf{i}$; l'application $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ étant continue et injective, elle est strictement monotone. Pour toute $\sigma \in \mathscr{S}$, on a ici :

$$l_\sigma(\gamma) = \left|\sum_{i=1}^{n} (x(t_i) - x(t_{i-1}))\right| \|\mathbf{i}\| = |x(b) - x(a)| \|\mathbf{i}\| = d[f(a), f(b)].$$

γ est ainsi rectifiable et, dans le cas où $\mathscr{E}$ est euclidien, *sa longueur coïncide avec la longueur de son support* (au sens de longueur d'un segment). Compte-tenu de ce que, dans tous les cas : $l(\gamma) \geqslant d[f(a), f(b)]$, ce résultat traduit l'idée intuitive que « le plus court chemin d'un point à un autre est la ligne droite ».

REMARQUES. — *a*) On ne confondra pas la longueur d'un arc paramétré avec la longueur de son support (notion intuitive non encore définie). Ainsi pour $(p, q) \in \mathscr{E}^2$, $I = [0, 1]$ et $f(t) = tp + (1 - t)q$, l'arc $\gamma = (I, f)$ a pour longueur $d(p, q)$; pour $J = [-1, 1]$ et $g(t) = t^2p + (1 - t^2)q$, l'arc $\gamma' = (J, g)$ a pour longueur $2\,d(p, q)$, alors que γ et γ' ont même support (à savoir le segment $[p, q]$).

b) Si on remplace la norme de E par une norme équivalente, la longueur des arcs paramétrés est modifiée, mais pas la notion d'arc rectifiable (resp. localement rectifiable).

2° ***Propriétés***. — Soit $\gamma = (I, f)$, $I = [a, b]$ un arc paramétré compact.

a) **Soit γ' un sous-arc de γ; alors $l(\gamma') \leqslant l(\gamma)$. En particulier si γ est rectifiable, alors γ' est rectifiable.**

Vérification immédiate. □

Il en résulte qu'*un arc compact est localement rectifiable si, et seulement s'il est rectifiable.*

b) RELATION DE CHASLES. — **Soit [1] $c \in [a, b]$; on note $I_1 = [a, c]$, $I_2 = [c, b]$, $\gamma_1 = \gamma_{a,c}$ et $\gamma_2 = \gamma_{c,b}$. Alors $l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$. En particulier γ est rectifiable si, et seulement si γ_1 et γ_2 sont tous deux rectifiables.**

Notons $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}_i$) l'ensemble des subdivisions de I (resp. de I_i). A tout $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$, associons $\sigma \in \mathcal{S}$ obtenue par « juxtaposition » de σ_1 et σ_2 $(A(\sigma) = A(\sigma_1) \cup A(\sigma_2))$. On constate : $l_\sigma(\gamma) = l_{\sigma_1}(\gamma_1) + l_{\sigma_2}(\gamma_2)$ d'où il résulte :

$$\forall (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2, \qquad l_{\sigma_1}(\gamma_1) + l_{\sigma_2}(\gamma_2) \leqslant l(\gamma)$$

et donc :

$$l(\gamma_1) + l(\gamma_2) \leqslant l(\gamma)$$

---

[1] Nous étendons dorénavant la notion d'arc paramétré (I, f) au cas où I est de la forme $[a, a]$ et nous convenons que, dans ce cas, l'arc est rectifiable, de longueur nulle.

Inversement, à tout $\sigma \in \mathcal{S}$, associons $\sigma' \in \mathcal{S}$ définie par $A(\sigma') = A(\sigma) \cup \{c\}$. On a $\sigma \prec \sigma'$ et donc : $l_\sigma(\gamma) \leqslant l_{\sigma'}(\gamma)$. Or σ' peut être considérée comme obtenue à partir de $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ comme ci-dessus, et $l_\sigma(\gamma) = l_{\sigma_1}(\gamma_1) + l_{\sigma_2}(\gamma_2)$.

Il en résulte : $\forall \sigma \in \mathcal{S}, \quad l_\sigma(\gamma) \leqslant l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$

et donc : $$l(\gamma) \leqslant l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$$

La fin de l'assertion se vérifie sans difficulté. □

REMARQUE. — Dans tout ce qui précède, l'hypothèse de continuité de f n'intervient pas. Il n'en va pas de même pour la suite.

3° *Abscisse curviligne.* — THÉORÈME I. — **Soient $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et $\gamma = (I, f)$ un arc continu de $\mathcal{E}$, supposé rectifiable. Alors l'application :**

$$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}_+, \qquad t \longmapsto l(\gamma_{a,t})$$

est croissante et continue.

— φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ car γ est rectifiable, et elle est croissante d'après 2° *a*).

— Montrons la continuité de φ. Soit t fixé dans $[a, b[$; considérons les subdivisions :

$$\sigma = (t, t_1, \ldots, t_{n-1}, b), \qquad \sigma' = (t, u, t_1, \ldots, t_{n-1}, b)$$

et

$$\sigma'' = (u, t_1, \ldots, t_{n-1}, b)$$

des segments $[t, b]$ et $[u, b]$ (u étant arbitrairement choisis dans $]t, t_1[$).

Pour alléger l'écriture, notons $l_\sigma(\gamma)$, $l_{\sigma'}(\gamma)$ et $l_{\sigma''}(\gamma)$, avec des abus de notations évidents.

σ et σ' sont des subdivisions du même segment $[t, b]$, vérifiant $\sigma \prec \sigma'$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} l_\sigma(\gamma) \leqslant l_{\sigma'}(\gamma) &= d[f(u), f(t)] + l_{\sigma''}(\gamma) \\ &\leqslant d[f(u), f(t)] + \varphi(b) - \varphi(u) \end{aligned}$$

(l'inégalité $l_{\sigma''}(\gamma) \leqslant \varphi(b) - \varphi(u)$ étant valable parce que γ est rectifiable).

La subdivision σ étant fixée, on a donc :

$$\forall u \in]t, t_1[\qquad l_\sigma(\gamma) \leqslant d[f(u), f(t)] + \varphi(b) - \varphi(u).$$

En faisant tendre u vers t par valeurs supérieures, il vient, grâce à la continuité de f et la monotonie de φ (qui implique l'existence de $\varphi(t+)$) :

$$l_\sigma(\gamma) \leqslant \varphi(b) - \varphi(t+).$$

Cette relation étant vraie pour toute subdivision σ de $[t, b]$, il en résulte :

$$\varphi(b) - \varphi(t) \leqslant \varphi(b) - \varphi(t+)$$

et donc $\varphi(t+) \leqslant \varphi(t)$, d'où $\varphi(t+) = \varphi(t)$ puisque φ est croissante.

En fixant $t \in]a, b]$, et en considérant de même une subdivision de $[a, t]$, on montrerait $\varphi(t-) = \varphi(t)$. □

THÉORÈME II. — **Soient $\gamma = (I, f)$ un arc continu localement rectifiable, et $t_0 \in I$. Alors l'application φ de I dans $\mathbb{R}$ définie par :**

$$\varphi(t) = l(\gamma_{t_0, t}) \quad \textbf{si} \quad t \geqslant t_0\,; \qquad \varphi(t) = -\,l(\gamma_{t, t_0}) \quad \textbf{si} \quad t < t_0$$

est croissante et continue.

Vérification immédiate. □

REMARQUES. — *a*) L'hypothèse étant celle du théorème II, adjoignons $t_1 \in I$, et définissons ψ à partir de t_1 comme φ l'a été à partir de t_0. Alors, visiblement :

$$\forall t \in I \qquad \psi(t) = \varphi(t) - \varphi(t_1)$$

b) Sous la même hypothèse, pour tout $(t, t') \in I^2$ tel que $t \leqslant t'$:

$$l(\gamma_{t, t'}) = \varphi(t') - \varphi(t).$$

DÉFINITION I. — **Soit $\gamma = (I, f)$ un arc paramétré continu localement rectifiable. On appelle** ***abscisse curviligne*** **de γ toute application $\varphi : I \to \mathbb{R}$ telle que :**

$$\forall (t, t') \in I^2 \qquad (t < t') \Rightarrow (l(\gamma_{t, t'}) = |\varphi(t') - \varphi(t)|).$$

Si, en outre, il existe $t_0 \in I$ tel que $\varphi(t_0) = 0$, on dit que φ est une ***abscisse curviligne d'origine*** t_0.

La remarque *b*) montre que l'application φ introduite dans le théorème II est une abscisse curviligne d'origine t_0. Nous allons étudier une réciproque.

PROPOSITION. — **Soient φ et ψ deux abscisses curvilignes de γ. Alors il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $k \in \mathbb{R}$ tels que $\psi = \varepsilon\varphi + k$.**

Inversement, si φ est une abscisse curviligne, alors pour tout $(\varepsilon, \xi) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}$, $\varepsilon\varphi + \xi$ est une abscisse curviligne.

La seconde partie de la proposition est triviale. Démontrons la première.
Soient φ et ψ deux abscisses curvilignes de $\gamma = (I, f)$. Si φ est constante, alors f l'est aussi, èt donc ψ et le résultat est acquis. Sinon, considérons $t_0 \in I$ et $I' = \{t \in I | \varphi(t) \neq \varphi(t_0)\}$, qui est non vide. Soit :

$$\omega : I' \to \{-1, 1\}, \qquad t \longmapsto \frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{\varphi(t) - \varphi(t_0)}$$

S'il existait $(t', t'') \in I'^2$ tel que $\omega(t') \neq \omega(t'')$, et donc $\omega(t') = -\omega(t'')$, on aurait :

$$|\psi(t') - \psi(t'')| = |\varphi(t') + \varphi(t'') - 2\varphi(t_0)|$$

et, d'après $|\psi(t') - \psi(t'')| = |\varphi(t') - \varphi(t'')|$: $\varphi(t_0) \in \{\varphi(t'), \varphi(t'')\}$

ce qui constituerait une contradiction. Ainsi ω est une application constante.

En d'autres termes, il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que, pour tout $t \in I'$:

$$\psi(t) - \psi(t_0) = \varepsilon(\varphi(t) - \varphi(t_0))$$

Cette dernière égalité est encore vérifiée pour tout $t \in I \backslash I'$. □

COROLLAIRE. — **Toute abscisse curviligne est une application monotone et continue.**

C'est, en effet, vrai pour l'abscisse curviligne introduite dans le théorème II. □

THÉORÈME III. — **Soient $\gamma = (I, f)$ un arc paramétré continu, localement rectifiable, φ une abscisse curviligne de γ et $J = \varphi(I)$. Alors φ induit un homéomorphisme de I sur J si, et seulement s'il n'existe pas d'intervalle d'intérieur non vide inclus dans I sur lequel f soit constante (1). Il en est ainsi lorsque γ est un arc simple.**

D'après III.**4**.3.*2*, 2°, φ étant monotone et continue, J est un intervalle, et φ induit un homéomorphisme de I sur J si, et seulement si elle est injective.

Or, pour tout $(t, t') \in I^2$ tel que $t < t'$, on a $\varphi(t) = \varphi(t')$, c'est-à-dire $l(\gamma_{t,t'}) = 0$, si, et seulement si f est constante sur $[t, t']$. □

REMARQUE. — Conservons les notations du théorème III (sans supposer φ injective). De $|\varphi(t) - \varphi(t')| = l(\gamma_{t,t'})$ on déduit :

$$\forall (t, t') \in I^2 \quad (\varphi(t) - \varphi(t') = 0) \Rightarrow (f(t) = f(t')).$$

D'où la possibilité de définir $g : J \to f(I)$ vérifiant $f = g \circ \varphi$ (pour $s \in J$, on pose $g(s) = f(t)$ où t est un élément arbitraire de $\varphi^{-1}(s)$).

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{f} & f(I) \\ & {\scriptstyle\varphi}\searrow & \nearrow{\scriptstyle g} \\ & J & \end{array}$$

Soient alors $s = \varphi(t)$ et $s' = \varphi(t')$ deux éléments de J :

$$d[g(s), g(s')] = d[f(t), f(t')] \leqslant |s - s'|$$

Ainsi g est 1-lipschitzienne, et donc continue. (J, g) est un arc continu, de même support $f(I)$ que γ. Mais il ne lui est pas en général C^0-équivalent, à moins précisément que φ n'induise un homéomorphisme (théorème III).

DÉFINITION II. — **Un arc paramétré (I, f) continu et localement rectifiable est dit *normal* si, et seulement si pour tout $(t, t') \in I^2$ tel que $t < t'$, la longueur du sous-arc $\gamma_{t,t'}$ est $t' - t$, i.e. si, et seulement si Id_I est une abscisse curviligne.**

Il en est ainsi de l'arc (J, g) de la remarque précédente.

REMARQUE. — Un arc normal n'admet pas de sous-arc constant. Inversement tout arc n'admettant pas de sous-arc constant est C^0-équivalent à un arc normal.

---

(1) Nous dirons abréviativement que : γ *ne contient pas de sous-arc constant.*

2.1.2. Rectification d'un arc paramétré de classe $C^k (k \geqslant 1)$

Désormais, $(\mathscr{E}, E)$ désigne un espace affine euclidien.

1° THÉORÈME. — **Soit $\gamma = (I, f)$ un arc paramétré compact de classe C^k $(k \geqslant 1)$, avec $I = [a, b]$ $(a < b)$. Alors γ est rectifiable, et :**

$$l(\gamma) = \int_a^b \|f'(t)\| \, dt$$

— Soit $\sigma = (t_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision de I ; f étant de classe C^1 et E complet, nous pouvons écrire :

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t) \, dt,$$

et donc :
$$d[f(t_{i-1}), f(t_i)] \leqslant \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f'(t)\| \, dt.$$

Il en résulte par sommation : $l_\sigma(\gamma) \leqslant \int_a^b \|f'(t)\| \, dt$; γ est donc rectifiable, et :

$$l(\gamma) \leqslant \int_a^b \|f'(t)\| \, dt$$

— Soit φ l'abscisse curviligne de γ d'origine a ($\varphi(t) = l(\gamma_{a,t})$). Donnons-nous $t \in [a, b]$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $t + h \in [a, b]$.

Supposons d'abord $h \in \mathbb{R}_+^*$; $\varphi(t + h) - \varphi(t)$ étant la longueur de $\gamma_{t, t+h}$, nous avons, d'après ce qui précède :

$$\varphi(t + h) - \varphi(t) \leqslant \int_t^{t+h} \|f'(u)\| \, du$$

et, par définition de la longueur d'un arc :

$$\|f(t + h) - f(t)\| \leqslant \varphi(t + h) - \varphi(t)$$

d'où, compte tenu de $h > 0$:

$$\left\|\frac{f(t + h) - f(t)}{h}\right\| \leqslant \frac{\varphi(t + h) - \varphi(t)}{h} \leqslant \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|f'(u)\| \, du$$

Nous en déduisons, grâce à la continuité de $u \longmapsto \|f'(u)\|$ (et pour $t < b$) :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\varphi(t + h) - \varphi(t)}{h} = \|f'(t)\|$$

Le lecteur fera la même étude pour $h \in \mathbb{R}_-^*$, et on conclura que φ est

dérivable avec, pour tout $t \in [a, b]$, $\varphi'(t) = \|f'(t)\|$. Il en résulte :

$$l(\gamma) = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(t)\, dt = \int_a^b \|f'(t)\|\, dt \qquad \square$$

REMARQUES. — *a*) On retrouve ici la continuité de φ, lorsque f est de classe C^1.

b) La démonstration ci-dessus reste valable si on suppose seulement que E est un espace de Banach.

COROLLAIRE. — **Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma = (I, f)$ un arc paramétré de classe $C^k (k \geqslant 1)$. Alors γ est localement rectifiable, et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est une abscisse curviligne si, et seulement si elle est dérivable et vérifie :**

$$\forall t \in I \quad \varphi'(t) = \varepsilon \|f'(t)\|$$

où $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ est une constante. De plus, si γ est régulier (i.e. $\forall t \in I \;\; f'(t) \neq 0$) alors φ est de classe C^k.

Vérification immédiate à partir de la proposition de 2.1.*1*, 3° et du théorème ci-dessus. La deuxième partie de l'assertion tient à ce que $\|.\|$ est de classe C^∞ sur $E \backslash \{0\}$ ([1]). $\square$

Notons que toute abscisse curviligne s'exprime sous la forme :

$$\varphi(t) = \varepsilon \int_{t_0}^t \|f'(u)\|\, du + k, \qquad ((\varepsilon, t_0, k) \in \{-1, +1\} \times I \times \mathbb{R}).$$

• ***Équivalence de l'arc et de la corde.*** — Soit $\gamma = (I, f)$ un arc de classe $C^k (k \geqslant 1)$ et $t_0 \in I$ tel que $f'(t_0) \neq 0$. Par continuité de f' on peut écrire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall u \in I \qquad (|u - t_0| < \alpha \Rightarrow \|f'(u) - f'(t_0)\| \leqslant \varepsilon)$$

Fixons un $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et un $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ correspondant. Pour $(t, t') \in I^2$ vérifiant $|t - t_0| < \alpha$ et $|t' - t_0| < \alpha$ on peut appliquer le théorème des accroissements finis à $u \longmapsto f(u) - uf'(t_0)$ sur $[t, t']$ (resp. $[t', t]$), et l'on en déduit aisément :

$$\big| \|f(t') - f(t)\| - |t - t'|\, \|f'(t_0)\| \big| \leqslant \varepsilon |t - t'|$$

et donc, grâce à :

$$\|f'(t_0)\| \neq 0, \qquad \|f(t') - f(t)\| \sim |t - t'|\, \|f'(t_0)\| \quad \text{lorsque} \quad (t, t') \to (t_0, t_0).$$

L'inégalité $\|f'(u) - f'(t_0)\| \leqslant \varepsilon$ impliquant $\big| \|f'(u)\| - \|f'(t_0)\| \big| \leqslant \varepsilon$, on peut écrire dans les mêmes conditions, par intégration entre t et t' :

$$\left| \left| \int_t^{t'} \|f'(u)\|\, du \right| - |t - t'|\, \|f'(t_0)\| \right| \leqslant \varepsilon |t - t'|$$

et donc : $l(\gamma_{tt'}) \sim |t - t'|\, \|f'(t_0)\|$ lorsque (t, t') tend vers (t_0, t_0). En particulier : $l(\gamma_{tt'}) \sim \|f(t') - f(t)\|$ lorsque (t, t') tend vers (t_0, t_0), ce que nous retiendrons sous la forme :

Au voisinage d'un point régulier d'un arc paramétré de classe $C^k (k \geqslant 1)$, la longueur de l'arc est équivalente à celle de la corde.

([1]) Ce résultat reste valable dans un espace de Hilbert de dimension quelconque.

2° ***Calcul pratique***. – *a*) Supposons $\mathscr{E}$ rapporté à un repère orthonormal $(O; e_1, \ldots, e_n)$ et f définie par :

$$f(t) = O + \sum_{i=1}^{n} x_i(t) e_i.$$

Alors : $\|f'(t)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'^2(t)\right)^{1/2}$. Lorsque $I = [a, b]$:

$$\boxed{l(\gamma) = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'^2(t)\right)^{1/2} \mathrm{d}t}$$

Pour I quelconque, les abscisses curvilignes $s : I \to \mathbb{R}$ sont données par :

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

que nous retiendrons sous la forme symbolique :

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i^2}$$

que nous écrirons, dans le cas $n = 3$, avec les notations traditionnelles :

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$$

b) Supposons $\mathscr{E}$ de dimension 3, orienté, rapporté au repère orthonormal direct $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ et f définie en semi-polaires par $f(t) = O + \rho(t)\mathbf{u}_{\theta(t)} + z(t)\mathbf{k}$, ρ, θ, z étant de classe C^k. Alors

$$\|f'(t)\| = (\rho'^2(t) + \rho^2(t)\theta'^2(t) + z'^2(t))^{1/2}.$$

D'où, comme ci-dessus :

$$\boxed{l(\gamma) = \int_a^b (\rho'^2(t) + \rho^2(t)\theta'^2(t) + z'^2(t))^{1/2} \, \mathrm{d}t}$$

et

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2 \, \mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}z^2}$$

traduisant symboliquement :

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

En faisant $z = 0$ dans ces formules, on obtient le cas d'un arc représenté en coordonnées polaires dans un plan euclidien orienté :

$$\boxed{l(\gamma) = \int_a^b (\rho'^2(t) + \rho^2(t)\theta'^2(t))\,dt} \qquad \boxed{ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\,d\theta^2}$$

Cas particulier. — Fréquemment, dans la pratique, le paramètre t est l'angle polaire θ. On a alors :

$$\boxed{l(\gamma) = \int_a^b (\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta) + z'^2(\theta))^{1/2}\,d\theta}$$

c) Avec les mêmes hypothèses sur $\mathscr{E}$ qu'en *b*), raisonnons en coordonnées sphériques. Supposons $f(t) = O + r(t)(\cos\theta(t)\mathbf{k} + \sin\theta(t)\mathbf{u}_{\varphi(t)})$, où r, θ, φ sont de classe C^k. On obtient ici

$$\boxed{ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2}$$

et la formule analogue donnant $l(\gamma)$ (1).

3° Exemples. — On suppose ici dim $\mathscr{E} = 2$, $\mathscr{E}$ étant rapporté au repère orthonormal $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ éventuellement direct.

a) ***Ellipse.*** — $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$, $a > 0$, $b > 0$, $t \in [0, 2\pi]$. On trouve :

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt$$

L'exhibition d'une abscisse curviligne nécessiterait le recours aux fonctions elliptiques. Cependant, lorsque $a = b$ (cercle), on trouve $l(\gamma) = 2\pi a$, et une abscisse curviligne est $\varphi(t) = at$.

b) **Cycloïde.** — $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$; $t \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. On obtient : $ds^2 = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}\,dt^2$. Si on se limite à une « arche » de cycloïde ($t \in [0, 2\pi]$), on a : $l(\gamma) = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 8a$, et une abscisse curviligne $\varphi(t) = 4a\left(1 - \cos\frac{t}{2}\right)$. Notons que, si on prend deux arches ($t \in [0, 4\pi]$), on a $\|f'(t)\| = -\sin t/2$ pour $t \in [2\pi, 4\pi]$. La longueur est alors :

$$\int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,dt + \int_{2\pi}^{4\pi} -2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 16a \quad \text{et non} \quad \int_0^{4\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 0.$$

c) **Cardioïde.** — *En coordonnées polaires* : $\rho = a(1 + \cos\theta)$; $\theta \in [-\pi, \pi]$ et $a > 0$. On obtient :

$$ds^2 = 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}\,d\theta^2$$

et

$$l(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8a, \qquad \varphi(\theta) = 4a\sin\frac{\theta}{2}.$$

---

(1) Du point de vue mnémotechnique, il suffit de retenir les formules donnant ds^2, les autres s'en déduisent immédiatement.

2.1.3. Rectification d'un arc géométrique

1° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soit Γ un arc géométrique compact de classe $C^k (k \geqslant 0)$. Tous les représentants de Γ ont même longueur, qui est dite longueur de Γ et notée $l(\Gamma)$. On dit que Γ est rectifiable si, et seulement si $l(\Gamma) < +\infty$ (i.e. si, et seulement si ses représentants sont rectifiables). On définit de manière analogue un arc géométrique localement rectifiable.**

Soient $\gamma = (I, f)$ et $\gamma' = (J, g)$ deux représentants de Γ, avec $g = f \circ \theta$ où $\theta : J \to I$ est un C^k-difféomorphisme (i.e. un homéomorphisme si $k = 0$).

A toute subdivision $\sigma = (u_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de J, associons la subdivision $\hat{\theta}(\sigma)$ de I définie par : $\hat{\theta}(\sigma) = (\theta(u_i))_{0 \leqslant i \leqslant n}$ si θ est croissant, et $\hat{\theta}(\sigma) = (\theta(u_{n-i}))_{0 \leqslant i \leqslant n}$ sinon. On constate : $l_\sigma(\gamma') = l_{\hat{\theta}(\sigma)}(\gamma)$ et donc :

$$\forall \sigma \in \mathscr{S}(J) \qquad l_\sigma(\gamma') \leqslant l(\gamma), \qquad \text{d'où} \qquad l(\gamma') \leqslant l(\gamma).$$

D'où la conclusion par symétrie des rôles de γ et γ'. □

REMARQUES. — *a*) On peut donc parler de longueur du support d'un arc compact plongé de classe $C^k (k \geqslant 1)$, ou de longueur du support d'un arc de Jordan continu.

b) Le lecteur vérifiera qu'avec les notations ci-dessus, si φ est une abscisse curviligne de γ, alors $\varphi \circ \theta$ est une abscisse curviligne de γ'.

2° ***Paramétrage normal.*** — THÉORÈME I. — **Soit Γ un arc géométrique de classe C^0, localement rectifiable. Il admet un représentant normal si, et seulement s'il n'a aucun sous-arc constant.**

— Si Γ admet un représentant normal (J, g), celui-ci n'admet pas de sous-arc constant; il en est donc de même pour tout représentant de Γ, c'est-à-dire pour Γ.

— Supposons que Γ n'admette pas de sous-arc constant. C'est aussi le cas d'un représentant quelconque $\gamma = (I, f)$ de Γ. Nous savons qu'alors si φ est une abscisse curviligne de γ, φ induit un homéomorphisme de I sur l'intervalle $J = \varphi(I)$.

Soit alors $g = f \circ \varphi^{-1}$ [1]. On constate que (J, g) est normal. Par construction, (J, g) est C^0-équivalent à (I, f). □

THÉORÈME II. — **Soit Γ un arc géométrique de classe $C^k (k \geqslant 1)$. Il admet un représentant normal si, et seulement s'il est régulier ; un représentant (J, g) est normal si, et seulement si : $\forall u \in J \ \|g'(u)\| = 1$.**

— Un représentant (J, g) de Γ est normal si, et seulement si Id_J figure parmi ses abscisses curvilignes, données par $\varphi' = \varepsilon\|g'\|$ (Corollaire du **2.1.2**, 1°), c'est-à-dire si, et seulement si $\|g'\|$ est l'application constante $u \longmapsto 1$.

---

[1] C'est l'application g définie dans le cas général à la remarque du théorème III, 2.1.1, 2°.

Nous avons ainsi vérifié la seconde partie du théorème; nous constatons en outre que Γ ne peut admettre un représentant normal que s'il est régulier.

– Inversement supposons Γ régulier et soit (I, f) l'un de ses représentants. Soit φ une abscisse de γ. Nous savons déjà qu'elle est de classe C^k; mais de plus $\varphi' = \varepsilon\|f'\|$ montre : $\forall t \in I \quad \varphi'(t) \neq 0$; φ induit donc un C^k-difféomorphisme de I sur $J = \varphi(I)$. Si nous introduisons, comme au théorème I, $g = f \circ \varphi^{-1}$, nous constatons que (J, g) est un représentant normal de Γ. □

REMARQUES. – *a*) Si Γ est régulier, il ne peut admettre de sous-arc constant, mais la réciproque est fausse.

b) En notant $u = \varphi(t)$, on constate avec les notations ci-dessus : $g'(u) = \dfrac{\varepsilon}{\|f'(t)\|} f'(t)$.

CONVENTION. – **Si (J, g) est un représentant normal de Γ, nous noterons $s \in J$ la variable, et par abus de langage, nous l'appellerons** *abscisse curviligne sur* Γ.

D'autre part, si Γ est de classe $C^k (k \geqslant 1)$ et régulier, il est orientable. Nous pouvons alors distinguer des *paramétrages normaux directs et indirects; la notation s sera alors réservée aux paramétrages directs.*

CONSÉQUENCES. – *a*) *Si Γ est C^k un arc géométrique régulier orienté, deux paramétrages normaux directs se déduisent l'un de l'autre par le difféomorphisme $s \longmapsto s - s_0$ ($s_0 \in \mathbb{R}$ constant).*

b) Avec la convention précédente, *un arc est toujours orienté « dans le sens des s croissants ».*

EXEMPLES. – *a*) Reprenons la cycloïde paramétrée par $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ en nous limitant à $t \in]0, 2\pi[$. On obtient ainsi un arc de classe C^∞ régulier.

Un calcul antérieur a donné $\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = 4a^2 \sin^2 \dfrac{t}{2}\cdot$ Nous *choisissons* $\dfrac{ds}{dt} = 2a \sin \dfrac{t}{2}$ (ce qui revient à orienter l'arc « dans le sens des t croissants ») d'où, par exemple, $s = -4a \cos \dfrac{t}{2}\cdot$ On en déduit le paramétrage normal :

$$\begin{cases} x = 2a \operatorname{Arc\,cos} \dfrac{-s}{4a} + \dfrac{s}{8a}\sqrt{16a^2 - s^2}, \\ y = \dfrac{1}{8a}(16a^2 - s^2), \qquad (s \in]-4a, 4a[). \end{cases}$$

b) Pour la cardioïde paramétrée en polaire par $\rho = a(1 + \cos\theta)$ ($\theta \in]-\pi, +\pi[$) et orientée « dans le sens des θ croissants », on obtient de même :

$$\theta = 2 \operatorname{Arc\,sin} \frac{s}{4a}, \qquad \rho = \frac{1}{8a}(16a^2 - s^2) \quad (s \in]-4a, 4a[).$$

2.2. COURBURE; REPÈRE DE FRENET; TORSION

($\mathscr{E}$, E) désigne un espace affine euclidien orienté de dimension 2 ou 3; nous n'utiliserons que des repères orthonormaux directs de $\mathscr{E}$.

• ***Position du problème.*** — Nous nous proposons d'associer des *éléments métriques C^k-invariants* au couple constitué par un C^k-arc paramètre γ de $\mathscr{E}$, orienté et régulier, $k \geqslant 2$, et l'un de ses points ([1]). Nous passerons par l'intermédiaire des arcs géométriques.

— Dans un premier temps, nous définirons des *éléments métriques d'un arc géométrique orienté Γ en l'un de ses points M* (dans la mesure où nous utiliserons des représentants (ici normaux) de Γ il y aura lieu de s'assurer de l'indifférence de leur choix).

— Nous en viendrons à notre problème en posant :

DÉFINITION. — **On appelle invariants métriques du C^k-arc paramétré $(I, t \mapsto f(t))$, régulier et orienté dans le sens des t croissants, $k \geqslant 2$, au point de paramètre t, les éléments métriques de l'arc géométrique orienté représenté par (I, f) au point représenté par (I, f, t).**
La C^k-invariance est clairement assurée.

• ***Premières notations.*** — Soit Γ un C^k-arc géométrique *régulier* et *orienté*, $k \geqslant 2$.

A tout point M de Γ nous associons son image m_M, la tangente orientée $(\mathcal{T}_M, T_M)$ en M à Γ, le vecteur unitaire $\boldsymbol{\tau}_M$ de $\mathcal{T}_M$, les *normales* en M à Γ (droites orthogonales à $\mathcal{T}_M$ au point m_M), et le *plan normal* en M à Γ (plan orthogonal à $\mathcal{T}_M$, passant par m_M).

Si dim $\mathscr{E} = 3$ et si Γ admet un plan osculateur en M, $\mathscr{Q}_M$, et en particulier si M est un point bi-régulier de Γ, on appelle *normale principale* (resp. *binormale*) en M à Γ la normale incluse dans $\mathscr{Q}_M$ (resp. orthogonale à $\mathscr{Q}_M$) et *plan rectifiant* en M à Γ le plan défini par la tangente et la binormale en M à Γ.

Aucun de ces éléments que nous venons d'associer à M ne dépend du choix d'un représentant.

• Introduisons maintenant un représentant *normal* quelconque (J, g); l'indifférence du choix tient (ainsi que le lecteur le vérifiera dans chaque cas) à ce que tout autre représentant normal est de la forme (J_ξ, g_ξ) avec $\xi \in \mathbb{R}$, $J_\xi = \xi + J$, et $g_\xi : s \longmapsto g(s - \xi)$, ce qui entraîne :

$$\forall r \in \mathbb{N}_k \qquad \forall s \in J_\xi \qquad g_\xi^{(r)}(s) = g^{(r)}(s - \xi).$$

On note $m_M = m(s)$, $\boldsymbol{\tau}_M = \boldsymbol{\tau}(s)$; les applications $m = g$ et $\boldsymbol{\tau} = g'$ sont respectivement de classes C^k et C^{k-1} sur J.

([1]) Si γ est *simple*, nous en déduirons des éléments métriques du couple constitué par le support γ et un point de ce support.

2.2.1. Cas d'un arc plan

Il s'agit du seul cas envisagé dans les programmes des C.P.

Dans ce paragraphe, nous étudions d'abord un C^k-arc géométrique Γ orienté et régulier ($k \geqslant 2$) d'un plan affine euclidien orienté ($\mathscr{P}$, P).

Il sera commode de considérer ($\mathscr{P}$, P) comme un sous-espace d'un espace affine euclidien orienté ($\mathscr{E}$, E) de dimension 3 et d'introduire le vecteur unitaire $\mathbf{k}$ directement orthogonal à $\boldsymbol{\tau}$.

1° ***Normale orientée; courbure; formules de Serret-Frenet.*** — Γ admet en chacun de ses points M une normale unique.

DÉFINITION I. — **On appelle** *vecteur unitaire de la normale orientée* **à l'arc plan Γ au point M d'abscisse curviligne s le vecteur $\mathbf{v}(s) = \mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\tau}(s)$; on dit que** $(m(s);\ \boldsymbol{\tau}(s), \mathbf{v}(s))$ **est le repère de Serret-Frenet de Γ en M.**

On note $(m_M;\ \boldsymbol{\tau}_M, \mathbf{v}_M) = (m(s);\ \boldsymbol{\tau}(s), \mathbf{v}(s))$.
L'application $\mathbf{v} : J \to E$, est de classe C^{k-1}.
Nous disposons des applications de classe C^{k-2} :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = g''; \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}s} = \mathbf{k} \wedge g''$$

De $\|\boldsymbol{\tau}\|^2 = 1$ on déduit que $g''(s)$ est colinéaire à $\mathbf{v}(s)$, ce qui permet de poser :

DÉFINITION II. — **On appelle** *courbure algébrique* **de Γ au point M d'abscisse curviligne s le réel défini par $g''(s) = c(s)\mathbf{v}(s)$, i.e. le réel $c(s) = (g''(s)\,|\,\mathbf{v}(s))$.**

L'application $c : J \to \mathbb{R}$ est de classe C^{k-2}; c_M désignera $c(s)$.

• *Compte tenu de* $g' = \boldsymbol{\tau}$, $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}s} = \mathbf{k} \wedge g''$ *et* $\mathbf{k} \wedge \mathbf{v} = -\boldsymbol{\tau}$, *on obtient les «formules de Frenet» :*

$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = c\mathbf{v}$	$\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}s} = -c\boldsymbol{\tau}$

On notera que l'hypothèse de bi-régularité n'est pas nécessaire : c peut prendre la valeur 0.

• Un calcul de produits mixtes (II.2.4.1, 4°) donne :

$$[g', g''] = \left[\boldsymbol{\tau}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}\right] = [\boldsymbol{\tau}, c\mathbf{v}] = c[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}]$$

Comme $[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}] = 1$, il vient : $[g', g''] = c$.

DÉFINITION III. — **Si le point** M **de** Γ **d'abscisse curviligne** s **est birégulier (i.e. si** $g''(s) \neq 0$**) on dit que** $R(s) = 1/c(s)$ **est le** *rayon de courbure algébrique de* Γ *en* M, **et que le point de la normale en** M **à** Γ :

$$p(s) = m(s) + R(s)\mathbf{v}(s)$$

est le *centre de courbure de* Γ *en* M.

Les applications R et p sont de classe C^{k-2} sur tout intervalle où elles sont définies. D'autre part :

$$\overrightarrow{m(s)p(s)} = \|g''(s)\|^{-2}g''(s)$$

montre que *le centre de courbure est dans le demi-plan que nous avons appelé concavité.*

On note $R_M = R(s)$ et $p_M = p(s)$.

REMARQUES. — *a*) Si on remplace Γ par l'arc orienté opposé, alors les applications $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{v}$, c, p sont changées en $-\boldsymbol{\tau}$, $-\mathbf{v}$, $-c$, p.

b) Si on change l'orientation du plan, alors les applications $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{v}$, c, p sont changées en $\boldsymbol{\tau}$, $-\mathbf{v}$, $-c$, p.

2° On dit que $\mathscr{F}_M = \{m_M; \boldsymbol{\tau}_M, \mathbf{v}_M\}$, *repère de Frenet*, c_M *et éventuellement* R_M *et* p_M *sont les éléments métriques de* Γ *au point* M.

Pour dépasser le domaine théorique, il est nécessaire, à partir d'un représentant donné $(I, t \mapsto f(t))$ de Γ, de savoir calculer les éléments métriques de Γ au point M représenté par (I, f, t) qui sont, rappelons-le, *les éléments métriques de l'arc paramétré* (I, f) *au point de paramètre* t. On utilise :

THÉORÈME. — **Dans ces conditions, les éléments métriques de** Γ **au point** M **s'expriment en utilisant exclusivement** $f(t)$, $f'(t)$ et $f''(t)$.

Par la définition même des éléments m_M et $\boldsymbol{\tau}_M$, on a :

$m_M = f(t)$	$\boldsymbol{\tau}_M = \|f'(t)\|^{-1}f'(t)$	$\mathbf{v}_M = \mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\tau}_M$

Reste le cas de c_M. On utilise $f = g \circ \varphi$, $\varphi \in \mathrm{Diff}_+^{(k)}(I, J)$. On connaît $\varphi' = \|f'\|$ (cf. rectification); φ ne s'en déduirait que par une quadrature que l'on ne sait en général pas effectuer, mais cela ne gêne pas. La dérivation de l'application composée $t \mapsto g(\varphi(t))$ fournit en effet :

$$f'(t) = g'(\varphi(t))\varphi'(t)$$
$$f''(t) = g'(\varphi(t))\varphi''(t) + g''(\varphi(t))(\varphi'(t))^2$$

En utilisant $\|g'(\varphi(t))\| = 1$ et $\varphi'(t) > 0$, il vient :

$$[f(t), f''(t)] = \|f'(t)\|^3[g'(\varphi(t)), g''(\varphi(t))]$$

et, comme $c_M = [g'(\varphi(t)), g''(\varphi(t))]$, on a :

$$\boxed{c_M = \|f'(t)\|^{-3}[f'(t), f''(t)]}$$

• Si M est bi-régulier, on a en outre :

$$\boxed{R_M = 1/c_M \qquad p_M = m_M + R_M \mathbf{v}_M}$$ □

3° ***Invariants métriques d'un arc paramétré en l'un de ses points.*** — Soit $\gamma = (I, f)$ un C^k-arc paramétré régulier, orienté dans le sens des t croissants. La définition des invariants de (I, f) au point de paramètre t_0 (cf. le début du **2**.2) et l'étude du 2° conduisent à poser :

NOTATION DÉFINITIVE. — *A condition que (I, f) soit seul en jeu, on note m, $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{v}$, c les applications définies sur I par :*

$$m = f; \qquad \boldsymbol{\tau} = \frac{f'}{\|f'\|}; \qquad \mathbf{v} = \mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\tau}; \qquad c = \frac{[f', f'']}{\|f'\|^3} \tag{1}$$

et on note R et p les applications définies sur tout sous-intervalle de I sur lequel c ne prend pas la valeur 0 *par :*

$$R = \frac{1}{c}; \qquad p = m + R\mathbf{v} \tag{2}$$

Les invariants de (J, f) au point de paramètre t sont ainsi *le repère de Frenet* $(m(t); \boldsymbol{\tau}(t), \mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\tau}(t))$, *la courbure* $c(t)$, et éventuellement *le rayon de courbure* $R(t)$ et *le centre de courbure* $p(t) = m(t) + R(t)\mathbf{v}(t)$.

REMARQUES. — *a*) Dans le cas d'un représentant normal d'un arc géométrique on retrouve les notations du 1° (avec alors $t = s$).

b) Il y a quelque risque de confusion si coexistent un représentant quelconque et un représentant normal d'un arc géométrique. Par abus de langage nous préciserons alors (suivant le cas) *fonctions de la variable t* ou *fonctions de la variable s*.

• ***Calculs pratiques.*** Distinguons les cas :

a) ***Coordonnées cartésiennes.*** — $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ désignant un repère orthonormal direct de $\mathscr{P}$, on adopte :

$$f(t) = O + x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

On a les égalités d'applications définies sur I :

$$m = f; \qquad m' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}; \qquad m'' = x''\mathbf{i} + y''\mathbf{j}; \qquad [m', m''] = x'y'' - y'x''$$

Compte tenu de (1), on obtient ici :

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \frac{x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}}{(x'^2 + y'^2)^{1/2}}} \; \boxed{c = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}} \tag{3}$$

Rappelons que, d'après le choix de l'orientation, on a :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = (x'^2 + y'^2)^{1/2}$$

Dans le cas où le paramètre est $t = x$ (avec orientation dans le sens des x croissants) on a :

$$c = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

b) ***Coordonnées polaires.*** — Ici : $f(t) = \rho(t)\mathbf{u}_{\theta(t)}$.

On a : $m' = \rho'\mathbf{u} + \rho\theta'\mathbf{v}$, $\quad m'' = (\rho'' - \rho\theta'^2)\mathbf{u} + (\rho\theta'' + 2\rho'\theta')\mathbf{v}$

$$[m', m''] = \begin{vmatrix} \rho' & \rho'' - \rho\theta'^2 \\ \rho\theta' & \rho\theta'' + 2\rho'\theta' \end{vmatrix}$$

D'où : $$c = (\rho'^2 + \rho^2\theta'^2)^{-3/2}\begin{vmatrix} \rho' & \rho'' - \rho\theta'^2 \\ \rho\theta' & \rho\theta'' + 2\rho'\theta' \end{vmatrix}$$

• Dans le cas où le paramètre est $t = \theta$ (avec orientation dans le sens des θ croissants) on a :

$$c = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}} \tag{4}$$

Rappelons qu'ici : $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = (\rho^2 + \rho'^2)^{1/2}$.

Dans le cas où $O \notin \operatorname{supp} \gamma$ (i.e. où ρ ne prend pas la valeur 0), il est alors commode d'introduire la fonction $\omega = 1/\rho$. On constate que :

$$c = \omega^3\left(\omega^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right)^{-3/2}\left(\omega + \frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}\theta^2}\right)$$

Les points d'inflexion sont donnés par : $\omega(\theta) + \omega''(\theta) = 0$.

4° ***Angle d'un axe fixe et de la tangente orientée.*** — $\mathscr{P}$ affine euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$.

THÉORÈME. — **Soient $\gamma = (I, f)$ un C^k-arc paramétré orienté et régulier de $\mathscr{P}$ et $\tau(t)$ le vecteur unitaire de la tangente ortientée à γ au point de paramètre t. Alors il existe une application continue $\alpha : I \to \mathbb{R}$, unique modulo 2π, telle que, pour tout $t \in I$, $(\mathbf{i}, \tau(t)) = \alpha(t) \pmod{2\pi}$, ce qui s'écrit :**

$$\tau(t) = \cos \alpha(t)\mathbf{i} + \sin \alpha(t)\mathbf{j}$$

L'application α est de classe C^{k-1}. Les résultats que nous allons obtenir ne font intervenir que sa dérivée; d'où *l'indifférence du choix du repère.*

On note $u(t)$ et $v(t)$ les composantes du vecteur unitaire $\tau(t)$ dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ et on applique le théorème du relèvement du **1.4.*1***, 2° à l'application $t \mapsto u(t) + iv(t)$ de γ dans $\mathbb{C}$, de classe C^{k-1}. □

• On a clairement, en notant $f(t) = O + x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$:

$$\cos \alpha = x'/\sqrt{x'^2 + y'^2}; \qquad \sin \alpha = y'/\sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

L'arc γ étant régulier, pour tout $t \in I$ on a $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$. Il existe donc un sous-intervalle I' de I contenant t sur lequel est définie au moins l'une des fonctions $\operatorname{tg} \alpha = y'/x'$ ou $\operatorname{cotg} \alpha = x'/y'$. D'où :

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2},$$

ou

$$(1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha) \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = - \frac{y'x'' - x'y''}{y'^2}$$

et dans tous les cas :

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2} \tag{5}$$

Compte tenu de (3) et de $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, on obtient :

$$\forall t \in I \qquad c(t) = \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} \tag{5'}$$

• En particulier, si γ est un représentant normal d'un arc géométrique Γ, on a :

$$c = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$$

La fonction courbure (de la variable s) est alors la dérivée de la fonction α (de la variable s).

CONCLUSION. — **Les seules formules à retenir s'écrivent :**

$\cos \alpha = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$; $\quad \sin \alpha = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$ (6)	$c = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$ (7)

Elles sont valables dans tous les cas, étant entendu que les seconds membres des égalités désignent :

— *si la variable est l'abscisse curviligne s :* **les dérivées des fonctions** $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ **et** α **de cette variable;**

— *si la variable est t :* **les applications** $t \mapsto x'(t)/s'(t)$, $t \mapsto y'(t)/s'(t)$ **et** $t \mapsto \alpha'(t)/s'(t)$.

On notera que si (6) permet d'expliciter la fonction α, alors une simple dérivation fournit la fonction c; mais c'est exceptionnel : en général il faut déduire (5) de (6) et utiliser (7) sous la forme (5').

— Supposons que γ soit défini en coordonnées polaires par : $f(\theta) = O + \rho(\theta)\mathbf{u}_\theta$ (et orienté dans le sens des θ croissants).

Nous avons vu que : $\dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$. Introduisons (fig. 32) l'angle :

$$\varphi = (\mathbf{u}_\theta, \boldsymbol{\tau}) = (\mathbf{i}, \boldsymbol{\tau}) - (\mathbf{i}, \mathbf{u}_\theta) = \alpha - \theta.$$

De : $\qquad \boldsymbol{\tau} = \dfrac{d\rho}{ds}\mathbf{u}_\theta + \rho\dfrac{d\theta}{ds}\mathbf{v}_\theta$, on déduit :

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{d\rho}{ds} = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}} \quad \boxed{\sin\varphi = \rho\frac{d\theta}{ds} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}} \quad (8)$$

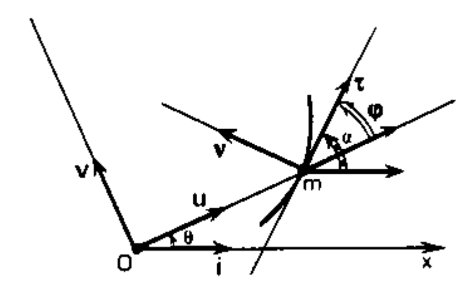


FIG. 32.

Si ces dernières formules permettent d'expliciter φ et donc α en fonction de θ, on en déduit la courbure au point de paramètre θ par une dérivation.

Sinon on constate que l'on peut toujours disposer de l'une des fonctions $\operatorname{cotg}\varphi = \rho'/\rho$ ou $\operatorname{tg}\varphi = \rho/\rho'$. On obtient :

$$-(1 + \operatorname{cotg}^2\varphi)\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\rho\rho'' - \rho'^2}{\rho^2}, \qquad \text{ou} \qquad (1 + \operatorname{tg}^2\varphi)\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2},$$

et dans tous les cas : $\qquad \dfrac{d\varphi}{d\theta} = \dfrac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}.$

D'où :

$$\boxed{\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}} \qquad (9)$$

Reste à utiliser (9) et (7) pour obtenir $R(\theta)$.

• ***Centre de courbure.*** — Sachant que ce point est dans la concavité, on dispose d'une interprétation graphique du signe de $R(t)$: avec les conventions usuelles de dessin, $R(t) > 0$ signifie que la concavité au point $M(t)$, est « à gauche » de la tangente orientée à γ au point $M(t)$.

a) En *coordonnées cartésiennes* on note $p = \xi\mathbf{i} + \eta\mathbf{j}$, avec :

$$\xi = x - R\sin\alpha; \qquad \eta = y + R\cos\alpha$$

On retient :

$$\boxed{\xi = x - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha}} \quad \boxed{\eta = y + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha}} \tag{10}$$

ces formules ayant l'énorme avantage de conduire aux expressions rationnelles des fonctions ξ et η de la variable t :

$$\xi = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}; \qquad \eta = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} \tag{11}$$

(qui se simplifient dans le cas de $f(x) = O + x\mathbf{i} + y(x)\mathbf{j}$).

En particulier supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $x(t_0) = y(t_0) = y'(t_0) = 0$ et $x'(t_0) \neq 0$; γ admet un point M_0 régulier d'image O, de tangente $O + \mathbb{R}\mathbf{i}$. Ce point est bi-régulier si, et seulement si $(x'y'' - y'x'')(t_0) \neq 0$, i.e. $y''(t_0) \neq 0$. Par application de la formule de Taylor, on constate que $\lambda = y''(t_0)/[x'(t_0)]^2$ s'écrit :

$$\lambda = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{2y(t)}{x^2(t)}.$$

M_0 est donc bi-régulier si, et seulement si $\lambda \neq 0$; dans ce cas, d'après (11), le centre de courbure en M_0 est $O + 1/\lambda.\mathbf{j}$.

— Notons que l'arc régulier γ étant localement plongé nous pouvons (quitte à le remplacer par un sous-arc) parler de la limite de $2y/x^2$ quand $m \in \operatorname{supp} \gamma$ tend vers O. Le calcul précédent peut être utilisé sans qu'un paramétrage soit explicité.

Ainsi, pour la parabole d'équation $x^2 - 2py = 0$, les coordonnées du centre de courbure en O sont (O, p) (il s'agit donc du symétrique du sommet par rapport au foyer).

Par contre la « courbe » d'équation $y - x^4 = 0$ n'admet pas de point bi-régulier en O et donc pas de centre de courbure.

b) En *coordonnées polaires*, on écrit $p = O + X\mathbf{u}_\theta + Y\mathbf{v}_\theta$, avec :

$$X = \rho - R \sin \varphi ; \qquad Y = R \cos \varphi$$

De (7) et (8) on déduit :

$$X = \rho \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\alpha}; \qquad Y = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\alpha}.$$

REMARQUE. — S'il existe $\theta_0 \in I$ tel que $\rho(\theta_0) = 0$ et $\rho'(\theta_0) \neq 0$ le centre de courbure au point de paramètre θ_0 et d'image O est (d'après le calcul fait en *a*)) le point $p_0 = O + \mu \mathbf{v}_{\theta_0}$, avec :

$$\mu = \lim_{\substack{\theta \to \theta_0 \\ \theta \neq \theta_0}} \frac{\rho^2(\theta) \cos^2(\theta - \theta_0)}{2\rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0)} = \lim_{\theta \to \theta_0} \frac{\rho(\theta)}{2(\theta - \theta_0)} = \frac{1}{2} \rho'(\theta_0).$$

5° ***Développée d'un arc plan.*** — Commençons par le cas d'un arc paramétré.

DÉFINITION I. — **Soit $\gamma = (I, t \mapsto f(t))$ un C^k-arc paramétré orienté et bi-régulier de $\mathscr{P}$, $k \geqslant 3$. Le C^{k-2}-arc paramétré $\gamma' = (I, t \mapsto p(t))$, où $p(t)$ est le centre de courbure de γ au point de paramètre t est appelé** *développée de* γ.

Il est clair que deux arcs paramétrés C^k-équivalents ont pour développées des arcs C^{k-2} équivalents, ce qui conduit à poser :

DÉFINITION II. — **Soit Γ un C^k-arc géométrique orienté et birégulier de $\mathscr{P}$, $k \geqslant 3$. On appelle** *développée de* Γ **le C^{k-2} arc géométrique Γ' représenté par la développée de l'un quelconque des représentants de Γ.**

On vérifie que Γ' ne dépend ni de l'orientation de $\mathscr{P}$, ni de celle de Γ.

En utilisant un représentant normal $(J, s \mapsto g(s))$ de Γ, et les fonctions R et $p = m + R\mathbf{v}$ *de la variable* s, nous allons démontrer :

THÉORÈME I. — **Soit $s_0 \in J$. On note M_0 et P_0 les points de Γ et Γ' représentés par (J, g, s_0) et (J, p, s_0) et on suppose que Γ' admet une tangente au point P_0; alors celle-ci est la normale à Γ au point M_0.**

Par hypothèse il existe $r = \min \{ i \in \mathbb{N}_{k-2} \,|\, p^{(i)}(s_0) \neq 0 \}$. En utilisant la première formule de Frenet on a :

$$p'(s_0) = R'(s_0)\mathbf{v}(s_0)$$

Si $R'(s_0) \neq 0$, on a $r = 1$ et le théorème est démontré. Sinon, on constate : $p'(s_0) = 0$ et $p''(s_0) = R''(s_0)\mathbf{v}(s_0)$; par récurrence, on aboutit à :

$$r = \min \{ i \in \mathbb{N}_{k-2} \,|\, R^{(i)}(s_0) \neq 0 \} \quad \text{et} \quad p^{(r)}(s_0) = R^{(r)}(s_0)\mathbf{v}(s_0). \qquad \square$$

• A la notation près, le théorème précédent s'applique à tout arc paramétré et à sa développée, ce qui fait penser à la théorie des enveloppes et conduit à :

THÉORÈME II. — **Les notations étant celles de la définition I, si la développée γ' de γ admet une tangente en chacun de ses points (et en particulier, si γ' est régulier), alors toute C^{k-1}-famille, définie cartésiennement ou paramétriquement, de la forme $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ où $\mathscr{D}_t$ est la normale à γ au point de paramètre t, admet γ' pour enveloppe, ce que l'on traduit en disant que** *γ' est l'enveloppe de la famille des normales à γ.*

En utilisant 1.6.2, 3°, *a*) et 1.6.3, 5°, *a*) il suffit de le montrer quand $\mathscr{D}_t$ est donnée par l'équation :

$$((X - f(t)) \,|\, f'(t)) = 0$$

qui s'écrit, en utilisant un repère orthonormal :

$$(x - x(t))x'(t) + (y - y(t))y'(t) = 0 \tag{12}$$

Ici L_t s'obtient en associant à (12) l'équation :

$$(x - x(t))x''(t) + (y - y(t))y''(t) - (x'^2 + y'^2)(t) = 0$$

La birégularité de γ fait que $\delta = x'y'' - y'x''$ ne prend pas la valeur 0; L_t admet une solution unique; le calcul et (11) montrent qu'il s'agit des coordonnées du centre de courbure de γ au point de paramètre t. L'hypothèse faite sur γ' permet de conclure. $\square$

• Ceci valant pour tous représentants γ de l'arc géométrique Γ et γ' de sa développée Γ', nous énoncerons, par abus de langage :

THÉORÈME II. — **Les notations étant celles de la définition II, si la développée Γ' de Γ admet une tangente en chacun de ses points** (et, en particulier, si Γ' est régulier), **alors Γ' est l'enveloppe de la famille des normales à Γ.**

REMARQUES. — *a*) Si la fonction R est constante, $p(s)$ est fixe. Dans ce cas supp Γ est inclus dans un cercle ; la réciproque est triviale.

b) Les points stationnaires de Γ' correspondent à $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}(s_0) = 0$, ce qui correspond en général à un extremum relatif du rayon de courbure de Γ (on étudiera en particulier les $m(s_0) \in \operatorname{supp} \Gamma$ appartenant à un axe de symétrie, cf. exemples).

c) Étudions le cas où $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}$ ne s'annule pas (et est donc de signe fixe) sur J. On peut orienter la développée Γ' de façon que, l'abscisse curviligne étant notée σ, on ait :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\sigma} = \mathbf{v} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}.$$

Ainsi $\sigma = R + \sigma_0$ $(\sigma_0 \in \mathbb{R})$.

— Plus généralement, *pour tout sous-arc de Γ sur lequel R est monotone* (ce qui n'interdit plus à $R'(s)$ de s'annuler), *la longueur de l'arc de développée correspondante est égale à la variation totale du rayon de courbure.*

En effet $\left\|\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}\right\|$ est soit $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}$, soit $-\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}$.

d) Pour $k \geqslant 4$, on calcule : $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} \wedge \frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}s^2} = \frac{1}{R}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)^2 \mathbf{k}$. On en déduit (pour $k \geqslant 4$) que *tout point régulier de la développée est bi-régulier.*

• Dans la pratique, on travaille sur un arc paramétré γ et on recherche l'enveloppe γ' de γ soit au titre de *lieu du centre de courbure* soit à celui d'*enveloppe de la famille des normales.*

Un cas particulier important a fait l'objet du **1**.6.*2*, 4°.

a) *Ellipse. — Ici γ est l'arc paramétré* $(\mathbb{R}, f)$ *avec :*

$$f(t) = O + a \cos t\,\mathbf{i} + b \sin t\,\mathbf{j}, \qquad 0 < b < a.$$

On note $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. γ est visiblement de classe C^∞. Il est bi-régulier. En effet :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = ab \neq 0.$$

Par simple application des formules (11) du 4° on obtient la développée :

$$\left(\mathbb{R},\ t \longmapsto O + \frac{c^2}{a}\cos^3 t\,\mathbf{i} - \frac{c^2}{b}\sin^3 t\,\mathbf{j}\right).$$

Il s'agit d'une transformée par affinité orthogonale d'une *astroïde* (**1**.6.*2*, *in fine*). Sur la figure 33, on a pris $a = 2b$.

A titre d'exercice, le lecteur vérifiera que, p_0 et p_1 désignant les centres de courbure à l'ellipse aux sommets $m_0 = O + a\mathbf{i}$ et $m_1 = O + b\mathbf{j}$, la droite p_0p_1 est orthogonale à la droite m_0m_1 et contient le point $O + a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

b) *Cardioïde. — En coordonnées polaires :* $\rho = a(1 + \cos\theta)$, $a > 0$. Nous nous limitons à $\theta \in]-\pi, \pi[$ et, ainsi, γ est un C^∞-arc régulier. Nous l'orientons dans le sens des θ croissants, en adoptant $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = 2a\cos\frac{\theta}{2}$, et donc :

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}; \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{3\theta}{2}; \qquad R = \frac{4a}{3}\cos\frac{\theta}{2}.$$

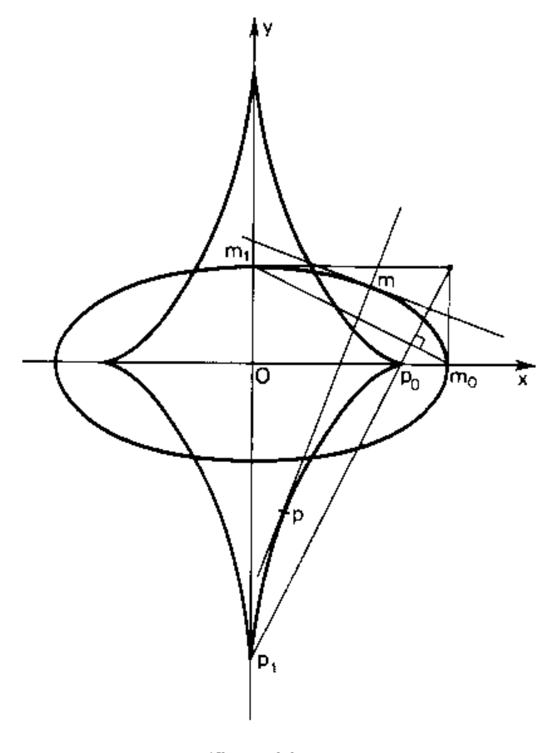


FIG. 33.

Les coordonnées du centre de courbure sont, dans le repère mobile :

$$X = a/3.(1 + \cos\theta), \qquad Y = -2a/3.\sin\theta$$

et donc dans le repère fixe :

$$\xi = X\cos\theta - Y\sin\theta, \qquad \eta = X\sin\theta + Y\cos\theta$$

soit : $$\xi = \frac{2a}{3} + \frac{a}{3}(1 - \cos\theta)\cos\theta, \qquad \eta = \frac{a}{3}(1 - \cos\theta)\sin\theta$$

Dans le repère déduit du repère initial par la translation de vecteur $2a/3.\mathbf{i}$, la développée admet l'équation polaire $\rho = a/3.(1 - \cos\theta)$. Il s'agit donc d'une cardioïde, déduite de la première par similitude (cela tient à ce qu'il s'agit d'une épicycloïde, cf. 10°).

6° *Arcs parallèles.* — L'arc géométrique orienté Γ, de classe C^k ($k \geqslant 2$) et régulier est défini par un représentant normal (J, g).

DÉFINITION. — **A tout $a \in \mathbb{R}$, on associe le C^{k-1} arc géométrique Γ_a dont un représentant — non normal en général — est (J, g_a), avec : $g_a = m + a\mathbf{v}$. On dit que Γ_a est un *arc parallèle* à Γ.**

Un changement d'orientation de $\mathscr{P}$ ou de Γ revient à changer Γ_a en Γ_{-a}.

On calcule :

$$\frac{dg_a}{ds} = (1 - ac)\boldsymbol{\tau} \quad (c \text{ : courbure algébrique de } \Gamma).$$

— Les points stationnaires de Γ_a correspondent donc aux $s \in J$ tels que $ac(s) = 1$, i.e. aux points bi-réguliers de Γ en lesquels $R(s) = a$.

— Pour s tel que $ac(s) \neq 1$, Γ et Γ_1 admettent aux points de paramètre s des tangentes parallèles (d'où le vocable *arcs parallèles*) et des normales confondues.

L'interprétation de la développée comme enveloppe de normales suggère :

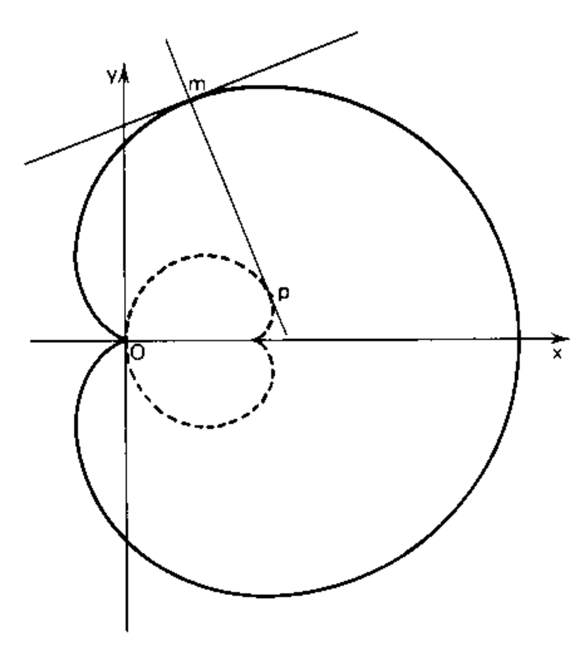


FIG. 34.

THÉORÈME. — **Si Γ est de classe C^∞ et bi-régulier et si la fonction courbure ne prend pas la valeur a^{-1}, alors Γ et l'arc parallèle Γ_a ont la même développée.**

L'arc Γ_a, ici de classe C^∞, est bi-régulier. En effet on a :

$$g'_a = (1 - ac)\tau\,; \qquad g''_a = -ac'\tau + c(1 - ac)\mathbf{v}$$

ce qui entraîne que $[g'_a, g''_a] = c(1 - ac)^2$ ne prend pas la valeur 0. Orientons Γ_a dans le sens des s croissants : notant $s_a(s)$ et $\tau_a(s)$ l'abscisse curviligne et le vecteur unitaire de la tangente orientée au point de Γ_a de paramètre $s \in J$, nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}s_a}{\mathrm{d}s} = \varepsilon(1 - as) \qquad \text{et} \qquad \tau_a = \varepsilon\tau, \quad \text{où } \varepsilon = \operatorname{sgn}(1 - ac) = C^{\text{te}}.$$

Le rayon de courbure de Γ_a au point de paramètre s est :

$$R_a(s) = \frac{\|g'_a(s)\|^3}{[g'_a(s), g''_a(s)]} = \varepsilon\,\frac{1 - ac}{c} = \varepsilon(R - a)$$

Comme $\mathbf{v}_a = \varepsilon\mathbf{v}$, le centre de courbure de Γ_a au point de paramètre s est :

$$g_a(s) + R_a(s)\mathbf{v}_a(s) = m(s) + a\mathbf{v}(s) + (R(s) - a)\mathbf{v}(s) = p(s). \qquad \square$$

REMARQUES. — *a*) Ici Γ et Γ_a jouent des rôles symétriques (Γ est parallèle à Γ_a).

b) L'hypothèse $k \geqslant 4$ suffit pour que Γ_a ait une développée ; mais celle-ci est alors de classe C^{k-3}, alors que Γ' est de classe C^{k-2}.

7° ***Développantes***. — Étant donné un arc géométrique orienté Γ, nous cherchons s'il existe des arcs géométriques dont il soit la développée. Pour simplifier, nous supposons que Γ est de classe C^∞ et régulier, et même (remarque *d*) du **5°**) bi-régulier; soit (J, g) un représentant normal de Γ.

Nous recherchons un représentant (J, f) d'un arc géométrique Δ dont la développée soit Γ, ce qui (cf. définition du **5°**) exige que Δ soit de classe C^∞ et bi-régulier.

Il doit exister une application $\lambda : J \to \mathbb{R}$ telle que $f = g + \lambda\boldsymbol{\tau}$, ce qui exige que $\lambda = (f - g|\boldsymbol{\tau})$ soit de classe C^∞, et que : $f' = (1 + \lambda')\boldsymbol{\tau} + \lambda c\mathbf{v}$. Mais $(f'|\boldsymbol{\tau})$ doit être l'application nulle de J dans $\mathbb{R}$, si bien que λ' doit être la constante $s \longmapsto -1$ et que f ne peut être que l'une des applications :

$$f_{s_0} : \quad J \to \mathbb{R} \qquad s \longmapsto g(s) + (s_0 - s)\boldsymbol{\tau}(s), \quad (s_0 \in \mathbb{R}).$$

• Inversement, soit $s_0 \in \mathbb{R}$. Nous disposons de l'arc géométrique Δ_{s_0} représenté par (J, f_{s_0}). Nous avons :

$$\forall s \in J, \qquad f'_{s_0}(s) = (s_0 - s)c(s)\mathbf{v}(s).$$

Limitons-nous au cas où $s_0 \notin J$ (quitte à remplacer Γ par un sous-arc représenté par $(J', g|J')$ où J' est un sous-intervalle de J tel que $s_0 \notin J'$). Nous constatons qu'ainsi Δ_{s_0} est régulier. Nous pouvons l'orienter de façon que ($\sigma(s)$, $\boldsymbol{\tau}_1(s)$, $\mathbf{v}_1(s)$ désignant l'abscisse curviligne, et les vecteurs unitaires de la tangente et de la normale au point de Δ_{s_0} de paramètre s) :

$$\sigma'(s) = (s_0 - s)c(s); \qquad \boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{v}; \qquad \mathbf{v}_1 = -\boldsymbol{\tau}$$

De $\dfrac{d\boldsymbol{\tau}_1}{d\sigma} = \dfrac{d\mathbf{v}}{ds}\dfrac{ds}{d\sigma}$ on déduit : $\dfrac{d\boldsymbol{\tau}_1}{d\sigma}(s) = \dfrac{1}{s_0 - s}\mathbf{v}_1(s)$.

Δ_{s_0} est ainsi bi-régulier et admet $s_0 - s$ pour rayon de courbure au point de paramètre s ; le centre de courbure en ce point est donc :

$$f_{s_0}(s) + (s_0 - s)(-\boldsymbol{\tau}(s)) = g(s).$$

Il en résulte que Δ_{s_0} admet Γ pour développée. Nous pouvons énoncer :

DÉFINITION ET THÉORÈME. — **Un C^∞-arc géométrique orienté, bi-régulier Γ étant défini par un représentant normal (J, g), on appelle** *développantes* **de Γ les C^∞-arcs géométriques Δ_{s_0} représentées par les arcs paramétrés :**

$$(J, f_{s_0}), \quad \text{avec} \quad f_{s_0} : s \longmapsto g(s) + (s_0 - s)\boldsymbol{\tau}(s)$$

Pour $s_0 \in J$ donné, tout sous-arc de Δ_{s_0} de représentant $(J', f_{s_0}|J')$, où J' est un sous-intervalle de J ne contenant pas s_0, admet pour développée le sous-arc de Γ représenté par $(J', g|J')$.

L'indifférence du choix du représentant normal (J, g) de Γ est évidente.

REMARQUES. — *a*) Il suffit que Γ soit un C^k-arc orienté régulier ($k \geqslant 2$) pour que l'on puisse lui associer des développantes par la définition précédente. L'égalité :

$$f'_{s_0}(s) = (s_0 - s)c(s)\mathbf{v}(s)$$

subsiste : les points stationnaires sont donnés par $s = s_0$ (points à image sur supp Γ) et par $c(s) = 0$.

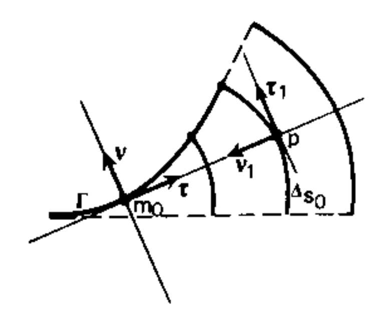


FIG. 35.

b) Deux des développantes de Γ sont des sous-arcs parallèles. On peut concevoir (fig. 35) une génération du support d'une développante par « déroulement » d'un fil antérieurement enroulé sur supp Γ.

c) Il peut être commode, pour déterminer la développée ou les développantes d'un arc de le considérer comme enveloppe de la famille de ses tangentes (cf. **1**.6.*2*, 4°, *in fine*).

EXEMPLE. – *Chaînette :* $y/a = \operatorname{ch} x/a$.

Γ est ici le C^∞-arc géométrique représenté par $\left(\mathbb{R} \longmapsto O + t\mathbf{i} + a \operatorname{ch} \frac{t}{a} \mathbf{j}\right)\cdot$ On constate qu'il est bi-régulier. On l'oriente dans le sens des t croissants ; d'où $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \operatorname{ch} \frac{t}{a}$ et, par exemple $s = a \operatorname{sh} \frac{t}{a}\cdot$

$\boldsymbol{\tau}$ est donné par :
$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\operatorname{ch} t/a}, \qquad \sin\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \operatorname{th} t/a\,.$$

La développante Δ_{s_0} est donc donnée par :
$$\begin{cases} x = t + (s_0 - a \operatorname{sh} t/a) \dfrac{1}{\operatorname{ch} t/a}, \\[2ex] y = a \operatorname{ch} \dfrac{t}{a} + (s_0 - a \operatorname{sh} t/a) \operatorname{th} t/a \end{cases}$$

En particulier Δ_0, dite *tractrice* est donnée par :
$$x = t - a \operatorname{th} t/a, \qquad y = \frac{a}{\operatorname{ch} t/a}$$

8° *Roulement sans glissement*. – On considère deux C^2-arcs paramétrés normaux, définis sur un même intervalle, $\gamma = (J, g)$ et $\gamma_1 = (J, g_1)$; on note $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}_1$ leurs supports.

Soit $(i(s)\,;\,\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s))$ [resp. $(\mu(s)\,;\,\boldsymbol{\tau}(s)\,;\,\mathbf{v}(s))$] le repère de Serret-Frenet de γ [resp. γ_1] au point d'abscisse curviligne s. On note u_s l'unique déplacement du plan affine $\mathscr{E}$ qui (pour s donné) transforme $\mu(s)$ en $i(s)$ et $\mu(s) + \boldsymbol{\tau}(s)$ en $i(s) + \mathbf{t}(s)$; la partie linéaire de u_s est une rotation de E dont l'angle est noté $\theta(s)$, l'application $\theta : J \to \mathbb{R}$ étant de classe C^1 d'après le théorème du relèvement.

On définit enfin, à partir d'un point fixe m_0 de $\mathscr{E}$, l'arc paramétré $\Gamma = (J, f)$, de support $\mathscr{C}$, tel que, pour tout $s \in J$, le point $m(s) = f(s)$ soit l'image de m_0 par le déplacement $u(s)$, (on n'a pas nécessairement $m_0 \in \operatorname{supp} \Gamma$). On dit dans ce contexte que Γ est *un* arc obtenu par *roulement sans glissement* de la roulante γ_1 (ou $\mathscr{S}_1$) sur la base γ (ou $\mathscr{S}$).

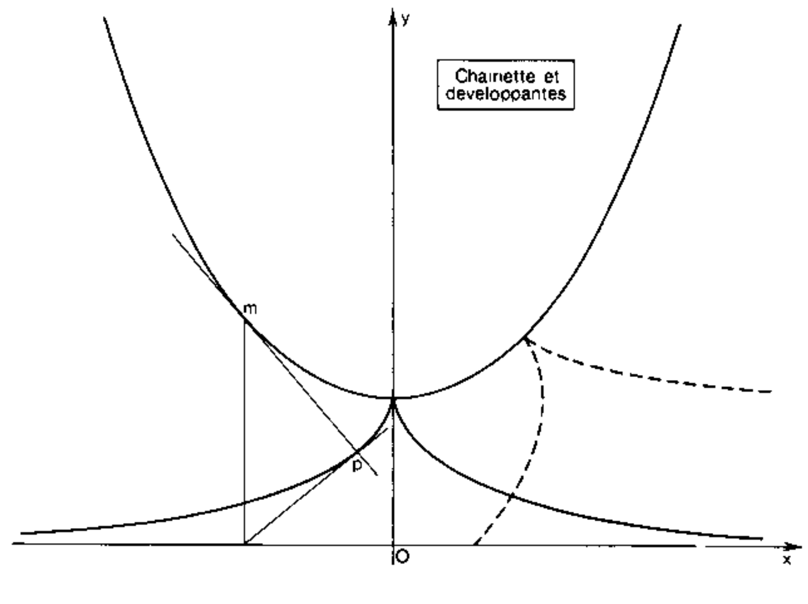


FIG. 36.

Les affixes de $i(s)$, $\mu(s)$, m_0, $m(s)$ dans un repère orthonormal fixe $(O\,;\, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ étant notées $z(s)$, $\zeta(s)$, k, $Z(s)$, on a :

$$Z(s) = z(s) + e^{i\theta(s)}(k - \zeta(s))$$

ce qui montre que l'arc Γ est de classe C^1.

De $(\boldsymbol{\tau}(s), \mathbf{t}(s)) = \theta(s)$ on déduit : $z'(s) = e^{i\theta(s)}\zeta'(s)$. D'où :

$$Z'(s) = i\theta'(s)e^{i\theta(s)}(k - \zeta(s)) = i\theta'(s)(Z(s) - z(s))$$

ce qui se traduit vectoriellement par :

$$f'(s) = \theta'(s)\mathbf{k} \wedge \overrightarrow{i(s)m(s)}, \qquad \text{où} \qquad \mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}. \tag{12}$$

En particulier, *si* $f'(s) \neq 0$ *la normale à* Γ *en* $m(s)$ *contient* $i(s)$.

* ***Interprétation cinématique.*** – Toutes les fonctions qui interviennent étant ici de classe C^2, supposons que s est une fonction du temps, soit $s = \varphi(t)$ avec $t \in I$. A tout $m_0 \in \mathscr{E}$ on peut ainsi associer le mouvement ponctuel $t \longmapsto u_{\varphi(t)}(m_0)$; la famille ainsi obtenue définit le mouvement d'un solide par rapport à $\mathscr{E}$ (mouvement plan sur plan). Le champ des vecteurs-vitesse des points de ce solide à la date t est le même que s'il s'agissait du mouvement de rotation de vitesse angulaire $\dfrac{d\theta}{dt}$, de centre $i(s(t))$; ce point est dit *centre instantané de rotation* à la date t.*

9° ***Cycloïde.*** – Nous reprenons les notations du **8°**, en supposant que la base $\mathscr{S}$ est une droite, et que la roulante $\mathscr{S}_1$ est un cercle (rayon $a > 0$). On dit alors que :

– Γ est une *cycloïde* lorsque le point m_0 appartient à $\mathscr{S}_1$;

– Γ est une *cycloïde raccourcie* (resp. *allongée*) lorsque m_0 est *intérieur* (resp. *extérieur*) à $\mathscr{S}_1$.

Le lecteur dessinera quelques supports; il constatera que l'on a suivant le cas des points de rebroussement, des « ondulations » ou des « boucles ».

Moyennant un choix convenable du repère et du paramètre, on obtient, (cf. fig. 37) avec $t = (\overrightarrow{\omega m}, \overrightarrow{\omega i})$, la représentation d'une cycloïde :

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t).$$

DÉVELOPPÉE. — Le point m'_0 diamétralement opposé à m_0 sur $\mathscr{S}_1$ fournit une cycloïde Γ'(décrite par m') déduite de Γ par la translation $\pi a\mathbf{i}$. Les normales à Γ en m et à Γ' en m' se coupent en i ; les tangentes se coupent en j, de coordonnées $(at, 2a)$. La normale en m à Γ se déduit donc de la tangente en m' à Γ' par la translation $-2a\mathbf{j}$; la développée de Γ se déduit de Γ par la translation $\pi a\mathbf{i} - 2a\mathbf{j}$; le centre de courbure en m à Γ est le symétrique p de m par rapport à i. On notera que, *stricto-sensu*, nous n'avons défini la développée que pour un arc bi-régulier ; il faudrait donc étudier séparément les « arches » Γ_k relatives à $t \in]2k\pi, (2k+2)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$.

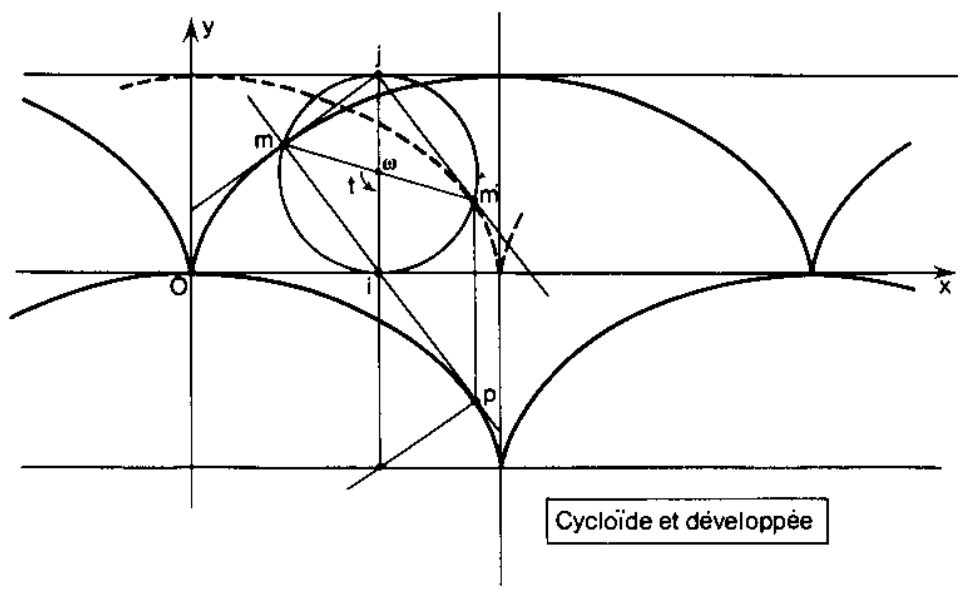


FIG. 37.

Pour Γ_0, orientée dans le sens des t croissants, on calcule d'ailleurs

$$\frac{ds}{dt} = 2a \sin\frac{t}{2}; \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{dt} = \sin\frac{t}{2}; \qquad \sin\alpha = \frac{dy}{dt} = \cos\frac{t}{2}.$$

D'où :
$$\alpha = \pi/2 - t/2 \qquad \text{et} \qquad R = -4a \sin t/2.$$

On en déduit les coordonnées du centre de courbure p :

$$\xi = a(t + \sin t), \qquad \eta = -a(1 - \cos t), \qquad t \in]0,2\pi[$$

ce qui permet aisément de retrouver la développée de Γ_0.

10° *Hypocycloïdes et épicycloïdes.* — Nous reprenons les notations du **8°**, en supposant que la base $\mathscr{S}$ est un cercle (rayon $R > 0$), et que la roulante $\mathscr{S}_1$ est un cercle (rayon $a > 0$). On se limite au cas $m_0 \in \mathscr{S}_1$.

On dit que :

— *Γ est une hypocycloïde lorsque le cercle $u_s(\mathscr{S}_1)$ reste intérieur à $\mathscr{S}$;*

— *Γ est une épicycloïde dans les autres cas* ($u_s(\mathscr{S}_1)$ extérieur à $\mathscr{S}$, ou $\mathscr{S}$ intérieur à $u_s(\mathscr{S}_1)$).

Le lecteur montrera que, moyennant un choix convenable du repère et du paramètre, on obtient dans tous les cas un paramétrage de la forme

$$x + iy = r(\alpha e^{it} - e^{i\alpha t})$$

où r désigne a ou $-a$ suivant que $\mathscr{S}$ et $\mu_s(\mathscr{S}_1)$ sont tangents extérieurement ou intérieurement, et où α désigne $1 + R/r$; il s'agit d'une hypocycloïde si $\alpha < 0$ (i.e. $-R < r < 0$), d'une épicycloïde si $\alpha > 0$ (i.e. $r > 0$ ou $r < -R$).

A titre d'exercice, il construira supp Γ dans les cas suivants :

$\alpha = 2$ (cardioïde : passer en polaires); $\alpha = 3$ (néphroïde)

$\alpha = -2$ (hypocycloïde à trois rebroussements); $\alpha = -3$ (astroïde).

Développée. — On raisonne comme au 9°. La normale en m à Γ se déduit ici de la tangente en m' à Γ' par une homothétie ; la développée de Γ se déduit de Γ par une similitude.

2.2.2. Cas d'un arc de $\mathscr{E}_3$

Dans ce paragraphe, nous étudions d'abord un C^k-arc géométrique Γ orienté et régulier ($k \geqslant 2$) de ξ_3.

1° ***Courbure.*** — DÉFINITION. — **On appelle** *courbure* **de** Γ **au point** M **d'abscisse curviligne** s **le réel** $c(s) = \|g''(s)\|$; **si** $c(s) \neq 0$, **son inverse est dit** *rayon de courbure* **de** Γ **au point** M, **et noté** $R(s)$.

L'application c ainsi introduite est de classe C^{k-2} sur J; l'application $R = 1/c$ est de classe C^{k-2} sur tout intervalle où elle est définie; *ici c et R sont respectivement à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+^*$.*

Intuitivement, $c(s)$ mesure la « vitesse de variation » du vecteur $\tau(s)$ autrement dit, puisqu'il est unitaire, sa « vitesse de rotation »; cela correspond à la notion intuitive de courbure d'une trajectoire.

En dérivant l'application $\|g'\|^2$, qui est la constante $s \longmapsto 1$, on constate que l'application $(g'|g'')$ est nulle. On en déduit immédiatement :

PROPOSITION I. — **La fonction courbure s'écrit** $c = \|g' \wedge g''\|$.

PROPOSITION II. — **Un point de Γ est bi-régulier si, et seulement si la courbure de Γ en ce point est non nulle.**

et :

COROLLAIRE. — **Un C^k-arc régulier a une courbure nulle en tout point si, et seulement si son support est inclus dans une droite.**

2° ***Normale principale, binormale, repère de Serret-Frenet.*** — THÉORÈME ET CONVENTION. — **Si le point** M **de** Γ **d'abscisse curviligne** s **est bi-régulier (ce qui implique l'existence d'un plan osculateur en** M**) alors les vecteurs :**

$$\nu(s) = \frac{1}{\|g''(s)\|}\, g''(s) \qquad \text{et} \qquad \beta(s) = \tau(s) \wedge \nu(s)$$

sont unitaires et dirigent respectivement la normale principale et la binormale en M **à** Γ, **que l'on convient d'orienter grâce à eux.**

Le vecteur $g''(s)$ est non nul du fait de la bi-régularité de M, et orthogonal à $\tau(s)$, à cause de $(g'(s)|g''(s)) = 0$; comme tout vecteur dérivée seconde, il appartient à la direction du plan osculateur. D'où la partie de l'assertion relative à $\nu(s)$; l'autre s'en déduit aisément. □

• DÉFINITION I. — **Si le point** M **de** Γ **d'abscisse curviligne** s **est bi-régulier on dit que le repère orthonormal direct** $\mathscr{F}(s) = (m(s)\,;\ \tau(s),\ \nu(s),\ \beta(s))$ **est le** *repère de Serret-Frenet* **de** Γ **au point** M.

DÉFINITION II. — **Dans les mêmes conditions, le point de la normale principale :**

$$p(s) = m(s) + R(s)\mathbf{v}(s), \qquad R(s) = 1/c(s),$$

est dit *centre de courbure* **de Γ au point** M.

On notera que $p(s) = m(s) + \|g''(s)\|^{-2}g''(s)$ et que les vecteurs colinéaires $\overrightarrow{m(s)p(s)}$ et $g''(s)$ sont de même sens : *le centre de courbure est dans le demi-plan osculateur que nous avons appelé concavité* (**1**.2.*3*, 2°).

REMARQUES. — *a*) Sur tout sous-intervalle de J sur lequel g'' ne prend pas la valeur 0 (i.e. sur lequel Γ est bi-régulier) on dispose des applications $\mathbf{v}$ et $\boldsymbol{\beta}$ de classe C^{k-2}.

b) Si on remplace Γ par l'arc orienté opposé, les applications g' et g'' sont changées en $-g'$ et g'', et donc $\boldsymbol{\tau}$, c, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\beta}$ sont changées en $-\boldsymbol{\tau}$, c, $\mathbf{v}$, $-\boldsymbol{\beta}$.

c) Si on change l'orientation de $\mathscr{E}$, alors $\boldsymbol{\tau}$, c, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\beta}$ sont changées en $\boldsymbol{\tau}$, c, $\mathbf{v}$, $-\boldsymbol{\beta}$.

d) Dans les deux cas *b*) et *c*), l'application $p = m + R\mathbf{v}$ est conservée (ce qui s'explique par la remarque précédente sur la concavité).

3° ***Torsion.*** — Nous renforçons l'hypothèse en supposant que $k \geqslant 3$ et que Γ est bi-régulier, i.e. que g'' ne prend pas la valeur 0; $\mathbf{v}$ et $\boldsymbol{\beta}$ sont ici de classe C^{k-2} sur J.

Pour tout $s \in J$: $\boldsymbol{\beta}(s) = \boldsymbol{\tau}(s) \wedge \mathbf{v}(s)$ et donc $\boldsymbol{\beta}'(s) = \boldsymbol{\tau}(s) \wedge \mathbf{v}'(s)$ ($\boldsymbol{\tau}'(s) = g''(s)$ est colinéaire à $\mathbf{v}(s)$ par définition). Ainsi $\boldsymbol{\beta}'(s)$ est orthogonal à $\boldsymbol{\tau}(s)$; mais il est également orthogonal à $\boldsymbol{\beta}(s)$ ($\|\boldsymbol{\beta}(s)\| = 1$), et donc il est colinéaire à $\mathbf{v}(s)$.

Par analogie avec $\boldsymbol{\tau}'(s) = c(s)\mathbf{v}(s)$ nous poserons :

DÉFINITION. — **On appelle** *torsion* **de Γ au point M d'abscisse curviligne s le réel $\gamma(s)$ défini par $\boldsymbol{\beta}'(s) = \gamma(s)\mathbf{v}(s)$, i.e. le réel $\gamma(s) = (\boldsymbol{\beta}'(s)|\mathbf{v}(s))$; si $\gamma(s) \neq 0$, le réel $T(s) = 1/\gamma(s)$ est dit** *rayon de torsion* **de Γ en** M.

γ sur J, T sur tout intervalle où elle est définie sont des applications de classe C^{k-3}.

REMARQUES. — *a*) Comme au **2**°, *in fine*, le lecteur vérifiera que l'application γ est :

- inchangée lorsque l'on remplace Γ par l'arc orienté « opposé » ;
- changée en son opposée lorsqu'on change l'orientation de l'espace.

b) Comme ci-dessus, on peut dire intuitivement que $|\gamma(s)|$ mesure la « vitesse de rotation » de $\boldsymbol{\beta}(s)$, et donc du plan osculateur. Le signe de $\gamma(s)$ sera interprété au **2**.2.*3*, 1°.

c) Si M est un point bi-régulier de Γ, c prend une valeur non nulle en s, abscisse curviligne de M, et donc par continuité, sur un sous-intervalle de J contenant s ; quitte à remplacer Γ par un sous-arc nous pourrons donc définir la torsion en M (le résultat ne dépend pas du choix du sous-arc).

4° ***Formules de Serret-Frenet.*** — Nous supposons encore que $k \geqslant 3$ et que Γ est bi-régulier. Nous avons par définition :

$$\boldsymbol{\tau}'(s) = c(s)\mathbf{v}(s); \qquad \boldsymbol{\beta}'(s) = \gamma(s)\mathbf{v}(s)$$

D'où :

$$\mathbf{v}'(s) = \boldsymbol{\beta}'(s) \wedge \boldsymbol{\tau}(s) + \boldsymbol{\beta}(s) \wedge \boldsymbol{\tau}'(s) = -c(s)\boldsymbol{\tau}(s) - \gamma(s)\boldsymbol{\beta}(s),$$

et les égalités entre applications de J dans E (formules de Serret-Frenet) :

$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = c\mathbf{v}$	$\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}s} = -c\boldsymbol{\tau} - \gamma\boldsymbol{\beta}$	$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{d}s} = \gamma\mathbf{v}$

Il est d'usage de remplacer dans ces formules c par $\dfrac{1}{R}$ et γ par $\dfrac{1}{T}$; il n'y a ici aucune difficulté pour c, mais il faut convenir qu'en tout point où $\gamma(s) = 0$, la notation $\left(\dfrac{1}{T}\right)(s)$ désigne le réel 0.

Remarque. — La première formule de Frenet vaut si $k = 2$.

• Avec les mêmes hypothèses ($k \geqslant 3$ et Γ bi-régulier), la dérivation de $g'' = c\mathbf{v}$ donne donc :

$$g''' = -c^2\boldsymbol{\tau} + c'\mathbf{v} - c\gamma\boldsymbol{\beta}$$

Compte tenu de $g' \wedge g'' = c\boldsymbol{\beta}$, il vient : $[g', g'', g'''] = -c^2\gamma$.

M est donc tri-régulier si, et seulement si la torsion en M est non nulle; en d'autres termes, *les points à torsion nulle sont ceux en lesquels le plan osculateur est surosculateur.*

• Proposition. — **Pour que le support d'un C^k-arc bi-régulier ($k \geqslant 3$) de $\mathscr{E}_3$ soit contenu dans un plan affine, il faut et il suffit que la fonction-torsion soit nulle.**

— Si $\operatorname{supp}\Gamma \subset \mathscr{P}$, où $(\mathscr{P}, P)$ est un plan, alors aucun point de l'arc n'est tri-régulier et, d'après la propriété précédente, la fonction torsion est nulle. □

— Si la fonction torsion est nulle, aucun point de l'arc n'est tri-régulier. On applique le corollaire I du **1**.2.*2*, 6°. □

Contre-exemple. — Soit Γ l'arc défini par $(\mathbb{R}, f)$ avec :

$$f(t) = O + t^4\mathbf{i} + t\mathbf{k} \quad \text{si} \quad t < 0;$$
$$f(t) = O + t^4\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad \text{si} \quad t \geqslant 0$$

Il est de classe C^3, régulier, à torsion nulle en tout point de paramètre non nul. Cependant son support n'est pas plan (le point $t = 0$ n'est pas bi-régulier).

5° Comme dans le cas de $\mathscr{E}_2$ on définit les éléments métriques de Γ au point M, et on démontre :

Théorème. — **Pour tout représentant $(I,\ t \mapsto f(t))$ de Γ, les éléments métriques de Γ au point M s'expriment en utilisant exclusivement $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$ et $f'''(t)$.**

On reprend **2.2.**1, 2°, avec les mêmes notations. Les deux premières dérivations de $f = g \circ \varphi$ conduisent ici à :

$m_M = f(t)$	$\tau_M = \dfrac{f'(t)}{\lVert f'(t)\rVert}$	$c_M = \dfrac{\lVert f'(t) \wedge f''(t)\rVert}{\lVert f'(t)\rVert^3}$

• Si M est birégulier, d'une part on a $R_M = 1/c_M$, d'autre part $f'(t) \wedge f''(t)$, comme $g'(t) \wedge g''(t)$, dirige la binormale orientée et :

$\boldsymbol{\beta}_M = \dfrac{f'(t) \wedge f''(t)}{\lVert f'(t) \wedge f''(t)\rVert}$	$\mathbf{v}_M = \boldsymbol{\beta}_M \wedge \tau_M$

Le centre de courbure en M est : $p_M = m_M + R_M \mathbf{v}_M$.

• Pour $k \geqslant 3$, une dérivation à l'ordre 3 de $f = g \circ \varphi$ fournit :

$$f'''(t) = \mathbf{w}(t) + g'''(\varphi(t))(\varphi'(t))^3$$

avec : $$\mathbf{w} \in \text{Vect}\,(g'(\varphi(t)),\, g''(\varphi(t))$$

et, si en outre M est birégulier, $c^2\gamma = -\,[g', g'', g''']$ donne la torsion :

$$\boxed{\gamma_M = -\,\frac{[f'(t), f''(t), f'''(t)]}{\lVert f'(t) \wedge f''(t)\rVert^2}}$$

Si $\gamma_M \neq 0$, le rayon de torsion en M est $T_M = 1/\gamma_M$.

6° ***Invariants métriques d'un arc paramétré en l'un de ses points.*** — Tout ce qui a été dit au **2.2.**1, 3° dans le cas d'un arc paramétré (I, f) du plan $\mathscr{P}$ reste valable, à ceci près que, dans la notation définitive, on introduit ici les *fonctions de la variable t* définies sur I ou sur des sous-intervalles convenablement choisis de I :

$$m = f; \qquad \tau = \frac{f'}{\lVert f'\rVert}; \qquad c = \frac{\lVert f' \wedge f''\rVert}{\lVert f'\rVert^3}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{f' \wedge f''}{\lVert f' \wedge f''\rVert}; \qquad \gamma = -\,\frac{[f', f'', f''']}{[f' \wedge f'']^2}$$

et que l'on en déduit les fonctions $R = 1/c$, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\beta} \wedge \tau$, $p = m + R\mathbf{v}$ et $T = 1/\gamma$.

Les valeurs prises par ces fonctions au point $t \in I$ fournissent les invariants de (I, f) au point de paramètre t.

7° Nous allons étudier quelques arcs paramétrés. Rappelons que nous ne considérons que des repères orthonormaux directs.

EXEMPLE I : HÉLICE CIRCULAIRE. — *Il s'agit du C^∞-arc paramétré défini en coordonnées semi-polaires par* $(\mathbb{R}, f)$ *avec :*

$$f(\theta) = O + a\mathbf{u}_\theta + b\theta\mathbf{k}, \qquad \mathbf{u}_\theta = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}, \qquad (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$$

Ici :

$$m' = a\mathbf{v}_\theta + b\mathbf{k}, \qquad m'' = -a\mathbf{u}_\theta, \qquad m''' = -a\mathbf{v}_\theta$$

$$\|m'\| = \sqrt{a^2 + b^2}\,; \qquad m' \wedge m'' = a(-b\mathbf{v}_\theta + a\mathbf{k})\,; \qquad [m', m'', m'''] = a^2 b.$$

L'arc étant orienté dans le sens des θ croissants, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{a^2 + b^2}\,; \qquad \boldsymbol{\tau} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{v}_\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{k}\,;$$

$$\boldsymbol{\nu} = -\mathbf{u}_\theta\,; \qquad \boldsymbol{\beta} = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{v}_\theta + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{k}$$

$$R = \frac{a^2 + b^2}{a}\,; \qquad T = -\frac{a^2 + b^2}{b}\,; \qquad p = O - \frac{b^2}{a}\mathbf{u}_\theta + b\theta\mathbf{k}.$$

On note que $\boldsymbol{\tau}$ et $\boldsymbol{\beta}$ font un angle constant avec l'axe Oz, que la normale principale coupe orthogonalement Oz, que la courbure et la torsion sont des constantes (cf. propriétés générales des hélices au 2.3.2).

Si $b > 0$ (cas de la figure 38), la torsion est négative; l'hélice est dite *sinistrorsum :* on « monte » en tournant dans le sens direct autour de Oz. Dans le cas contraire la torsion est positive, l'hélice est dite *dextrorsum.* On remarque enfin que p « décrit une hélice circulaire ».

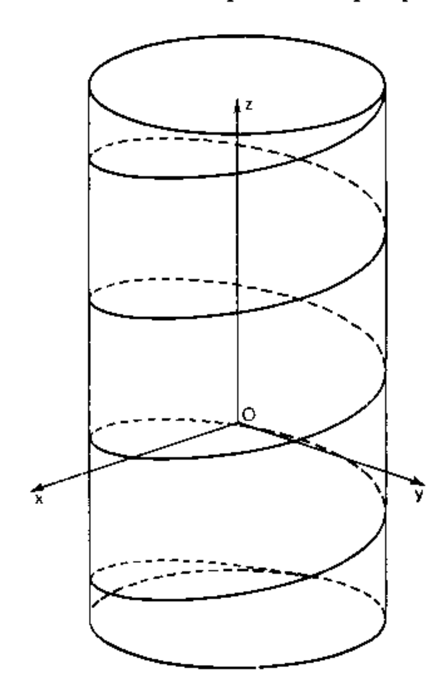


FIG. 38.

EXEMPLE II. — *Soit le C^∞-arc paramétré* $(\mathbb{R}, f)$ *avec :*

$$f(t) = O + e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + t\sqrt{2}\mathbf{k}.$$

Avec les notations usuelles, $\mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = -e^{-t}\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}z = \sqrt{2}\,\mathrm{d}t$.

D'où : $\|f'(t)\|^2 = e^{2t} + e^{-2t} + 2 = 4 \text{ ch }^2 t$. L'arc est donc régulier. Nous l'orientons en choisissant $\frac{ds}{dt} = 2 \text{ ch } t$ (c'est-à-dire dans le sens des t croissants).

Par ailleurs nous trouvons :

$$m' \left| \begin{matrix} e^t \\ -e^{-t} \\ \sqrt{2} \end{matrix} \right. \qquad m'' \left| \begin{matrix} e^t \\ e^{-t} \\ 0 \end{matrix} \right. \qquad m' \wedge m'' \left| \begin{matrix} -\sqrt{2}e^{-t} \\ \sqrt{2}e^t \\ 2 \end{matrix} \right. \qquad m''' \left| \begin{matrix} e^t \\ -e^{-t} \\ 0 \end{matrix} \right.$$

d'où : $\|m'\| = 2 \text{ ch } t$, $\|m' \wedge m''\| = 2\sqrt{2} \text{ ch } t$ et $[m', m'', m'''] = (m' \wedge m'' \mid m''') = -2\sqrt{2}$.
Il en résulte :

$$\tau \left| \begin{matrix} e^t/2 \text{ ch } t \\ -e^{-t}/2 \text{ ch } t \\ \sqrt{2}/2 \text{ ch } t \end{matrix} \right. \qquad \mathbf{v} \left| \begin{matrix} \sqrt{2}/2 \text{ ch } t \\ \sqrt{2}/2 \text{ ch } t \\ -\text{th } t \end{matrix} \right. \qquad \boldsymbol{\beta} \left| \begin{matrix} -e^{-t}/2 \text{ ch } t \\ e^t/2 \text{ ch } t \\ \sqrt{2}/2 \text{ ch } t \end{matrix} \right. \qquad \begin{matrix} R = 2\sqrt{2} \text{ ch }^2 t \\ T = 2\sqrt{2} \text{ ch }^2 t \end{matrix}$$

Notons qu'en tout point de l'arc $R/T = 1$, que τ et $\boldsymbol{\beta}$ font avec $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ les écarts angulaires fixes $\pi/4$ et $3\pi/4$, que $\mathbf{v}$ appartient au plan vectoriel fixe $(\mathbf{i} - \mathbf{j})^{\perp}$.

EXEMPLE III. — *Soit* $(\mathbb{R}, f)$ *le* C^∞*-arc paramétré défini en coordonnées cylindriques par :*

$$f(\theta) = O + \rho \mathbf{u}_\theta + z\mathbf{k}$$

avec :
$$\rho = \frac{a}{\text{ch } m\theta}, \qquad z = a \text{ th } m\theta, \qquad (a, m) \in (\mathbb{R}_+^*)^2.$$

(On ne confondra naturellement pas la fonction $\theta \mapsto m(\theta)$ et la constante $m \in \mathbb{R}_+^*$.)

Par dérivation :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{am \text{ sh } m\theta}{\text{ch}^2 m\theta}, \qquad \frac{dz}{d\theta} = \frac{am}{\text{ch}^2 m\theta} \qquad \text{et} \qquad \|f'(\theta)\| = \frac{a\sqrt{m^2+1}}{\text{ch } m\theta}.$$

L'arc est régulier. En l'orientant dans le sens des θ croissant :

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{a\sqrt{m^2+1}}{\text{ch } m\theta}.$$

On obtient (dans le repère mobile) en écrivant $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ pour $\mathbf{u}_\theta$ et $\mathbf{v}_\theta$:

$$\frac{dm}{d\theta} = f'(\theta) = -\frac{am \text{ sh } m\theta}{\text{ch}^2 m\theta}\mathbf{u} + \frac{a}{\text{ch } m\theta}\mathbf{v} + \frac{am}{\text{ch}^2 m\theta}\mathbf{k}$$

et donc

$$\tau = \frac{dm}{ds} = \frac{dm}{d\theta} \Big/ \frac{ds}{d\theta} = -\frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \text{th } m\theta \ \mathbf{u} + \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\mathbf{v} + \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \frac{1}{\text{ch } m\theta}\mathbf{k}.$$

Ici, nous calculerons $\frac{d\tau}{d\theta}$, et donc $\frac{d\tau}{ds}$, plus simple que $f''(\theta)$ (ne pas oublier que l'on dérive dans un repère « mobile »). On obtient :

$$\frac{d\tau}{d\theta} = -\frac{m^2 + \text{ch}^2 m\theta}{\text{ch}^2 m\theta\sqrt{m^2+1}}\mathbf{u} - \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \text{th } m\theta \ \mathbf{v} - \frac{m^2}{\sqrt{m^2+1}} \frac{\text{sh } m\theta}{\text{ch}^2 m\theta}\mathbf{k}$$

et donc :

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = -\frac{m^2 + \text{ch}^2\, m\theta}{a(m^2+1)\,\text{ch}\, m\theta}\,\mathbf{u} - \frac{m\,\text{sh}\, m\theta}{a(m^2+1)}\,\mathbf{v} - \frac{m^2\,\text{sh}\, m\theta}{a(m^2+1)\,\text{ch}\, m\theta}\,\mathbf{k}.$$

Il en résulte $\left\|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right\| = \frac{\sqrt{m^2 + \text{ch}^2\, m\theta}}{a\sqrt{m^2+1}}$; l'arc est bi-régulier et :

$$R = \frac{a\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{m^2 + \text{ch}^2\, m\theta}}.$$

En utilisant successivement $\mathbf{v} = R\,\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ et $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{v}$, on en déduit :

$$\mathbf{v} = -\frac{\sqrt{m^2 + \text{ch}^2\, m\theta}}{\sqrt{m^2+1}\;\text{ch}\, m\theta}\,\mathbf{u} - \frac{m\,\text{sh}\, m\theta}{\sqrt{m^2+1}\,\sqrt{m^2 + ch^2\, m\theta}}\,\mathbf{v} - \frac{m^2\,\text{sh}\, m\theta}{\sqrt{m^2+1}\,\sqrt{m^2 + \text{ch}^2\, m\theta}\;\text{ch}\, m\theta}\,\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\beta} = -\frac{m}{\sqrt{m^2 + \text{ch}^2\, m\theta}}\,\mathbf{v} + \frac{\text{ch}\, m\theta}{\sqrt{m^2 + \text{ch}^2\, m\theta}}\,\mathbf{k}$$

Enfin pour calculer $\frac{1}{T}$, on utilise $\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = \frac{1}{T}\,\mathbf{v}$. Pour cela *il suffit de connaître une des composantes de* $\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$ (pourvu que la composante correspondante de $\mathbf{v}$ soit non nulle [1]). Par exemple ici, le plus simple est $\left(\frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\theta}\middle|\,\mathbf{u}\right) = \frac{m}{\sqrt{m^2 + \text{ch}^2\, m\theta}}$ et donc

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\middle|\,\mathbf{u}\right) = \frac{m\,\text{ch}\, m\theta}{a\sqrt{m^2+1}\,\sqrt{m^2 + \text{ch}^2\, m\theta}}$$

Par comparaison avec $(\mathbf{v}|\mathbf{u})$, il vient :

$$\frac{1}{T} = -\frac{m\,\text{ch}^2\, m\theta}{a(m^2 + \text{ch}^2\, m\theta)}$$

On note que l'arc est tri-régulier.

De $\rho^2 + z^2 = a^2$ on déduit que supp $(\mathbb{R}^2, f)$ est tracé sur la sphère $\mathscr{S} = (O, a)$.

De $(\boldsymbol{\tau}/\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$, on déduit qu'il fait un angle constant avec les parallèles de $\mathscr{S}$. Il s'agit d'une *loxodromie* de $\mathscr{S}$ (cf. **4**.1.*3*, 4°). La figure 39 représente ce support.

---

(1) Si la composante de $\mathbf{v}$ choisie pour faire le calcul s'annule pour des valeurs isolées du paramètre, la continuité de $\frac{1}{T}$ permet cependant de conclure.

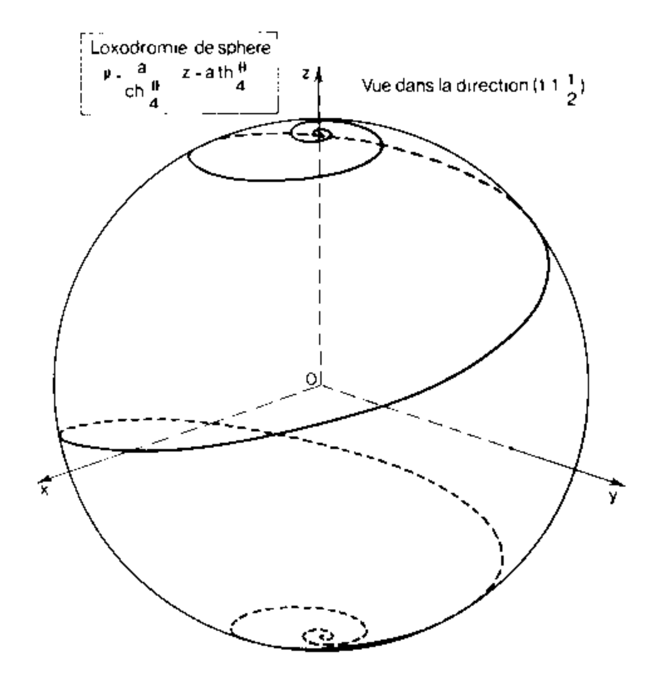


FIG. 39.

2.2.3. Applications

1° ***Étude locale d'un arc.*** — $\mathscr{E}$ est ici $\mathscr{E}_3$ affine euclidien orienté. On considère un C^k-arc géométrique orienté Γ ($k \geqslant 3$), de représentant normal (J, g) et un point bi-régulier M_0 de Γ, de représentant (J, g, s_0) ; on note $g(s_0) = m_0$. On va encore utiliser la formule de Taylor-Young. En posant $m = g(s_0 + h)$, on a :

$$\overrightarrow{m_0 m} = h . g'(s_0) + h^2/2 . g''(s_0) + h^3/6 . g'''(s_0) + o(h^3).$$

L'étude locale utilise le repère orthonormal direct $(m_0 ; \boldsymbol{\tau}_0, \boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\beta}_0)$ avec :

$$\boldsymbol{\tau}_0 = \boldsymbol{\tau}(s_0) ; \qquad \boldsymbol{\nu}_0 = \boldsymbol{\nu}(s_0) ; \qquad \boldsymbol{\beta}_0 = \boldsymbol{\beta}(s_0).$$

On note : $c(s_0) = c_0 = 1/R_0$ (non nul) ; $\gamma(s_0) = \gamma_0 = 1/T_0$ (nul si et seulement si M_0 n'est pas tri-régulier) ; $\overrightarrow{m_0 m} = \xi \boldsymbol{\tau}_0 + \eta \boldsymbol{\nu}_0 + \zeta \boldsymbol{\beta}_0$.

On sait que :

$$g'(s_0) = \boldsymbol{\tau}_0 ; \qquad g''(s_0) = c_0 \boldsymbol{\nu}_0 .$$

et que (**2**.2.2, 4°) :

$$g'''(s_0) = - c_0^2 \boldsymbol{\tau}_0 + c'_0 \boldsymbol{\nu}_0 - c_0 \gamma_0 \boldsymbol{\beta}_0, \quad \left(c'_0 = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}s}(s_0) \right).$$

D'où les développements limités :

$$\xi = h - c_0^2 h^3/6 + o(h^3); \qquad \eta = c_0 h^2/2 + c_0' h^3/6 + o(h^3);$$
$$\zeta = - c_0 \gamma_0 h^3/6 + o(h^3).$$

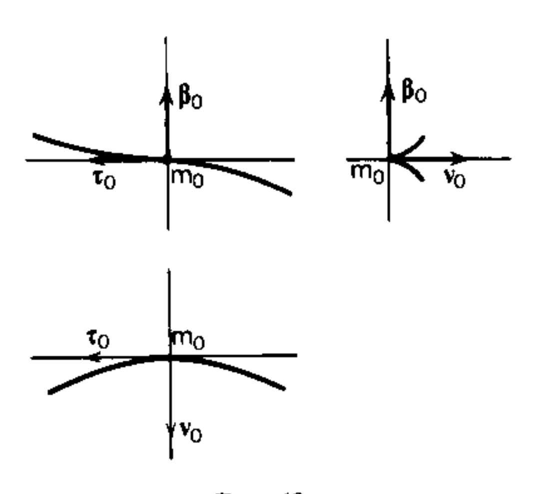


FIG. 40.

On en déduit l'allure des projections de $\mathscr{S} = \operatorname{supp} \Gamma$ sur les plans de coordonnées (fig. 40). On constate en outre :

a) $R_0 = \lim\limits_{h \to 0} \xi^2/(2\eta)$: Γ *a le même centre de courbure* p_0 *en* M_0 *que sa projection sur le plan osculateur;*

b) Pour M_0 tri-régulier, $\zeta/\eta \sim -\gamma_0 h/3$ au voisinage de $h = 0$. Or ζ/η est, dans le repère $(m_0\,;\, \mathbf{v}_0, \boldsymbol{\beta}_0)$, la pente de la trace du plan $\mathscr{P}_h = \operatorname{Aff}(\mathscr{T}_0, m)$ défini par la tangente $\mathscr{T}_0$ en M_0 à Γ, et par le point m ($h \neq 0$), plan qui admet le plan osculateur $\mathscr{Q}_0$ en M_0 pour limite quand h tend vers 0.

Le signe de la torsion indique donc « de quel côté » $\mathscr{P}_h$ tend vers $\mathscr{Q}_0$ lorsque h tend vers 0. Si $\gamma_0 < 0$ (cas de la figure 40), on dit que l'on a la disposition *sinistrorsum :* c'est le cas le plus fréquent pour les « courbes gauches » fournies par la nature (plantes grimpantes, coquillages,...).

2° *Cercle osculateur.* — Γ désigne ici un C^k-arc géométrique orienté ($k \geqslant 3$) d'un plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$. Avec des notations analogues à celles du 1°, on considère un point bi-régulier M_0 de Γ, d'abscisse curviligne s_0 ; les coordonnées de $m = g(s_0 + h)$ dans le repère orthonormal $(m_0\,;\, \boldsymbol{\tau}_0, \mathbf{v}_0)$ admettent les développements limités :

$$\xi = h + o(h^2); \qquad \eta = c_0 h^2/2 + o(h^2) \tag{1}$$

Considérons un cercle C de $\mathscr{P}$, qui contient m_0. Il admet, dans $(m_0\,;\, \boldsymbol{\tau}_0, \mathbf{v}_0)$ une équation de la forme : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$.

Nous nous intéressons à la position locale de $\mathscr{S} = \operatorname{supp} \Gamma$ par rapport à C, i.e. à la position de $m = g(s_0 + h)$ par rapport à C au voisinage de $h = 0$. Il s'agit d'étudier le signe de $\varphi(h) = \xi^2 + \eta^2 - 2a\xi - 2b\eta$.

a) *C et* $\mathscr{S}$ *ne sont pas tangents en* m_0 (i.e. $a \neq 0$). Alors $\varphi(h) \sim -2ah$, et donc $\mathscr{S}$ « traverse » C en M_0.

b) *C et* $\mathscr{S}$ *sont tangents en* m_0 (i.e. $a = 0$). On calcule alors :

$$\varphi(h) = (1 - bc_0)h^2 + o(h^2)$$

α) Si $b \neq R_0$, $\mathscr{S}$ « ne traverse pas » C en m_0;

β) Si $b = R_0$, le cercle C est centré au centre de courbure p_0 en M_0 à Γ; on dit que C est le *cercle osculateur* à Γ en M_0.

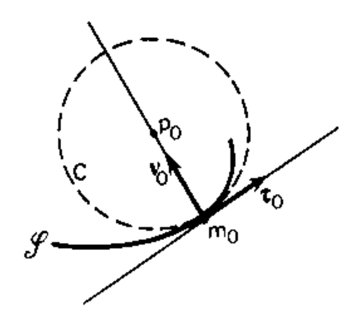


FIG. 41.

Pour obtenir des renseignements plus précis, supposons $k \geqslant 3$ et poussons plus loin les développements limités (1). On trouve (avec $R = 1/c$) :

$$\varphi(h) = \frac{R'(s_0)}{3R_0} h^3 + o(h^3)$$

– en général $R'(s_0) \neq 0$ et $\mathscr{S}$ « traverse » $\mathscr{C}$ en m_0;

– Si $R'(s_0) = 0$, ce qui correspond d'ailleurs aux points où la développée admet un point stationnaire, on ne peut se prononcer sans supposer $k \geqslant 4$; on dit alors que le cercle C est *surosculateur* à Γ en M_0.

3° ***Sphères osculatrices.*** – Revenons aux cas de $\mathscr{E}_3$: hypothèses et notations du 1°. Une sphère Σ contenant m_0 admet dans le repère $(m_0; \boldsymbol{\tau}_0, \mathbf{v}_0, \boldsymbol{\beta}_0)$ l'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz = 0$$

On étudie le signe de : $\varphi(h) = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2a\xi - 2b\eta - 2c\zeta$, au voisinage de $h = 0$. D'après les calculs au 1° (avec $R = 1/c$) :

$$\varphi(h) = -2ah + \left(1 - \frac{b}{R_0}\right)h^2 + \left(\frac{a}{R_0} + \frac{bR'_0}{R_0} + c\gamma_0\right)\frac{h^3}{3R_0} + o(h^3)$$

a) Σ et $\mathscr{S}$ ne sont pas tangents en m_0 (i.e. $a \neq 0$). Alors $\varphi(h) \sim -2ah$ et $\mathscr{S}$ « traverse » Σ en m_0.

b) Σ et $\mathscr{S}$ sont tangents en m_0 (i.e. $a = 0$). On distingue :

α) Si $b \neq R_0$, $\mathscr{S}$ « ne traverse pas » Σ en m_0.

β) Si $b = R_0$, i.e. si Σ est centré sur la droite $p_0 + \mathbb{R}\boldsymbol{\beta}_0$ (qui est dite *axe de courbure* en M_0 à Γ) on dit que la sphère Σ est *osculatrice* en M_0 à Γ (ce cas est encore celui où Σ contient le cercle osculateur en M_0 de la projection de Γ sur le plan osculateur en M_0).

Alors :

$$\varphi(h) = (R'_0 + c\gamma_0)\frac{h^3}{3R_0} + o(h^3)$$

et $\mathscr{S}$ « ne traverse pas » Σ en m_0, sauf peut être si M_0 est tri-régulier et $c = -R'_0 T_0$, auquel cas la sphère est dite *surosculatrice*.

REMARQUE. – Le lecteur constatera que la notion de sphère osculatrice (resp. surosculatrice) est un cas particulier de celle de surface osculatrice (resp. surosculatrice) à une courbe qui sera introduite au 3.3.2, 5°.

4° ***Développable polaire.*** – Soit Γ un C^k-arc tri-régulier de $\mathscr{E}$ ($k \geqslant 4$) orienté, de représentant normal (J, g). Pour tout $s \in J$ nous disposons, au point d'abscisse curviligne s, de l'axe de courbure

$\Delta(s) = p(s) + \mathbb{R}\boldsymbol{\beta}(s)$, et du centre de la sphère surosculatrice $\omega(s) = p(s) - R'(s)T(s)\boldsymbol{\beta}(s)$. Le lecteur vérifiera que $\frac{d\omega}{ds}$ reste colinéaire à $\boldsymbol{\beta}$. Il en déduira que (quitte à remplacer Γ par un sous-arc) la famille de droites $(\Delta(s))_{s\in J}$ admet pour enveloppe l'arc paramétré (J, ω). *En d'autres termes — et en anticipant sur 3.2 — la nappe réglée Σ, représentée par :

$$(J \times \mathbb{R}, (s, \rho) \longmapsto p(s) + \rho\boldsymbol{\beta}(s))$$

et admettant les $\Delta(s)$ pour génératrices rectilignes, est développable et son arête de rebroussement est représentée par (J, ω). On dit que Σ est la *développable polaire* de Γ.*

5° ***Développées d'un arc de*** $\mathscr{E}_3$. — Soit Γ un C^k-arc géométrique bi-régulier orienté de $\mathscr{E}$ ($k \geqslant 3$), de représentant normal (J, g). On pose :

DÉFINITION. — **A toute application $\varphi : J \to \mathbb{R}$, de classe C^1, on associe la famille de normales à Γ :**

$$\mathscr{F}_\varphi = (\mathscr{D}_\varphi(s))_{s\in J}, \qquad \text{où} \qquad \mathscr{D}_\varphi(s) = m(s) + \mathbb{R}\mathbf{u}_\varphi(s),$$

avec :

$$\mathbf{u}_\varphi(s) = \cos\ \varphi(s)\mathbf{v}(s) + \sin\ \varphi(s)\boldsymbol{\beta}(s).$$

Si la famille $\mathscr{F}_\varphi$ admet une enveloppe γ_φ, on dit que l'arc géométrique Γ_φ représenté par γ_φ est une développée de Γ.

Suivant la méthode de 1.6.3, considérons l'arc paramétré :

$$(J, q), \quad \text{avec} \quad q : s \longmapsto m(s) + \lambda(s)\mathbf{u}_\varphi(s)$$

où $\lambda : J \to \mathbb{R}$ est de classe C^1.

Nous constatons que $\frac{dq}{ds} - \frac{d\lambda}{ds}\mathbf{u}_\varphi$ s'écrit :

$$(1 - \lambda c \cos\varphi)\boldsymbol{\tau} + \lambda\left(\gamma - \frac{d\varphi}{ds}\right)(\mathbf{v}\ \sin\ \varphi - \boldsymbol{\beta}\ \cos\ \varphi)$$

Il en résulte que $\frac{dq}{ds}(s)$ reste colinéaire à $\mathbf{u}_\varphi(s)$ si et seulement si :

$$\left(\frac{d\varphi}{ds} = \gamma\right) \wedge (\lambda\ \cos\ \varphi = R)$$

et que, si cette condition est remplie : $\frac{dq}{ds} = \frac{d\lambda}{ds}\mathbf{u}_\varphi$.

Ainsi la famille $\mathscr{F}_\varphi$ ne peut avoir une enveloppe que si φ est une primitive sur J de la torsion γ. Inversement supposons qu'il en soit ainsi, et que (en se limitant éventuellement à un sous-arc de Γ) la fonction $\cos\varphi$ ne prenne que la valeur 0 sur J. Notons alors γ_φ l'arc paramétré :

$$\gamma_\varphi = (J, q), \quad \text{avec} \quad q : s \longmapsto m(s) + \frac{R(s)}{\cos\ \varphi(s)}\mathbf{u}_\varphi(s)$$

Il est, comme φ, de classe C^{k-2}.

Au moins dans la mesure où $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{R}{\cos\varphi}\right)$ ne prend pas la valeur 0 sur J, nous pouvons affirmer que l'arc géométrique Γ_φ représenté par γ_φ est une développée de Γ.

Remarquons que : $q = p + R\ \mathrm{tg}\ \varphi\boldsymbol{\beta}$ ce qui montre que les *développées sont tracées sur la développable polaire* (cf. 4°).

6° Développantes d'un arc de $\mathscr{E}_3$. — Comme dans le cas de $\mathscr{E}_2$, on pose :

DÉFINITION. — **Un C^∞ arc géométrique orienté Γ étant défini par un représentant normal (J, g), lesC^∞-arcs géométriques Δ_{s_0} représentés par les :**

$$(J, f_{s_0}), \quad \text{avec} \quad f_{s_0} : s \longmapsto g(s) + (s_0 - s)\tau(s)$$

sont appelées *développantes* de J.

$$\text{Ici encore : } f'_{s_0}(s) = (s_0 - s)c(s)\mathbf{v}(s).$$

En nous limitant à un sous-arc Δ'_{s_0} « sur lequel s ne prend pas la valeur s_0 », nous avons, comme dans le cas du plan :

$$\sigma'(s) = (s_0 - s)c(s) \qquad \text{et} \qquad \tau_1(s) = \mathbf{v}(s)$$

ce qui montre que la droite Aff $(f_{s_0}(s), m(s))$ est une normale à Δ_{s_0} au point de paramètre s. On en déduit que Δ'_{s_0} admet pour développée le sous-arc correspondant de Γ.

2.3, COMPLÉMENTS

2.3.*1*. Équations intrinsèques d'un arc de $\mathscr{E}_3$.

1° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soient φ et ψ deux applications d'un intervalle réel J dans $\mathbb{R}$. On suppose φ de classe C^1, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et ψ continue. Alors il existe un C^3-arc géométrique orienté birégulier, admettant un représentant normal défini sur J auquel correspondent des fonctions courbure et torsion qui coïncident respectivement avec φ et ψ.**

A partir d'une solution, on obtient une autre solution par un déplacement quelconque. Inversement, étant données deux solutions, il existe un déplacement qui permet de passer de l'une à l'autre. On dit que le couple $(c(s) = \varphi(s), \gamma(s) = \psi(s))$ est une équation intrinsèque de chacune des solutions.

— *Existence d'une solution.* — Fixons un point $s_0 \in J$ et une base orthonormale directe $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0)$ de E_3. Désignons par $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ l'unique application (IV, 5.1.*1*, 2°) de J dans E^3 qui est solution sur J du système différentiel linéaire à coefficients continus :

$$\frac{d\mathbf{U}}{ds} = \varphi(s)\mathbf{V}; \qquad \frac{d\mathbf{V}}{ds} = -\varphi(s)\mathbf{U} - \psi(s)\mathbf{W}; \qquad \frac{d\mathbf{W}}{ds} = \psi(s)\mathbf{V} \qquad \text{(L)}$$

et qui vérifie la « condition initiale » : $\mathbf{u}(s_0) = \mathbf{u}_0$, $\mathbf{v}(s_0) = \mathbf{v}_0$, $\mathbf{w}(s_0) = \mathbf{w}_0$. *A priori* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ sont de classe C^1 ; $\mathbf{u}' = \varphi\mathbf{v}$ est donc de classe C^1, et ainsi $\mathbf{u}$ est de classe C^2.

— *Montrons que pour tout $s \in J$, $(\mathbf{u}(s), \mathbf{v}(s), \mathbf{w}(s))$ est une base orthonormale directe de E.*

Soit $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ une base orthonormale directe fixe. Notons $P(s)$ la matrice du système $(\mathbf{u}(s), \mathbf{v}(s), \mathbf{w}(s))$ dans cette base ; $P'(s)$ est ainsi la matrice de $(\mathbf{u}'(s), \mathbf{v}'(s), \mathbf{w}'(s))$ dans la même base, et le lecteur vérifiera aisément que $P'(s) = P(s)A(s)$, où $A(s)$ est la matrice antisymétrique :

$$A(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi(s) & 0 \\ \varphi(s) & 0 & \psi(s) \\ 0 & -\psi(s) & 0 \end{bmatrix}$$

On a : $({}^tP)'(s) = -A(s){}^tP(s)$ et donc :

$$\forall s \in J \qquad P(s)({}^tP)'(s) + P'(s){}^tP(s) = O$$

ce qui montre que l'application $P{}^tP$ est constante sur J ; comme elle prend la valeur I_3 pour s_0, on

en déduit que la matrice $P(s)$ est orthogonale pour tout $s \in J$. Enfin, par raison de continuité, det P, qui prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$ est la constante det $P(s_0) = 1$. □

— *Montrons que l'arc géométrique Γ orienté représenté par (J, g) avec*

$$\forall s \in J \qquad g(s) = m_0 + \int_{s_0}^{s} \mathbf{u}(\xi)\, d\xi$$

où $m_0 \in \mathscr{E}$ est arbitrairement choisi, est une solution.

Notons que, $\mathbf{u}$ étant de classe C^2, cet arc est de classe C^3, et que, puisque :

$$\forall s \in J \quad \|g'(s)\| = \|\mathbf{u}(s)\| = 1$$

il est régulier et admet (J, g) pour représentant normal. On a $\boldsymbol{\tau}(s) = g'(s) = \mathbf{u}(s)$. D'autre part : $g''(s) = \mathbf{u}'(s) = \varphi(s)\mathbf{v}(s)$, avec $\varphi(s) > 0$ et $\|\mathbf{v}(s)\| = 1$. L'arc est bi-régulier et on a : $\boldsymbol{\nu}(s) = \mathbf{v}(s)$ et $c(s) = \varphi(s)$; $(\mathbf{u}(s), \mathbf{v}(s), \mathbf{w}(s))$ étant une base orthonormale directe de E, il vient : $\boldsymbol{\beta}(s) = \mathbf{w}(s)$. Enfin : $\boldsymbol{\beta}'(s) = \mathbf{w}'(s) = \psi(s)\mathbf{v}(s)$ montre que la torsion vérifie $\gamma(s) = \psi(s)$. □

Comparaison de deux solutions. — *a*) Soit Γ_1, de représentant normal (J, g_1), un second arc solution. Notons $P_1(s)$ la matrice dans la base fixe $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ du trièdre de Serret-Frenet $(\boldsymbol{\tau}_1(s), \boldsymbol{\nu}_1(s), \boldsymbol{\beta}_1(s))$. D'après les formules de Frenet, on a, en reprenant les fonctions matricielles A et P introduites ci-dessus : $P'_1 = P_1 A$.

Posons $Q = P_1\,{}^tP$. Il vient $Q' = P'_1\,{}^tP + P_1({}^tP)'$ et donc, compte tenu $P'_1 = P_1 A$ et de $({}^tP)' = -A\,{}^tP$: $Q' = O$.

La matrice $Q(s)$, qui est orthogonale droite comme produit des deux matrices orthogonales droites $P_1(s)$ et ${}^tP(s)$, est ainsi égale à une matrice fixe, et l'isométrie positive de E dont $Q(s)$ est la matrice dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est fixe. Notons-la ϖ. Pour tout $s \in J$, ϖ transforme $(\boldsymbol{\tau}(s), \boldsymbol{\nu}(s), \boldsymbol{\beta}(s))$ en $(\boldsymbol{\tau}_1(s), \boldsymbol{\nu}_1(s), \boldsymbol{\beta}_1(s))$, et, en particulier : $g'_1(s) = \varpi(g'(s))$.

Soit δ le déplacement de partie linéaire ϖ qui donne de $m_0 = g(s_0)$ l'image $m'_0 = g_1(s_0)$. Par dérivation, on constate que l'application $\delta \circ g - g_1$ de J dans E est constante ; comme elle prend la valeur 0_E au point s_0 de J, elle est nulle. En conclusion : $g_1 = \delta \circ g$, et on passe de Γ à Γ_1 par le déplacement δ.

b) Le lecteur montre aisément que, pour tout déplacement δ_1 de $\mathscr{E}$, $(J, \delta_1 \circ g)$ représente une solution. □

REMARQUES. — *a*) On vérifie que si φ et ψ sont de classe C^k, alors les arcs solutions sont de classe C^{k+2}.

b) L'étude vaut dans le plan en prenant $\psi = 0$. On remarque cependant qu'il suffit de supposer φ *continue*, les arcs solutions étant alors seulement de classe C^2.

2° EXEMPLES. — *a*) *Arcs d'équation intrinsèque :* $c(s) = \gamma(s) = \sqrt{2}/(s^2 + 4)$, $(J = \mathbb{R})$.

Les solutions sont de classe C^∞. Le trièdre de Frenet $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta})$ est une solution de :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}s} = \frac{\sqrt{2}}{s^2 + 4}\mathbf{V}\,; \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}s} = -\frac{\sqrt{2}}{s^2 + 4}(\mathbf{U} + \mathbf{W})\,; \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{W}}{\mathrm{d}s} = \frac{\sqrt{2}}{s^2 + 4}\mathbf{V} \qquad (L)$$

Un changement de variable $s = \theta(t)$, tel que $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{s^2 + 4}{\sqrt{2}}$, par exemple :

$$s = 2\,\mathrm{tg}\, t\sqrt{2}, \qquad t \in \,]-\pi/2\sqrt{2},\ \pi/2\sqrt{2}[, \quad (\text{i.e. } t = 1/\sqrt{2}.\mathrm{Arctg}\ s/2)$$

ramène la résolution de (L) à celle du système différentiel à coefficients constants :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{V}\,; \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t} = -(\mathbf{U} + \mathbf{W})\,; \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{W}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{V} \qquad (L')$$

En projetant orthogonalement sur $\mathbb{R}\mathbf{i}$, puis sur $\mathbb{R}\mathbf{j}$, enfin sur $\mathbb{R}\mathbf{k}$, on a à résoudre successivement trois systèmes de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \eta\,; \qquad \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = -\xi - \zeta\,; \qquad \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = \eta \qquad (\Lambda)$$

dans lesquels les fonctions inconnues sont numériques. Par la méthode habituelle le lecteur trouvera la solution générale de Λ, et il en déduira que celle de (L) s'écrit :

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{\tau}(s) = \mathbf{A} + \cos(t\sqrt{2})\,\mathbf{B} + \sin(t\sqrt{2})\mathbf{C} & s \in \mathbb{R} \\ \mathbf{v}(s) = -\sqrt{2}\sin(t\sqrt{2})\,\mathbf{B} + \sqrt{2}\cos(t\sqrt{2})\mathbf{C} & t \in]-\pi/2\sqrt{2},\ \pi/2\sqrt{2}[\\ \boldsymbol{\beta}(s) = -\mathbf{A} + \cos(t\sqrt{2})\,\mathbf{B} + \sin(t\sqrt{2})\mathbf{C} & s/2 = \operatorname{tg}(t\sqrt{2}) \end{array}$$

Il faut choisir les constantes d'intégration **A, B, C** de façon que, pour une valeur de s le trièdre obtenu soit orthonormal direct (il le sera alors pour toute valeur de s). On constate que l'on peut adopter :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{i} - \mathbf{j})/2, \qquad \mathbf{B} = 1/\sqrt{2}.\mathbf{k}, \qquad \mathbf{C} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/2$$

D'où :

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{s}{\sqrt{4+s^2}}\right)\mathbf{i} + \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{s}{\sqrt{4+s^2}}\right)\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4+s^2}}\mathbf{k}$$

Une solution est l'arc Γ représenté par (J, g) avec

$$g(s) = O + \frac{1}{2}(s + \sqrt{4+s^2})\mathbf{i} + \frac{1}{2}(-s + \sqrt{4+s^2})\mathbf{j} + \sqrt{2}\operatorname{Arg\,sh} s/2.\mathbf{k}$$

où $O \in \mathscr{E}$ est arbitrairement choisi.

Un autre représentant (non normal) de Γ s'obtient en posant Argsh $s/2 = u$. C'est $(\mathbb{R}, f)$, avec :

$$f(u) = O + e^u\mathbf{i} + e^{-u}\mathbf{j} + u\sqrt{2}\mathbf{k}.$$

On reconnaît l'arc étudié au **2**.2.2, 5° (exemple II).

b) Arcs plans d'équation intrinsèque $R(s) = \sqrt{a^2 - s^2}$ $(J =]-a, +a[)$. Il s'agit d'arcs de classe C^∞. On a intérêt à introduire l'angle polaire α du vecteur **τ** dans un repère donné. On sait que l'on peut choisir α de sorte que $s \longmapsto \alpha$ soit un C^∞-difféomorphisme. On peut donc prendre α comme paramètre.

Il vient alors : $\dfrac{ds}{d\alpha} = \sqrt{a^2 - s^2}$ d'où $s = a\sin(\alpha - \alpha_0)$, $\left(\alpha - \alpha_0 \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$. Quitte à modifier le repère par rotation, on peut toujours supposer $\alpha_0 = 0$. Il vient alors $\dfrac{ds}{d\alpha} = a\cos\alpha$ et donc $\dfrac{dx}{d\alpha} = \dfrac{dx}{ds}.\dfrac{ds}{d\alpha} = a\cos^2\alpha$ et de même $\dfrac{dy}{d\alpha} = a\sin\alpha\cos\alpha$.

On en déduit :

$$x = x_0 + \frac{a}{2}\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right), \qquad y = y_0 - \frac{a}{4}\cos 2\alpha$$

Le lecteur vérifiera qu'il s'agit d'une arche de cycloïde.

2.3.2. Hélices

Le lecteur pourra raisonner sur des arcs paramétrés.

1° On considère un espace affine euclidien orienté $\mathscr{E}$, de dimension 3, et un plan $\mathscr{P}$ de $\mathscr{E}$, que l'on oriente par le choix d'un vecteur unitaire normal **k**.

Soit Γ un C^k-arc géométrique orienté régulier de $\mathscr{E}$ à support dans $\mathscr{P}$, $k \geqslant 1$, donné par un représentant normal (J, g) ; on adopte pour cet arc les notations classiques $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\beta}$, c, γ, ..., avec ici $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{k}$ et $\gamma = 0$. A Γ on associe le C^k-arc orienté Γ_1 défini par le représentant, en général non normal, (J, g_1) avec :

$$g_1(s) = g(s) + (as + b)\mathbf{k}, \qquad (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

DÉFINITION. — **Dans ces conditions, on dit que Γ_1 est une *hélice* de *directrice* Γ et d'*axe* $\mathbb{R}\mathbf{k}$.**

On constate que $\mathscr{S}_1 = \operatorname{supp} \Gamma_1$ est tracé sur le cylindre de directrice $\mathscr{S} = \operatorname{supp} \Gamma$, et de direction de génératrices $\mathbb{R}\mathbf{k}$ (fig. 42). Si on développe ce cylindre, $\mathscr{S}_1$ se transforme en une droite non parallèle aux génératrices.

Réciproquement toute hélice peut être obtenue par ce procédé.

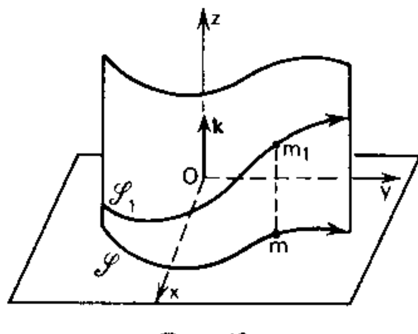


FIG. 42.

EXEMPLE. — Si Γ est le cercle dont un paramétrage est $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, Γ_1 est une hélice circulaire si $a \neq 0$, un cercle si $a = 0$ (cf. **2.2.2**, 7°).

2° ***Propriétés de l'hélice*** Γ_1. — De $\dfrac{dg_1}{ds} = \boldsymbol{\tau} + a\mathbf{k}$ on déduit que Γ_1 est régulier. Puisque l'on a orienté Γ_1 dans le sens des s croissants : $\dfrac{ds_1}{ds} = \sqrt{a^2 + 1}$, et donc :

- **L'abscisse curviligne sur Γ_1 est une fonction affine de l'abscisse curviligne sur Γ.**

— On a $\boldsymbol{\tau}_1 = \dfrac{dg_1}{ds_1} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\boldsymbol{\tau} + \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}\mathbf{k}$; d'où $(\boldsymbol{\tau}_1|\mathbf{k}) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}} \in]-1, +1[$ et :

- **Le vecteur unitaire de la tangente orientée à Γ_1 fait avec k un angle constant $\alpha \in]0, \pi[$; on a : $\cos \alpha = a/\sqrt{a^2+1}$ et $\operatorname{cotg} \alpha = a$.**

— Supposons maintenant $k \geqslant 2$. On a $\dfrac{d\boldsymbol{\tau}_1}{ds_1} = \dfrac{1}{a^2+1}\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ et donc Γ_1 est birégulier si, et seulement si Γ l'est, condition que nous supposons remplie. Puisque nous avons convenu que la courbure est positive, il vient :

$$c_1 = c/(a^2+1) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v} ;$$

d'où :

$$\boldsymbol{\beta}_1 = -\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\boldsymbol{\tau} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\mathbf{k}.$$

- **La normale principale à Γ_1 reste parallèle au plan $\mathscr{P}$.**
- **La courbure de Γ_1 est proportionnelle à celle de Γ.**
- **Le vecteur unitaire de la binormale orientée à Γ_1 fait avec k un angle constant $\alpha' \in]0, \pi[$; on a : $\cos \alpha' = 1/\sqrt{a^2+1}$ et $\operatorname{tg} \alpha' = a$.**

— Si, en outre $k \geqslant 3$, on peut introduire la torsion γ_1 de Γ_1. On a : $\dfrac{d\boldsymbol{\beta}_1}{ds_1} = -\dfrac{a}{a^2+1}c\mathbf{v}$.

D'où $\gamma_1 = -\dfrac{a}{a^2+1}c$, et $\gamma_1 = -ac_1$:

• **La courbure et la torsion sont proportionnelles.**

3° ***Étude de quelques réciproques.*** — *a) Soit Γ_1 un C^1-arc régulier orienté, dont le vecteur unitaire de la tangente orientée fait avec un vecteur unitaire fixe* $\mathbf{k}$ *un angle constant $\alpha \in]0, \pi[$. Γ_1 est une hélice d'axe* $\mathbb{R}\mathbf{k}$.

Soient $\mathscr{P}$ un plan affine de direction $(\mathbb{R}\mathbf{k})^\perp$ et Γ l'arc projection orthogonale de Γ_1 sur $\mathscr{P}$. Comme Γ_1, Γ est de classe C^1 et on peut écrire :

$$m_1 = m + \lambda\mathbf{k}, \qquad \text{où} \qquad \lambda = (\overrightarrow{mm_1}|\mathbf{k}) \text{ est de classe } C^1.$$

Par dérivation : $\dfrac{d\lambda}{ds_1}\mathbf{k} = \boldsymbol{\tau}_1 - \dfrac{dm}{ds_1}$.

En multipliant scalairement par $\mathbf{k}$, on en déduit :

$$\frac{d\lambda}{ds_1} = (\boldsymbol{\tau}_1|\mathbf{k}) - \left(\frac{dm}{ds_1}\middle|\mathbf{k}\right) = \cos\alpha$$

D'où :
$$\frac{dm}{ds_1} = \boldsymbol{\tau}_1 - \cos\alpha\,\mathbf{k} \qquad \text{et} \qquad \left\|\frac{dm}{ds_1}\right\|^2 = \sin^2\alpha.$$

Γ est ainsi régulier, et si on l'oriente de sorte que $\dfrac{ds}{ds_1} = \sin\alpha$, on a $\lambda(s) = as + b$, (avec $a = \operatorname{cotg}\alpha$). □

REMARQUE. — Pour $\alpha = \pi/2$, on trouve les arcs plans, qui sont des hélices ($a = 0$).

b) Soit Γ_1 un arc bi-régulier, dont la normale principale reste parallèle à un plan affine $\mathscr{P}$; Γ_1 est une hélice, de direction orthogonale à $\mathscr{P}$.

Soit $\mathbf{k}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\mathscr{P}$. Par hypothèse : $(\mathbf{v}_1|\mathbf{k}) = 0$ et donc $\left(\dfrac{d\boldsymbol{\tau}_1}{ds_1}\middle|\mathbf{k}\right) = 0$.

Ainsi $(\boldsymbol{\tau}_1|\mathbf{k})$ est constant ; on est ramené à *a*). □

c) Soit Γ_1 un arc bi-régulier dont le vecteur unitaire de la binormale orientée fait avec un vecteur unitaire fixe un angle constant $\alpha' \in]0, \pi[$. Γ_3 est une hélice d'axe $\mathbb{R}\mathbf{k}$.

De $(\boldsymbol{\beta}_1|\mathbf{k}) = \cos\alpha'$, on déduit, par dérivation $(\mathbf{v}_1|\mathbf{k}) = 0$; on est ramené à *b*).

d) Soit Γ_1 un arc bi-régulier de classe C^k ($k \geqslant 3$) dont la torsion est proportionnelle à la courbure. Γ_1 est une hélice.

On suppose $\dfrac{1}{T_1} = \dfrac{\lambda}{R_1}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Il en résulte $\dfrac{d\boldsymbol{\beta}_1}{ds_1} = \lambda\dfrac{d\boldsymbol{\tau}_1}{ds_1}$ et donc le vecteur $\boldsymbol{\beta}_1 - \lambda\boldsymbol{\tau}_1$ est constant. En notant $\mathbf{k}$ ce vecteur constant, il vient $(\mathbf{v}_1|\mathbf{k}) = 0$, et on est ramené au *b*).

REMARQUES. — *a*) Cette propriété a l'avantage sur les autres d'être facile à constater dans n'importe quel repère.

b) Le lecteur vérifiera que les hélices circulaires sont caractérisées par le fait que les fonctions courbure et torsion sont constantes.

EXEMPLE. — Le C^∞-arc Γ_1 de représentant $(\mathbb{R}, f)$ avec $f(t) = O + e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + t\sqrt{2}\mathbf{k}$ a été étudié au **2**.2.2.5°. Nous avons trouvé $R = T = 2\sqrt{2}\operatorname{ch}^2 t$. Il s'agit donc d'une hélice. Nous avons d'ailleurs constaté que $\boldsymbol{\tau}$ fait avec $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ l'angle constant $\pi/4$. Après rotation du repère de $-\pi/4$

autour de l'axe $O + \mathbb{R}\mathbf{k}$, on constate que Γ_1 admet le paramétrage

$$X = \sqrt{2}\ \text{sh}\ Z/\sqrt{2}, \qquad Y = \sqrt{2}\ \text{ch}\ Z/\sqrt{2}$$

La directrice de Γ_1 est une chaînette du plan YOZ (fig. 43). L'axe de Γ_1 est OX.

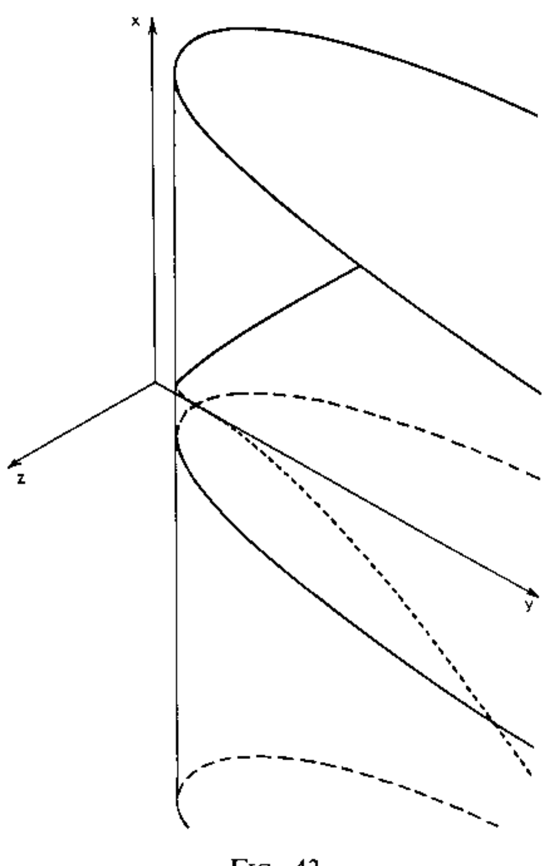


FIG. 43.

EXERCICES

On se place dans $\mathscr{E}_2$ (resp. $\mathscr{E}_3$) affine euclidien orienté. Tous les repères considérés sont orthonormaux directs.

GÉOMÉTRIE PLANE EUCLIDIENNE

· **2.01.** – Montrer que les deux arcs paramétrés définis par

$$\rho = a \sin 2\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2); \qquad x = 2a \cos t, \qquad y = a \sin t \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$$

ont la même longueur.

2.02. – Longueur d'un arc paramétré dans le support a pour équation : $y^2(a^2 - y^2) = 8a^2x^2$.

2.03. – On considère les sous-arcs $\gamma_{0,\alpha}$ et $\gamma_{\alpha',\pi/4}$ de l'arc paramétré défini par

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}, \qquad \theta \in [0, \pi/4]$$

tels que $\cos \alpha . \cos \alpha' = 1/\sqrt{2}$. Montrer qu'ils ont la même longueur.

2.04. — Étant donné $\alpha > 1$, on considère l'arc paramétré γ défini par :

$$y = f(x), \qquad \text{avec} \qquad f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) = x^\alpha \sin 1/x.$$

On note $l(x)$ la longueur du sous-arc $\gamma_{x,1}$, $x \in]0, 1[$. Existe-t-il $\lim_{x \to 0} l(x)$?

2.05. — *a*) Soit $l(t)$ la longueur du sous-arc $\gamma_{0,t}$ de la cissoïde droite :

$$x = at^2/(1 + t^2), \qquad y = at^3/(1 + t^2).$$

Existe-t-il : $\lim_{t \to +\infty} (l(t) - y(t))$?

b) Inversement soit γ' un arc paramétré d'équation $y = f(x)$, où $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est de classe C^1, positive, décroissante, et vérifie $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Soit $s(x)$ une abscisse curviligne du point d'abscisse x de γ'. Existe-t-il $\lim_{x \to +\infty} (s(x) - y)$?

2.06. — Rayon de courbure et centre de courbure en un point de l'un des arcs paramétrés définis par :

$$y = 1/(a + \operatorname{ch} 1/x); \qquad 2e^{x+y} = (1 + e^x)(1 + e^y)$$

$$\begin{cases} x = (1 + \cos^2 t) \sin t \\ y = \sin^2 t \cos t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \\ y = 2 \operatorname{ch} t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \cos^2 t + \operatorname{Log}(\sin t) \\ y = \sin t \cos t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \operatorname{sh} t/(\operatorname{ch} t + \cos t) \\ y = \sin t/(\operatorname{ch} t + \cos t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \operatorname{Arctg} t \\ y = \operatorname{Log}\,[(1 + t^2)/(1 - t^2)] \end{cases}$$

$$\rho = \operatorname{th} \theta/2; \qquad \rho = (\sin \theta/\alpha)^\alpha; \qquad \rho = 1/(1 - \theta^2)$$

2.07. — Rayon de courbure au point d'abscisse 0 de l'arc paramétré défini par $y = f(x)$, où f est la fonction continue et paire définie par :

$$f(x) = \frac{\operatorname{Arc} \sin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1 - x)}} \quad \text{si } 0 < x < 1.$$

2.08. — Trouver le centre de courbure au point O de chacun des arcs paramétrés déterminés au voisinage de O par :

$$x = t^2 + t, \qquad y = (t + 1)e^{1/t}$$

$$\rho = \frac{\operatorname{tg} \theta - \cos \theta}{1 + \cos^2 \theta}; \qquad \rho = \frac{\sin \theta - 2 \cos \theta}{1 + \cos^3 \theta}; \qquad \sin \theta = \frac{\rho(\rho - 3)}{\rho + 1}$$

$$x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0; \qquad x^4 + y^3 - x^2 - xy + y^2 - x = 0$$

$$x^4 + y^4 + x^3 + y^3 = 0; \qquad x^4 + y^4 + x^2(x - 2y) + x^2 - \lambda^2 y^2 = 0$$

2.09. — Lieu, quand λ varie, du centre de courbure au point $O + ai$ de la « courbe » :

$$(\Gamma_\lambda) \qquad x^2 + 2\lambda xy - y^2 - a^2 = 0$$

2.10. — La « courbe » Γ_λ d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\lambda - \sin^2\lambda = 0$$

est tangente à la droite $x = a$. Lieu, quand λ varie, du centre de courbure à Γ_λ au point de contact.

2.11. Soit l'équation différentielle linéaire :

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x) \qquad (E)$$

où a, b, c sont des fonctions continues sur un même intervalle.

On appelle *courbe intégrale* de E tout arc paramétré $(I, x \longmapsto (x, \varphi(x))$ de $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne naturelle, tel que φ soit solution sur I de E.

a) Lieu du centre de courbure au point donné m_0 des courbes intégrales de E qui passent par m_0.

b) Ici a et b sont des constantes. On considère celles des courbes intégrales de E qui sont tangentes à la droite $y = x$. Lieu du centre de courbure au point de contact.

2.12. — On considère les courbes intégrales (cf. exercice précédent) de :

$$y' - y(x + y) + 1 = 0 \qquad (E)$$

a) Lieu des points d'inflexion; enveloppe des tangentes en ces points.

b) Lieu du centre de courbure en leurs points d'intersection avec les axes de coordonnées.

2.13. — Les centres de courbure à la spirale d'Archimède $\rho = a\theta$, aux points situés sur Oy appartiennent à l'une où l'autre de deux coniques.

2.14. — La normale en m à la parabole $y^2 - 2px = 0$ coupant la directrice en n, montrer que le centre de courbure en m est p tel que $\overrightarrow{mp} = -2\overrightarrow{mn}$. En déduire le lieu des foyers des paraboles admettant en un point donné un centre de courbure donné.

2.15. — Une parabole est tangente à une ellipse en deux de ses sommets m_0 et m_1. Montrer que, si p_0 et p'_0 désignent les centres de courbure en m_0 de l'ellipse et de la parabole on a : $\overrightarrow{m_0p'_0} = 2\overrightarrow{m_0p_0}$.

2.16. — Au point m d'une ellipse Γ on associe le point n où la normale en m recoupe Γ. Montrer que les extremums de la fonction $m \longmapsto d(m, n)$ correspondent aux cas où m est un sommet et éventuellement aux cas où n appartient à la développée de Γ.

2.17. — Au point m (distinct du sommet) d'une parabole Γ on associe le point n où la normale en m coupe Γ. Chercher les extremums de la fonction $m \longmapsto l$ (arc mn).

2.18. — On considère l'arc géométrique simple et fermé, de représentant normal $([0, L], g)$ où $g : \mathbb{R} \to \mathscr{E}$ est L-périodique, de classe $\mathbb{R}^3$; c désigne la fonction courbure.

a) Vérifier : $\displaystyle\int_0^L c'(s)\overrightarrow{Og(s)}\,ds = 0.$

b) On suppose que l'arc est convexe (i.e. pour tout $s \in [0, L]$, contenu dans un

demi-plan fermé limité par la tangente au point d'abscisse curviligne s). Montrer que la fonction s possède au moins quatre extremums.

2.19. — Trouver les cercles osculateurs à une ellipse passant :

a) par le centre; *b*) par un foyer.

2.20. — Trouver les cercles osculateurs à l'arc paramétré :

$$x = a\sqrt{\cos t}, \qquad y = a\sqrt{\sin t}$$

qui passent par O.

2.21. — Le rapport des rayons de courbure au point de contact de deux arcs paramétrés tangents est invariant dans un automorphisme affine du plan $\mathscr{E}$.

2.22. — Soit γ un arc paramétré bi-régulier. Montrer qu'en général les cercles de courbure à γ en deux points voisins ne se coupent pas. Étudier le cas d'exception.

2.23. — Sur un arc paramétré bi-régulier donné on considère un point m_0 fixe et deux points m et m' qui tendent vers m_0 en restant distincts. Trouver la « limite » :

a) du cercle circonscrit au triangle m_0, m, m',

b) du cercle circonscrit au triangle formé par les tangentes à γ en m_0, m, m'.

2.24. — Trois points m_i, ($i \in \mathbb{N}_3$), décrivent des C^2-arcs paramétrés bi-réguliers (I, f_i) de façon que, pour toute valeur du paramètre, ils soient distincts et que la tangente à chacun d'eux soit parallèle à la droite définie par les deux autres; on désigne par R_i les rayons de courbure et par r le rayon du cercle circonscrit à $m_1 m_2 m_3$. Montrer que $R_1 R_2 R_3 / r^3$ est une constante.

2.25. — A tout point m d'un C^2-arc paramétré bi-régulier γ on associe la droite $\mathscr{D}_m$ déduite de la tangente en m par une rotation d'angle donné autour de m, et la droite Δ_m symétrique de la tangente en m par rapport à une droite de direction donnée passant par m. En utilisant le centre de courbure p, donner une construction géométrique simple des points de contact de $\mathscr{D}_m$ et Δ_m avec leurs enveloppes.

2.26. — On considère deux arcs paramétrés bi-réguliers γ_i, $i \in \mathbb{N}_2$, de supports homologues l'un de l'autre dans une inversion de pôle O, d'équations polaires $\rho = f_i(\theta)$, $\theta \in I$, où f_1 et f_2 sont deux fonctions de produit constant : m_i désigne le point de γ_i d'angle polaire θ, p_i le centre de courbure, n_i le pied de la sous-normale (angle polaire $\theta + \pi/2$) de γ_i en m_i. Les deux arcs sont orientés dans le sens des θ croissants.

a) Vérifier : $f_1(\theta)\,\mathrm{d}s_2 = f_2(\theta)\,\mathrm{d}s_1$.

b) Montrer que O, p_1 et p_2 sont alignés.

c) Vérifier : $\dfrac{\overline{m_1 n_1}}{\overline{m_1 p_1}} + \dfrac{\overline{m_2 n_2}}{\overline{m_2 p_2}} = 2.$

2.27. — On considère l'ellipse γ représentée par : $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

a) Un cercle $\mathscr{C}$ la coupe en quatre points $m_i(t_i)$. Calculer $\sum_{i=1}^{4} t_i$.

b) Le cercle osculateur à γ au point $m(t)$ recoupe γ en $m'(t')$. Exprimer t' en fonction de t. Comparer la direction de la droite mm' et celle de la tangente en m à γ.

c) Les points m_i' associés à quatre points cocycliques m_i de γ (comme il a été dit en *b*) sont eux-mêmes cocycliques.

2.28. — Trouver la développée :

— d'une cissoïde droite : $x = at^2/(1 + t^2)$, $y = tx$;

— d'une strophoïde droite : $x = a(1 - t^2)/(1 + t^2)$, $y = tx$;

— d'une lemniscate : $x = at/(1 + t^4)$, $y = t^2 x$;

— d'une spirale logarithmique : $\rho = ae^{m\theta}$.

2.29. — Construire les développantes d'une parabole, d'une chaînette, des arcs définis par :

$$\begin{cases} x = 3at^2 \\ y = 2at^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a(3t - t^3) \\ y = 3at^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a \operatorname{Arc tg} t \\ y = a \operatorname{Log} \dfrac{1 + t^2}{1 - t^2} \end{cases}$$

2.30. — Lieu des projections du centre d'un cercle sur les tangentes à une développante de ce cercle.

2.31. — Former une équation intrinsèque d'une développante de développante de cercle.

2.32. — Le plan est euclidien mais (exceptionnellement) le repère n'est pas nécessairement orthonormal. Soit γ l'arc paramétré défini par

$$x = a\cos t + b\sin t + ct + d, \qquad y = a'\cos t + b'\sin t + c't + d'$$

On note : $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + a'\mathbf{j}$, $\quad \mathbf{v} = b\mathbf{i} + b'\mathbf{j}$, $\quad \mathbf{w} = c\mathbf{i} + c'\mathbf{j}$.
Montrer que γ est une cycloïde si, et seulement si :

$$\|\vec{\mathbf{u}}\| = \|\vec{\mathbf{v}}\| = \|\vec{\mathbf{w}}\| \neq 0 \qquad \text{et} \qquad (\mathbf{u}|\mathbf{v}) = 0$$

2.33. — Une arche de cycloïde roule sans glisser sur une droite.

a) Lieu des extrémités.

b) Lieu du centre de courbure au point de contact avec la droite.

2.34. — *a*) Une cardioïde roule sans glisser sur une droite. Lieu du centre de courbure au point de contact.

b) Même question pour une astroïde, pour une parabole.

2.35. — Une spirale logarithmique roule sans glisser sur un cercle. Lieu du centre de courbure au point de contact.

2.36. — Lieu du sommet d'une chaînette qui roule sans glisser sur une droite.

2.37. — Déterminer un C^1-arc paramétré régulier sur lequel peut rouler sans glisser une cardioïde de façon que le point de rebroussement décrive une droite.

2.38. — Déterminer un C^2-arc paramétré bi-régulier qui puisse rouler sans glisser sur une droite fixe $\mathscr{D}$ de façon que le centre de courbure au point de contact décrive une cycloïde de base $\mathscr{D}$.

« ARCS CONDITIONNÉS » DU PLAN

2.39. — Pour tout C^1-arc paramétré orienté régulier γ, on associe à tout $m \in \operatorname{supp} \gamma$ ses projections orthogonales q et q' sur Ox et Oy, les points d'intersection t et t' (resp. n et n') de la tangente (resp. de la normale) avec Ox et Oy, et les projections orthogonales h et h' de O sur la tangente et sur la normale ; a et k sont des réels non nuls donnés ($a > 0$).

On demande de déterminer un arc γ vérifiant une condition imposée qui est successivement :

$$\overrightarrow{mn'} = k\overrightarrow{mn}; \quad \overline{Ot'} = k\overline{On}; \quad \overrightarrow{Ot} = k\overrightarrow{On}; \quad \overline{tn} = a;$$

$$\|\overrightarrow{Om}\| = k\|\overrightarrow{mt}\|; \quad \|\overrightarrow{Om}\| = k\|\overrightarrow{mn}\|; \quad \|\overrightarrow{tt'}\| = \|\overrightarrow{nn'}\|; \quad \overline{Ot}\,.\,\overline{On} = k;$$

$$\|\overrightarrow{nn'}\| = a; \quad \overrightarrow{Ot} = k\overrightarrow{qn}; \quad \|\overrightarrow{mh}\| = a; \quad \overline{Oh}\,.\,\overline{mn} = k;$$

$$\|\overrightarrow{Oh}\| = \|mt\|; \quad \|Ot\|^2 = a\overline{Oq}; \quad \|\overrightarrow{Oh'}\| = a;$$

— La droite $t'n$ a une direction donnée ;
— Le milieu de mn appartient à la parabole d'équation $y^2 = 2px$;
— Le milieu de mt' appartient à un cercle de centre O ;
— Les droites Om et tn' font un angle donné ;
— Le cercle de diamètre tn' est orthogonal à un cercle fixe ;
— La droite hh' a une direction fixe ;
— La parallèle à la normale mn menée par t' est tangente à son enveloppe en un point appartenant à la droite Om.

2.40. — Pour tout arc paramétré orienté γ, bi-régulier, les symboles s, m, c, R, p, α ont la même signification que dans le cours ; (x, y) [resp. (θ, ρ)] sont des coordonnées cartésiennes [resp. polaires] de m ; R_1 est le rayon de courbure en p de la développée γ_1 (classe assez grande) ; a et k sont des réels non nuls donnés ($a > 0$).

On demande de déterminer un arc γ vérifiant une condition imposée qui est successivement :

$$R = a\alpha; \quad R = a\frac{\sin\alpha}{\cos^4\alpha}; \quad R = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}; \quad y = ae^{s/a};$$

$$s = a\alpha; \quad s = a\operatorname{tg}\alpha; \quad s = ae^{k\alpha}; \quad s^2 = 8ay;$$

$$y^2 - s^2 = a^2; \quad s = a\operatorname{Log}(y/a); \quad R = k\rho$$

— $R = \rho^3/a^2$ et une asymptote passe par O (on cherchera $g(\theta) = 1/\rho(\theta)$) ;
— $R = a^2/3\rho$ et O est point d'inflexion ;
— Le segment $[m, p]$ est vu de O sous un angle donné ;
— $R + R_1 = a$ (on passe dans ce cas de γ_1 à sa développée par un déplacement) ;
— $R^2 + k^2R_1^2 = a^2$; cas de $k = 1$;
— Le point n défini par $\overrightarrow{mn} = k\overrightarrow{mp}$ décrit une droite donnée. Cas de $k = -1$ et $k = 2$;
— $|R| = \|\overrightarrow{Om}\|^2/\|\overrightarrow{Oh}\|$, où h est la projection de O sur la tangente en m ;
— L'homothétique dans (m, k) du cercle de courbure de m passe par O ;
— $\overrightarrow{mp} = k\overrightarrow{mh}$ (h : projection de O sur la normale en m) ;
— $\overrightarrow{Op} = k\overrightarrow{Om}$ (q : point où la droite Om recoupe le cercle osculateur.

2.41. — Pour a et k donnés ($a > 0$), déterminer un arc plan d'équation intrinsèque :

$$R = s; \qquad c = ks; \qquad R^2 = 2as; \qquad R^2 = a^2(e^{s/a} - 1)$$
$$c^2 + s^2 = 1; \qquad R^2 = a^2 + k^2s^2; \qquad R^2 = a^2 - k^2s^2; \qquad a^2 + s^2 = as.$$

Géométrie dans l'espace $\mathscr{E}_3$ euclidien

2.42. — Soit $\gamma = ([a, b], f)$ un C^0-arc paramétré compact. On suppose que f est dérivable à droite sur $]a, b[$ et que f'_d est bornée sur $]a, b[$. Montrer que γ est rectifiable.

2.43. — Un C^1-arc paramétré de longueur l se projette orthogonalement sur les plans de coordonnées suivant des arcs de longueurs l_1, l_2, l_3.

Montrer : $l_1 + l_2 + l_3 \geqslant l\sqrt{3}$.

2.44. — Repère de Ferret-Frenet, courbure et torsion en un point de l'un des arcs paramétrés orientés définis par :

$$\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = t^3 - 3t \\ z = t^3 + 3t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t^2/2 \\ y = t^3\sqrt{2}/3 \\ z = t^4/4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t\sqrt{2} + \operatorname{ch} t + \sqrt{2}\operatorname{sh} t \\ y = -t\sqrt{2} + \operatorname{ch} t + \sqrt{2}\operatorname{sh} t \\ z = 2\operatorname{sh} t - \sqrt{2}\operatorname{ch} t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \\ z = b\cos 2t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \\ z = bt \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos t \\ y = t + 2\sin t \\ z = 2(1 - \cos t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \operatorname{sh} z \\ y = \operatorname{ch} z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \cos z + z\sin z \\ y = \sin z - z\cos z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = z^3/4 + 1/(3z) \\ y = z^3/4 - 1/(3z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta = \sin t \\ \rho = a \\ z = a\cos t \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta = \operatorname{tg} t - t \\ \rho = a/\cos t \\ z = a/(2\cos^2 t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = ae^{\theta\sqrt{3}} \\ z = ae^{\theta\sqrt{3}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = a \\ z = a\operatorname{Log}|\cos\theta| \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = a \\ z = a\operatorname{ch}\theta \end{cases}$$

(On montrera que certains de ces arcs sont des hélices.)

2.45. — Soit γ l'arc paramétré orienté défini par :

$$x = 3t^2/4, \qquad y = t, \qquad z = t^3/4 + kt \quad (k \text{ donné})$$

On note α l'angle de la binormale en un point de γ avec la droite $O + \mathbb{R}\mathbf{i}$. Vérifier que la torsion au point considéré est $\cos^2\alpha$.

2.46. — Soit Γ un C^3-arc paramétré bi-régulier dont toutes les normales principales coupent une droite donnée $\mathscr{D}$ sous un angle donné α. Montrer que les plans rectifiants contiennent un point fixe de $\mathscr{D}$.

2.47. — Anticipant sur **3.3.***1*, montrer que l'équation :

$$(x^2 + y^2 + z^2 = 6) \wedge (x^3 + y^3 + z^3 = 8)$$

définit une courbe au voisinage du point $m_0(1, 2, -1)$ et trouver le repère de Serret-Frenet, la courbure et la torsion en m_0 de cette courbe.

2.48. — Même question, pour l'équation :

$$(x^2 + y^2 = a^2) \wedge (y^2 - 2zx = 0)$$

et le point $m_0(a, 0, 0)$.

2.49. — On donne les réels strictement positifs a et k. Déterminer successivement une fonction f pour qu'en tout point de l'arc paramétré (tracé sur le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = a^2$) représenté par :

$$x = a \cos t, \qquad y = a \sin t, \qquad z = f(t) :$$

a) La normale principale soit parallèle au plan d'équation $x = 0$;
b) La binormale rencontre la droite d'équation $(x = a) \wedge (y = 0)$;
c) La tangente soit tangente à la sphère d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2(1 + k^2)$$

d) La tangente rencontre le cercle d'équation :

$$(z = 0) \wedge (x^2 + y^2 = a^2(1 + k^2))$$

Dans le dernier cas on recherchera les abscisses curvilignes de l'un des arcs obtenus, ainsi que le repère de Serret-Frenet au point $(a, 0, ka)$ de celui d'entre eux qui contient ce point.

2.50. — Déterminer un C^2-arc géométrique bi-régulier orienté, en tout point duquel les axes du repère de Serret-Frenet coupent un plan donné en trois points formant un triangle équilatéral.

2.51. — Soit γ l'arc paramétré orienté défini par :

$$x = \int_0^t \frac{\cos u(1 + \operatorname{ch}^2 u)}{\operatorname{ch}^2 u}\, du, \qquad y = \int_0^t \frac{\sin u(1 + \operatorname{ch}^2 u)}{\operatorname{ch}^2 u}\, du,$$
$$z = \int_0^t \frac{\operatorname{sh} u(1 + \operatorname{ch}^2 u)}{\operatorname{ch}^2 u}\, du$$

a) Repère de Serret-Frenet, courbure et torsion en un point de γ; vérifier que la fonction $RT^2/(R^2 + T^2)$ est constante.

b) Déterminer une fonction ρ telle que l'arc paramétré γ_1 représenté par

$$t \longmapsto m_1(t) = m(t) + \rho(t)\mathbf{v}(t)$$

(où $m(t)$ est le point de γ de paramètre t, et où $\mathbf{v}(t)$ est le vecteur unitaire de la binormale en ce point) admette la droite $m(t)m_1(t)$ pour binormale en $m_1(t)$, et ceci pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2.52. — Soit Γ un C^1-arc géométrique fermé simple, de support $\mathscr{C}$ inclus dans une sphère $\mathscr{S}$ de rayon $R > 0$, la longueur de l'arc étant strictement inférieure à $2\pi R$.
Montrer que $\mathscr{C}$ est inclus dans une demi-sphère de $\mathscr{S}$, et ne contient pas deux points diamétralement opposés de $\mathscr{C}$.

2.53. — Soit Γ un C^2-arc géométrique fermé, régulier, orienté, défini par un représentant normal $([0, L], g)$. On lui associe son « indicatrice », qui est l'arc paramétré $\gamma = ([0, L], s \longmapsto O + \boldsymbol{\tau}(s))$.

a) Montrer que supp γ rencontre tout grand cercle de la sphère $(O, 1)$. (On étudiera la fonction $s \longmapsto (\mathbf{k}|\boldsymbol{\tau}(s))$, $\mathbf{k}$ fixe.

b) Montrer que la longueur de Γ vérifie : $l(\Gamma) \geqslant 2\pi$, l'égalité n'ayant lieu que si Γ est plane.

c) Montrer que la courbure c de Γ vérifie : $\displaystyle\int_0^L c(s)\,\mathrm{d}s \geqslant 2\pi$, l'égalité n'ayant lieu que si Γ est plane.

2.54. — Montrer que pour tout C^3-arc géométrique tri-régulier les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Le support est inclus dans une sphère.

ii) Pour tout représentant normal, la fonction $R^2 + \left(T\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)^2$ est constante.

2.55. — Soit Γ un C^3-arc géométrique tri-régulier, à courbure constante. Étudier la courbure, le centre de courbure et la torsion de l'arc engendré par le centre de courbure à Γ.

2.56. — On donne un torseur non nul T de $\mathscr{E}$ et on appelle « arc Γ » tout arc géométrique bi-régulier tel que, pour tout point M de Γ la tangente soit orthogonale au moment de T au point m, image de M.

a) Montrer qu'il existe des arcs Γ.

b) Montrer que les arcs Γ dont le support passe par un point donné $a \in \mathscr{E}$ ont, au point correspondant même plan osculateur et, éventuellement, même torsion.

2.57. — Soit Γ un C^3-arc géométrique fermé, bi-régulier, orienté, à support inclus dans une sphère, défini par un représentant normal $([0, L], g)$. En utilisant l'étude des développées (**2.2**.*4*, 4°) montrer que, γ désignant la torsion, on a : $\displaystyle\int_0^L \gamma\,\mathrm{d}s = 0$.

2.58. — Soit Γ un C^3-arc géométrique bi-régulier orienté, dont tous les plans osculateurs sont tangents à une sphère fixe. Montrer que tous les plans rectifiants passent par un point fixe et que le quotient de la torsion par la courbure est une fonction affine de l'abscisse curviligne.

Étudier une réciproque.

2.59. — Trouver des conditions pour que les binormales d'un arc Γ soient les normales principales d'un arc Γ_1 ; ces conditions étant remplies calculer la courbure et la torsion de Γ_1.

2.60. — Arcs de Bertrand. — Soit Γ un C^k-arc géométrique orienté bi-régulier, $k \geqslant 5$, défini par un représentant normal (J, g).

Pour $\rho : J \to \mathbb{R}$ donnée, de classe C^1, on dispose de l'arc Γ_1 représenté par (J, m_1), avec $m_1 : s \longmapsto m(s) + \rho(s)\mathbf{v}(s)$; (les notations sont celles du cours pour Γ, les mêmes affectées d'un indice pour Γ_1).

a) Montrer que la fonction $\left(\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}s}\middle|\mathbf{v}\right)$ est nulle si, et seulement si la fonction ρ est constante.

b) On dit que Γ est un arc de Bertrand si et seulement si on peut choisir une fonction ρ non nulle telle que, pour tout $s \in J$, $m(s)$ appartienne à la binormale à Γ_1 en $m_1(s)$. Montrer que, pour cela, il faut et il suffit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que la fonction $ac + b\gamma$ soit la constante $s \longmapsto 1$.

Ce couple (a, b) est-il unique ? On examinera le cas où Γ est une hélice circulaire.

c) La condition trouvée en *b*) étant remplie, montrer que les fonctions $(\boldsymbol{\tau}|\boldsymbol{\tau}_1)$ et $\gamma\gamma_1$ sont constantes sur J. Étudier le cas $(\boldsymbol{\tau}|\boldsymbol{\tau}_1) = 0$.

Étudier la fonction $ac_1 + b\gamma_1$ et en déduire que (pour k assez grand) l'arc Γ_1 associé à un arc de Bertrand Γ est lui aussi un arc de Bertrand.

Vérifier enfin que $\dfrac{\overline{mp}}{\overline{mp_1}} : \dfrac{\overline{m_1p}}{m_1p_1}$ est constant.

2.61. — Montrer que les arcs à courbure et torsion constantes et non nulles sont les hélices circulaires.

2.62. — Déterminer les arcs d'équation intrinsèque $(R = T = \operatorname{tg} s)$.

3

ÉTUDE AFFINE DES NAPPES

L'étude des nappes paramétrées est une généralisation de celle des arcs paramétrés.
Nous nous intéresserons ici aux propriétés affines C^k-invariantes des nappes paramétrées et nous introduirons la notion de nappe géométrique (étant entendu qu'il ne s'agira que d'un simple procédé d'exposition).
Pour simplifier, nous supposerons que $(\mathscr{E}, E)$ est un espace affine normé de dimension 3, et nous nous limiterons au cas de la classe C^k avec $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{+\infty\}$.

3.1. GÉNÉRALITÉS; PLANS TANGENTS

3.1.*1*. Généralités sur les nappes paramétrées

1° ***Nappes paramétrées (ou surfaces paramétrées).*** – DÉFINITION I. – **On appelle** *C^k-nappe paramétrée* **(ou** *C^k-surface paramétrée*) **de $\mathscr{E}$ tout couple (D, F), où D est un domaine (ouvert-connexe) de $\mathbb{R}^2$, et F une application de classe C^k de D dans $\mathscr{E}$. On dit que $F(D)$ est le** *support* **de la nappe; on le note** supp (D, F); **c'est un connexe de $\mathscr{E}$.**

• ***Points de la nappe; multiplicité d'un point du support.*** – On étend la définition I du **1**.2.*1*, 2°.

• ***Sous-nappes.*** – DÉFINITION II. – **Soient (D, F) une C^k-nappe paramétrée, et D' un domaine de $\mathbb{R}^2$ inclus dans D. Alors $(D', F|D')$, qui est visiblement une C^k-nappe paramétrée, est dite** *sous-nappe* **de (D, F).**

Son support est une partie de celui de (D, F).

• ***Nappes simples.*** – DÉFINITION III. – **On dit qu'une nappe paramétrée (D, F) est simple si, et seulement si F est une injection.**

• ***Point régulier.*** – On étend la définition VI du **1**.2.*1*, 2°, à ceci près qu'ici **le point de paramètre (u_0, v_0) est dit régulier si et seulement si** rg $dF(u_0, v_0) = 2$. **La nappe paramétrée (D, F) est dite** *régulière* **si et seulement si chacun de ses points est régulier.**

• *Plongements.* — DÉFINITION IV. — **On dit qu'une C^k-nappe paramétrée (D, F) est *immergée* (resp. *plongée*) si, et seulement si F est une immersion (resp. un plongement) de D dans $\mathscr{E}$; une nappe plongée est ainsi une nappe simple.**

La nappe (D, F) est donc immergée si, et seulement si, pour tout $(u, v) \in D$, $\mathrm{d}F(u, v) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, E)$ est injective, i.e. de rang 2.

Rappelons que $\mathrm{d}F(u, v)$ s'écrit :

$$(\xi, \eta) \longmapsto \xi F'_u(u, v) + \eta F'_v(u, v)$$

si bien que son rang est celui du système de vecteurs de E :

$$(F'_u(u, v),\ F'_v(u, v))$$

La nappe (D, F) est donc immergée si, et seulement si, pour tout $(u, v) \in D$, le système $(F'_u(u, v),\ F'_v(u, v))$ est libre.

Si $\mathscr{E}$ est euclidien et orienté cette condition s'écrit : l'*application $F'_u \wedge F'_v$ ne prend la valeur* 0 *en aucun point de D.*

• *Nappes cartésiennes.* — DÉFINITION V ET THÉORÈME. — **On dit qu'une C^k-nappe paramétrée (D, F) est cartésienne si, et seulement s'il existe un repère $(O\,;\, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de $\mathscr{E}$ tel que l'on ait :**

$$\forall (u, v) \in D, \qquad F(u, v) = O + u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + f(u, v)\mathbf{k}.$$

Toute nappe cartésienne est une nappe plongée.

Le lecteur étendra la démonstration du 1.2.*1*, 2°. □

2° *Nappes géométriques.* — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **On obtient une relation d'équivalence sur l'ensemble des C^k-nappes paramétrées de $\mathscr{E}$ en convenant que « (D, F) est C^k-équivalente à (Δ, G) signifie qu'il existe $\theta \in \mathrm{Diff}^k(\Delta, D)$ (1) tel que $G = F \circ \theta$ ». Les classes de C^k-équivalence sont appelées *C^k-nappes géométriques* de $\mathscr{E}$.**

On raisonne comme pour les arcs géométriques. □

• On introduit, en procédant comme pour les arcs géométriques, les notions de *paramétrisations*, de *points d'une nappe*, ainsi que celle de *sous-nappes.*

---

(1) Ceci signifie que $\theta : (\lambda, \mu) \longmapsto (\varphi(\lambda, \mu), \psi(\lambda, \mu))$ est une bijection de classe C^k de Δ sur D dont le jacobien :

$$j_\theta : (\lambda, \mu) \longmapsto \begin{vmatrix} \varphi'_\lambda(\lambda, \mu) & \varphi'_\mu(\lambda, \mu) \\ \psi'_\lambda(\lambda, \mu) & \psi'_\mu(\lambda, \mu) \end{vmatrix}$$

ne prend pas la valeur 0. Comme $j_\theta(\Delta)$ est un connexe de $\mathbb{R}$ (image d'un connexe de $\mathbb{R}^2$ par j_θ, de classe C^{k-1}), ceci implique que j_θ garde un signe fixe, non nul sur Δ. Selon qu'il s'agit de $+1$ ou de -1, on écrit $\theta \in \mathrm{Diff}^k_+(\Delta, D)$ ou $\theta \in \mathrm{Diff}^k_-(\Delta, D)$.

On introduit ensuite les notions de *propriétés C^k-invariantes d'une nappe paramétrée* et de *propriétés d'une nappe géométrique* (cf. **1.2.1**, 4°). A titre d'exemples on démontre, en raisonnant comme pour les arcs :

PROPOSITION I. — **Toutes les paramétrisations d'une nappe géométrique Σ ont un support commun, qui est dit** *support de* Σ, **et noté** $\operatorname{supp}\Sigma$.

PROPOSITION II. — **Soit M_0 un point d'une nappe géométrique Σ. Si pour un représentant $(D, F, (u_0, v_0))$ de M_0 on a $\operatorname{rg} dF(u_0, v_0) = 2$, alors il en est de même pour tout représentant de M_0, et on dit que M_0 est un** *point régulier* **de Σ.**

Avec les notations habituelles, on a en effet :

$$\forall(\lambda, \mu) \in \Delta \qquad dG(\lambda, \mu) = dF(\theta(\lambda, \mu)) \circ d\theta(\lambda, \mu)$$

ce qui, compte tenu de $d\theta(\lambda, \mu) \in GL(\mathbb{R}^2)$, entraîne l'égalité des images des applications linéaires $dG(\lambda, \mu)$ et $dF(\theta(\lambda, \mu))$, et donc l'égalité des rangs de ces applications. □

PROPOSITION III. — **Si une paramétrisation d'une nappe géométrique Σ est une nappe paramétrée simple (resp. immergée, resp. plongée), il en est de même pour toute paramétrisation de Σ, qui est dite nappe géométrique** *simple* **(resp.** *immergée ;* **resp.** *plongée*).

Même démonstration que dans le cas des arcs géométriques. □

• Le théorème suivant permet de constater que *le support d'une nappe immergée peut être considéré comme une réunion de supports de nappes plongées.*

THÉORÈME I. — **Soit M_0 un point régulier d'une C^k-nappe géométrique Σ. Alors, parmi les sous-nappes de Σ dont un point est M_0, il en existe une qui admet une paramétrisation cartésienne, et donc est plongée.**

Soit $(D, F, (u_0, v_0))$, avec $\operatorname{rg} dF(u_0, v_0) = 2$, un représentant de M_0. Il existe [1] un repère $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de $\mathscr{E}$ vérifiant la condition :

$$\mathbf{k} \notin \operatorname{Vect}(F'_u(u_0, v_0),\ F'_v(u_0, v_0))$$

En notant $F(u, v) = O + f_1(u, v)\mathbf{i} + f_2(u, v)\mathbf{j} + f_3(u, v)\mathbf{k}$, on a donc

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(u, v)}(u_0, v_0) \neq 0,$$

ce qui permet d'appliquer le théorème d'inversion locale à :

$$(f_1, f_2) : D \to \mathbb{R}^2 \qquad (u, v) \longmapsto (f_1(u, v), f_2(u, v))$$

au voisinage de (u_0, v_0) : il existe un ouvert $D' \in \mathscr{V}_D(u_0, v_0)$, que nous avons le droit de supposer connexe, tel que (f_1, f_2) induise $\varpi \in \operatorname{Diff}^k(D', \Omega)$, où

---

[1] Un tel repère peut se déduire d'un repère quelconque par une permutation convenable des vecteurs de la base.

$\Omega = (f_1, f_2)(D')$ est un domaine de $\mathbb{R}^2$. La sous-nappe Σ' de Σ représentée par $(D', F|D')$ l'est aussi par (Ω, Φ), avec :

$$\Phi = (F \mid D') \circ \varpi^{-1} \qquad (x, y) \longmapsto O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f_3(\varpi^{-1}(x, y))\mathbf{k}. \qquad \square$$

THÉORÈME II. — **Deux C^k-nappes paramétrées plongées de $\mathscr{E}$, (D, F) et (Δ, G), qui ont un support commun $\mathscr{S}$ sont C^k-équivalentes.**

$\bar{F}$ et $\bar{G}$ désignant les homéomorphismes de D et Δ sur $\mathscr{S}$ respectivement induits par F et G, il suffit de montrer que l'homéomorphisme $\theta = \bar{F}^{-1} \circ \bar{G}$ de Δ sur D est de classe C^k (la même propriété valant alors pour $\theta^{-1} = \bar{G}^{-1} \circ \bar{F}$; on a en effet $G = F \circ \theta$).

— Soient $(\lambda_0, \mu_0) \in \Delta$ et $(u_0, v_0) = \theta(\lambda_0, \mu_0)$. La nappe (D, F) étant plongée, $\mathrm{d}F(u_0, v_0)$ est de rang 2. $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ étant un repère de $\mathscr{E}$ qui vérifie :

$$\mathbf{k} \notin \operatorname{Vect}\ (F'_u(u_0, v_0),\ F'_v(u_0, v_0)),$$

en notant $F(u, v) = O + f_1(u, v)\mathbf{i} + f_2(u, v)\mathbf{j} + f_3(u, v)\mathbf{k}$, on a :

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(u, v)}(u_0, v_0) \neq 0.$$

Comme ci-dessus, il existe un domaine $D' \in \mathscr{V}_D(u_0, v_0)$ tel que (f_1, f_2) induise $\varpi \in \operatorname{Diff}(D', \Omega)$, où $\Omega = (f_1, f_2)(D')$ est un domaine de $\mathbb{R}^2$. On désigne par Δ' le domaine $\theta^{-1}(D') \in \mathscr{V}_\Delta(\lambda_0, \mu_0)$.

En notant $G(\lambda, \mu) = O + g_1(\lambda, \mu)\mathbf{i} + g_2(\lambda, \mu)\mathbf{j} + g_3(\lambda, \mu)\mathbf{k}$, on a $(g_1, g_2) = (f_1, f_2) \circ \theta$, et il vient :

$$\forall(\lambda, \mu) \in \Delta' \qquad (g_1, g_2)(\lambda, \mu) = \varpi(\theta(\lambda, \mu)).$$

La restriction de θ à Δ' est donc définie par $(\lambda, \mu) \longmapsto \varpi^{-1}(g_1, g_2)(\lambda, \mu)$, ce qui montre qu'il s'agit d'une application de classe C^k. $\square$

3° ***Ordre d'un point du support d'une nappe géométrique.*** On adopte la même définition que dans le cas des arcs géométriques (**1**.2.*1*, 5°).

On constate que tout point d'une nappe simple est d'ordre géométrique 1 (on dit : point simple). On vérifie ensuite :

PROPOSITION. — **Si, pour une paramétrisation (D, F) de Σ, le seul $\theta \in \operatorname{Diff}^k(D, D)$ vérifiant $F \circ \theta = F$ est Id_D, alors, pour tout point du support de Σ, l'ordre géométrique est égal à la multiplicité.**

4° ***Nappes géométriques orientées.*** — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **On obtient une relation d'équivalence sur l'ensemble des C^k-nappes paramétrées de $\mathscr{E}$ en convenant que « (D, F) est C^k-positivement équivalente à (Δ, G) signifie qu'il existe $\theta \in \operatorname{Diff}^k_+(\Delta, D)$ tel que $g = f \circ \theta$ ». Les classes de C^k-équivalence positive sont appelées *C^k-nappes géométriques orientées de $\mathscr{E}$*.**

On raisonne comme pour les arcs. $\square$

On introduit ensuite les notions d'*orientations* d'une nappe géométrique ; on montre qu'une nappe géométrique admet soit une, soit deux orientations, et on convient de dire que la nappe est orientable lorsqu'elle en admet deux.

PROPOSITION. — **Une C^k-nappe géométrique Σ, dont une paramétrisation est (D, F), est non orientable si, et seulement s'il existe $\theta \in \mathrm{Diff}_-(D, D)$ tel que $f = f \circ \theta$.**

On reprend la démonstration de la proposition II du **1.2.*1***, 6°, à cela près que φ est ici la bijection $(u, v) \mapsto (v, u)$ de D sur un ouvert D' de $\mathbb{R}^2$. □

On a immédiatement :

COROLLAIRE. — **Toute nappe simple (et, en particulier, toute nappe plongée) est orientable.**

En revanche, on ne dispose en général pas ici d'une orientation du support de la nappe.

3.1.*2*. Plans tangents

1° *Plan tangent à une nappe géométrique en un point régulier.*

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soient Σ une nappe géométrique (resp. une nappe géométrique orientée) et M_0 un point régulier de Σ, d'image m_0.**

Alors $\mathrm{Im}\, dF(u_0, v_0) = \mathrm{Vect}\,(F'_u(u_0, v_0), F'_v(u_0, v_0))$ est un plan vectoriel indépendant du choix du représentant $(D, F, (u_0, v_0))$ de M_0, ce qui permet de le noter $T(\Sigma\,; M_0)$; ses éléments non nuls sont dits *vecteurs tangents* **à Σ en M_0.**

Le plan affine $\mathscr{T}(\Sigma\,; M_0) = m_0 + T(\Sigma\,; M_0)$ est dit *plan tangent* **à Σ en M_0 ; les droites de ce plan qui passent par m_0 sont dites** *tangentes* **à Σ en M_0.**

Le lecteur étendra aisément la démonstration de la proposition II du **1.2.*1***, 4°. □

Notons que *le plan tangent à Σ en le point régulier M_0 est également le plan tangent en M_0 à toute sous-nappe de Σ qui contient M_0.*

REMARQUES. — On généralise aisément les remarques du **1.2.*2***, 1° ainsi que les remarques du **1.2.*2***, 2°. On retiendra en particulier que : *dans le cas d'une nappe simple, il n'y a aucun inconvénient à parler du plan tangent en un point du support ;* c'est d'un usage courant dans la pratique *et cela rejoint la notion de plan tangent en un point d'une surface au sens des sous-variétés*.

REMARQUES. — Ici encore la notion de nappe géométrique est un simple procédé d'exposition. A partir de la C^k-nappe paramétrée (D, F) et de son point régulier $M(u_0, v_0)$ on peut introduire le plan vectoriel $\mathrm{Im}\, dF(u_0, v_0)$ et le plan affine $m_0 + \mathrm{Im}\, dF(u_0, v_0)$, que l'on note $T(\sigma;\ M(u_0, v_0))$ et $\mathscr{T}(\sigma;\ M(u_0, v_0))$, et montrer qu'il s'agit d'éléments C^k-invariants du couple $(\sigma;\ M(u_0, v_0))$, on dit que *$\mathscr{T}(\sigma;\ M(u_0, v_0))$ est le plan tangent à σ en $M(u_0, v_0)$.*
Toute la suite du 3.1.*2* s'interprète aisément en termes de nappes et d'arcs paramétrés.

• ***Équation du plan tangent.*** Avec les notations du théorème précédent, soit $\mathcal{R} = (O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un repère de $\mathcal{E}$ dans lequel $F : D \to \mathcal{E}$ s'écrit :

$$(u, v) \longmapsto O + f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}.$$

M_0 étant un point régulier de Σ, le plan tangent $\mathcal{T}(\Sigma; M_0)$, ensemble des points $m = O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ de $\mathcal{E}$ tels que le système $(\overrightarrow{m_0m},\ F'_u(u_0, v_0),\ F'_v(u_0, v_0))$ soit lié, admet pour équation cartésienne :

$$\begin{vmatrix} x - f(u_0, v_0) & f'_u(u_0, v_0) & f'_v(u_0, v_0) \\ y - g(u_0, v_0) & g'_u(u_0, v_0) & g'_v(u_0, v_0) \\ z - h(u_0, v_0) & h'_u(u_0, v_0) & h'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Si Σ est représentée par l'*équation cartésienne* $z = f(x, y)$, i.e. par (F, D) avec :

$$F : (x, y) \longmapsto O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$$

on sait que tout point de Σ est régulier, et on constate aisément que l'équation précédente s'écrit :

$$z - f(x_0, y_0) = (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0).$$

2° ***Interprétation des tangentes à*** Σ ***en*** M_0. — *a*) Commençons par introduire la notion d'*arc tracé sur une nappe*. Posons :

DÉFINITION I. — **Soit Σ une nappe géométrique de $\mathcal{E}$ définie par une paramétrisation (D, F). A tout arc géométrique γ de $\mathbb{R}^2$ à support dans D, on associe (1.2.2, 5°) l'arc géométrique $\Gamma = F \circ \gamma$ de $\mathcal{E}$, dont une paramétrisation est $(I, F \circ f)$ lorsque (I, f) en est une de γ; on dit que Γ, dont le support est inclus dans celui de Σ, est un** *arc tracé sur* Σ.

Cette définition ne dépend qu'en apparence du choix de (D, F). En effet si (Δ, G) est une autre paramétrisation de Σ, avec $G = F \circ \theta$, on a $\Gamma = G \circ \gamma'$ où γ' est l'arc géométrique de $\mathbb{R}^2$, à support dans Δ, qui est représenté par $(I, \theta^{-1} \circ f)$ lorsque γ l'est par (I, f).

REMARQUES. — *a*) Si Σ et γ sont de classes respectives k et k', alors Γ est de classe $\min(k, k')$.
b) Si Σ et γ sont simples, alors Γ est simple (par composition d'injections).

EXEMPLE. — Σ étant encore définie par (D, F), soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des points du support de Σ en lesquels les paramètres u et v sont liés par une relation $\varphi(u, v) = 0$ où φ est une application de classe $C^{k'}$ $(k' \geqslant 1)$ de D dans $\mathbb{R}$.

D'après 1.5, la courbe de $\mathbb{R}^2$ définie implicitement par $\varphi(u, v) = 0$ est (au moins si $d\varphi$ ne s'annule pas) la réunion de support d'arcs géométriques. En passant de chacun de ces arcs, γ, à $F \circ \gamma$, on en déduit que $\mathcal{L}$ est la réunion des supports d'arcs tracés sur Σ.

DÉFINITION II. — **Les notations étant celles de la définition I, on dit que Γ** *passe par le point* M_0 *de* Σ, **ou que** *le point* M_0 *de* Σ *appartient à* Γ **si, et seulement s'il existe $t_0 \in I$ tel que $(D, F, f(t_0))$ soit un représentant de M_0. Dans**

ce contexte, on identifie le point M_0 de Σ et le point de Γ dont un représentant est $(I, F \circ f, t_0)$.

b) En utilisant :

$$(F \circ f)'(t_0) = \mathrm{d}F(f(t_0)).f'(t_0), \tag{1}$$

on peut alors énoncer, avec les notations de la définition II :

PROPOSITION I. — **Si $f'(t_0) \neq 0$ et si le point M_0 de Σ est régulier, alors le point M_0 de Γ est régulier, et $\mathscr{T}(\Gamma ; M_0)$ est une tangente à Σ en M_0.**

Remarquons que, dans la pratique, si on note $f : t \longmapsto (u(t), v(t))$, avec $u(t_0) = u_0$ et $v(t_0) = v_0$, alors :

$$(F \circ f)'(t_0) = F'_u(u_0, v_0)\ u'(t_0) + F'_v(u_0, v_0)\ v'(t_0).$$

EXEMPLE. — Soient Σ une C^k-nappe géométrique, et M_0 un point régulier de Σ représenté par $(D, F, (u_0, v_0))$. A tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0, 0)\}$, on associe :

$$f_{\alpha,\beta} : \quad I_{\alpha,\beta} \to \mathbb{R}^2 \qquad t \longmapsto (u_0 + \alpha t,\ v_0 + \beta t)$$

où $I_{\alpha,\beta} \in \mathscr{V}_{\mathbb{R}}(0)$ est un intervalle ouvert assez petit pour que $f_{\alpha,\beta}(I_{\alpha\beta})$, qui est un intervalle ouvert (contenant (u_0, v_0)) d'une droite de $\mathbb{R}^2$, soit inclus dans D. On obtient ainsi l'arc $\gamma_{\alpha,\beta}$ de $\mathbb{R}^2$ à support dans D, et l'arc $\Gamma_{\alpha,\beta} = F \circ \gamma_{\alpha,\beta}$, tracé sur Σ et passant par M_0, puisque $(u_0, v_0) = f_{\alpha,\beta}(0)$. Comme $f'_{\alpha,\beta}(0)$ est non nul, $\Gamma_{\alpha,\beta}$ admet en M_0 la tangente :

$$m_0 + \mathbb{R}(\alpha F'_u(u_0, v_0) + \beta F'_v(u_0, v_0))$$

qui est ainsi une tangente à Σ en M_0, et qui d'ailleurs engendre le plan tangent à Σ en M_0 lorsque (α, β) décrit $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

En particulier $\Gamma_{1,0}$ et $\Gamma_{0,1}$ sont des arcs tracés sur Γ qui passent par M_0 et admettent en M_0 des tangentes respectivement dirigées par $F'_u(u_0, v_0)$ et $F'_v(u_0, v_0)$; on les appelle *lignes coordonnées* de Σ passant par M_0 (elles dépendent du choix de la paramétrisation (D, F) de Σ).

Au passage, nous avons démontré une réciproque de la proposition I qui s'énonce ainsi :

PROPOSITION II. — **Soit M_0 un point régulier d'une nappe géométrique Σ. A toute tangente $\mathscr{D}$ à Σ en M_0, on peut associer un arc tracé sur Σ qui admet $\mathscr{D}$ pour tangente en M_0.**

REMARQUE. — La proposition I s'applique, en particulier, dans le cas où le support de l'arc Γ tracé sur Σ est un intervalle (d'intérieur non vide) d'une droite $\mathscr{G}$ contenue dans le support $\mathscr{S}$ de Σ ; ici $\mathscr{T}(\Gamma ; M_0)$ est $\mathscr{G}$, qui est ainsi contenue dans le plan tangent à Σ en M_0.

3° ***Orientation du plan tangent à Σ en M_0.*** — Soient

$$(D, F, (u_0, v_0)) \text{ et } (\Delta, G, (\lambda_0, \mu_0))$$

deux représentants du point régulier M_0 de Σ, liés par $G = F \circ \theta$ avec $\theta \in \mathrm{Diff}^k(\Delta, D)$; on note $\theta = (\varphi, \psi)$. On a :

$$G'_\lambda = \varphi'_\lambda . (F'_u \circ \theta) + \psi'_\lambda . (F'_v \circ \theta) ;$$
$$G'_\mu = \varphi'_\mu . (F'_u \circ \theta) + \psi'_\mu . (F'_v \circ \theta)$$

On constate que la matrice jacobienne de θ au point (λ_0, μ_0) est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_{F_0}$ de $T(\Sigma; M_0)$ à la base $\mathscr{B}_{G_0}$ de $T(\Sigma; M_0)$, avec :

$$\mathscr{B}_{F_0} = (F'_u(u_0, v_0),\ F'_v(u_0, v_0));$$
$$\mathscr{B}_{G_0} = (G'_\lambda(\lambda_0, \mu_0), G'_\mu(\lambda_0, \mu_0)).$$

Ces deux bases représentent donc la même orientation du plan tangent en M_0 à Σ si, et seulement si $\theta \in \mathrm{Diff}^k_+(\Delta, D)$.

Dans le cas où Σ est une nappe orientée cette condition est toujours remplie, et on dispose d'une *orientation « intrinsèque »* de $\mathscr{T}(\Sigma; M_0)$ (i.e. représentée par $\mathscr{B}_{F_0}$ pour tout représentant $(D, F, (u_0, v_0))$ de M_0).

Dans le cas où Σ est une nappe orientable, on convient de qualifier de *directe* l'orientation de $\mathscr{T}(\Sigma; M_0)$ représentée par $\mathscr{B}_{F_0}$, où (D, F) est l'une quelconque des paramétrisations directes de Σ.

Cas où $\mathscr{E}$ est euclidien et orienté. — On dispose alors de la *normale* à Σ au point régulier M_0 d'image m_0 ; c'est la droite affine $\mathscr{N}(\Sigma; M_0)$ orthogonale en m_0 au plan tangent à Γ en M_0. On constate que $(F'_u \wedge F'_v)(u_0, v_0)$ représente l'orientation de $\mathscr{N}(\Sigma; M_0)$ qui concorde (au sens de II.**2**.3.*1*, 2°) avec l'orientation de $\mathscr{T}(\Sigma; M_0)$ représentée par $\mathscr{B}_{F_0}$. On peut d'ailleurs retrouver ce résultat en constatant que :

$$G'_\lambda \wedge G'_\mu = j_\theta \cdot (F'_u \circ \theta) \wedge (F'_v \circ \theta),$$

où j_θ est le jacobien de θ.

4° ***Une propriété caractéristique du plan tangent.*** — PROPOSITION. — **Soient Σ une nappe géométrique de $\mathscr{E}$, et M_0 un point régulier de Σ, d'image m_0, de représentant $(D, F, \mathbf{u}_0)$, où $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0)$. Pour qu'un plan affine $\mathscr{P}$ de $\mathscr{E}$ soit le plan tangent $\mathscr{T} = \mathscr{T}(\Sigma; M_0)$, il faut et il suffit que, en notant $(u, v) = \mathbf{u}$, on ait, pour toute distance d de la norme :**

i) Au voisinage de $\mathbf{u}_0$, $\quad d(F(\mathbf{u}), \mathscr{P}) = o(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|) \qquad (1)$

— Comme au 1.2.*2*, 4° (proposition I), on montre que le choix de d est indifférent, et que l'on peut utiliser une distance euclidienne ; on peut en outre supposer que la norme de $\mathbb{R}^2$ est euclidienne.

— Considérons un plan $\mathscr{P} = g^{-1}(0)$, où g est une forme affine sur $\mathscr{E}$, de partie linéaire $l \in E^* \setminus \{0\}$. Nous pouvons nous limiter à $g(m_0) = 0$, i.e. $m_0 \in \mathscr{P}$, sans quoi d'une part nous aurions $\mathscr{P} \neq \mathscr{T}$, et d'autre part l'assertion i) serait fausse.

La distance de $m \in \mathscr{E}$ à $\mathscr{P}$ étant proportionnelle à $g(m)$, étudions :

$$\begin{aligned} g(F(\mathbf{u})) &= l.(F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{u}_0)) \\ &= l.(\mathrm{d}F(\mathbf{u}_0).(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + o(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|) \end{aligned}$$

Posons :

$$l.F'_u(\mathbf{u}_0) = a, \qquad l.F'_v(\mathbf{u}_0) = b$$

et :

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}_0 = (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta), \qquad \text{avec} \qquad \rho \geqslant 0.$$

Il vient :

$$g(F(\mathbf{u})) = (a\cos\theta + b\sin\theta)\rho + o(\rho) \qquad (2)$$

Si $\mathscr{P} = \mathscr{T}$, alors $(a, b) = (0, 0)$, et i) est vraie.

Si $\mathscr{P} \neq \mathscr{T}$, alors $a\cos\theta + b\sin\theta = c\cos(\theta - \alpha)$, $c \neq 0$; il existe des restrictions de $g \circ F$ semblables à $\mathbf{u} \longmapsto \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|$; i) est fausse. □

3.1.3. Problèmes d'intersection

1° *Cas de deux nappes.*— THÉORÈME. — **Pour tout $i \in \mathbb{N}_2$, on désigne par Σ_i une C^k-nappe géométrique de $\mathscr{E}$ ($k \geqslant 1$), par $\mathscr{S}_i$ le support de Σ_i, par M_i un point régulier de Σ_i et par $\mathscr{T}_i$ le plan tangent à Σ_i en M_i. On suppose que M_1 et M_2 ont une image commune m_0, et que $\mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$ est une droite $\mathscr{D}_0$ (contenant m_0).**

Alors il existe deux sous-nappes plongées Σ'_1 de Σ_1 et Σ'_2 de Σ_2 dont les supports ont pour intersection le support d'un C^k-arc géométrique plongé qui admet $\mathscr{D}_0$ pour tangente en son point d'image m_0.

Soit $(m_0\,;\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})$ un repère de $\mathscr{E}$ tel que $\mathbf{k}$ n'appartienne à la direction d'aucun des $\mathscr{T}_i$. D'après le théorème I du **3.1.1**, 2°, nous pouvons supposer (quitte à remplacer Σ_1 et Σ_2 par des sous-nappes (plongées) convenablement choisies) que, pour tout $i \in \mathbb{N}_2$, Σ_i admet un paramétrage cartésien de la forme $z = f_i(x, y)$, où f_i est définie sur un ouvert W de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0, 0)$, de classe C^k et, naturellement, telle que $f_i(0, 0) = 0$.

La projection c de $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2$ sur $(m_0\,; \mathbf{i}, \mathbf{j})$, parallèlement à $\mathbb{R}\mathbf{k}$, admet l'équation $h(x, y) = 0$, où $h = f_1 - f_2$ est de classe C^1 sur W, telle que $h(0, 0) = 0$. Le plan tangent $\mathscr{T}_i$ admettant l'équation :

$$z = x \frac{\partial f_i}{\partial x}(0, 0) + y \frac{\partial f_i}{\partial y}(0, 0),$$

la condition $\mathscr{T}_1 \neq \mathscr{T}_2$ implique $\mathrm{d}h(0, 0) \neq 0$. D'après **1.5.2**, il existe donc un ouvert $\mathscr{V}$ du plan $(m_0\,; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ contenant m_0 tel que $\mathscr{V} \cap c$ soit le support d'un C^k-arc géométrique plongé γ dont la tangente en m_0, d'équation :

$$xh'_x(0, 0) + yh'_y(0, 0) = 0$$

n'est autre que la projection de $\mathscr{D}_0$ sur $(m_0\,; \mathbf{i}, \mathbf{j})$. Soit :

$$(I, t \longmapsto m_0 + \xi(t)\mathbf{i} + \eta(t)\mathbf{j})$$

un représentant de γ.

En désignant par Σ'_i la sous-nappe de Σ_i qui se projette en $\mathscr{V}$ sur $(m_0\,; \mathbf{i}, \mathbf{j})$, nous constatons que $\operatorname{supp} \Sigma'_1 \cap \operatorname{supp} \Sigma'_2$ est le support du C^k-arc géométrique Γ de $\mathscr{E}$ représenté par :

$$(I, t \longmapsto m_0 + \xi(t)\mathbf{i} + \eta(t)\mathbf{j} + f_1(\xi(t), \eta(t))\mathbf{k})$$

Γ est plongé, de classe C^k; on vérifie que sa tangente au point d'image m_0 est $\mathscr{D}_0$.

REMARQUE. — L'étude s'applique à l'intersection du support d'une C^k-nappe et d'un plan non tangent (celui-ci pouvant être considéré comme le support d'une C^∞-nappe).

2° *Position du support d'une nappe par rapport à un plan tangent.* — Soient Σ une C^k-nappe géométrique de $\mathscr{E}$ de support $\mathscr{S}$ ($k \geqslant 2$), M_0 un point régulier de Σ, d'image m_0, et $\mathscr{T}_0$ le plan tangent à Σ en M_0. Choisissons un repère $(m_0; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ tel que $\mathscr{T}_0$ soit le plan $(m_0; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ d'équation $z = 0$; $\mathbf{k}$ n'appartenant pas à la direction de $\mathscr{T}_0$, nous constatons que le théorème I du **3**.1.*1*, 2° s'applique. Nous pouvons donc supposer (quitte à remplacer Σ par une sous-nappe) que Σ admet un paramétrage cartésien de la forme $z = f(x, y)$, où f est définie sur un voisinage W de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0, 0)$, de classe C^k, et, cf. **3**.1.*2*, 1° *in fine*, telle que :

$$f(0, 0) = 0; \qquad f'_x(0, 0) = 0; \qquad f'_y(0, 0) = 0.$$

Posons :

$$f''_{x^2}(0, 0) = r; \qquad f''_{xy}(0, 0) = s; \qquad f''_{y^2}(0, 0) = t.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, nous désignons par $\mathscr{P}_\lambda$ le plan (parallèle à $\mathscr{T}_0$) d'équation $z = \lambda$; nous notons $\mathscr{C}_\lambda = \mathscr{S} \cap \mathscr{P}_\lambda$ et c_λ la projection de $\mathscr{C}_\lambda$ sur $\mathscr{T}_0$, parallèlement à $\mathbb{R}\mathbf{k}$.

D'où la discussion, que nous limitons au cas où la forme quadratique Ψ : $(\xi, \eta) \mapsto r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2$ est non nulle (cf. III.**8**.3.*3*, 4°).

1er Cas : Φ *est définie positive* (resp. *négative*) *i.e.* $rt - s^2 > 0$ *et* $r > 0$ (resp. $r < 0$). — L'application f admet un minimum (resp. maximum) relatif strict en $(0, 0)$. Au voisinage de m_0, $\mathscr{S}$ est « au-dessus » (resp. « au-dessous ») du plan tangent $\mathscr{T}_0$, et strictement si l'on excepte m_0. Pour $|\lambda|$ assez petit, c_λ, et aussi (par translation) $\mathscr{C}_\lambda$ est localement homéomorphe à la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation :

$$X^2 + Y^2 = \lambda \text{ (resp. } -X^2 - Y^2 = \lambda),$$

ainsi que nous l'avons montré au **1**.5.*3*, 3° *in fine*. En particulier, pour $\lambda = 0$, $\mathscr{S} \cap \mathscr{T}_0 = \{m_0\}$. On dit que M_0 est un *point elliptique* de Σ, et que $\mathscr{S}$ présente en m_0 une disposition *en ballon*, (cf. fig. 44) (resp. fig. 45).

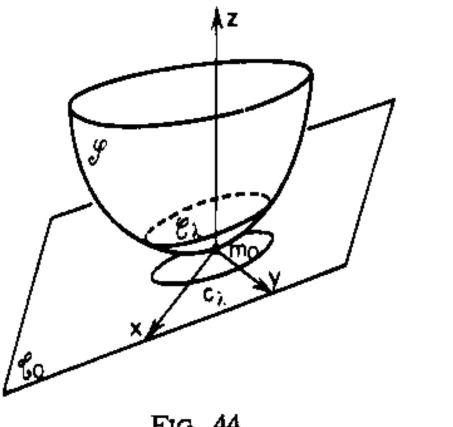


Fig. 44.

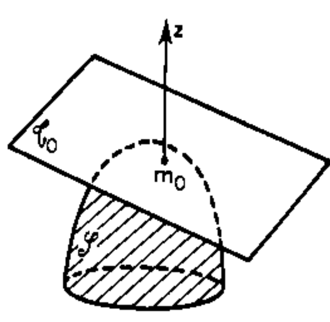


Fig. 45.

2e Cas : Φ *est non dégénérée et non définie, i.e.* $rt - s^2 < 0$. — Ici f n'admet pas d'extremum en (0, 0). Au voisinage de m_0, $\mathcal{S}$ traverse le plan tangent $\mathcal{T}_0$; c_λ, et aussi $\mathcal{C}_\lambda$ est localement homéomorphe à la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation $X^2 - Y^2 = \lambda$. En particulier, $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}_0$ est, au voisinage de m_0, la réunion des supports de deux C^{k-1}-arcs plongés admettant des tangentes distinctes au point m_0; les directions de ces tangentes sont dites *directions asymptotiques* de Σ en M_0. On dit que M_0 est un point *hyperbolique* de Σ, et que $\mathcal{S}$ présente en m_0 une disposition *en col* (fig. 46). Sur les figures 45 et 46, on a hachuré les régions correspondant à $\lambda < 0$.

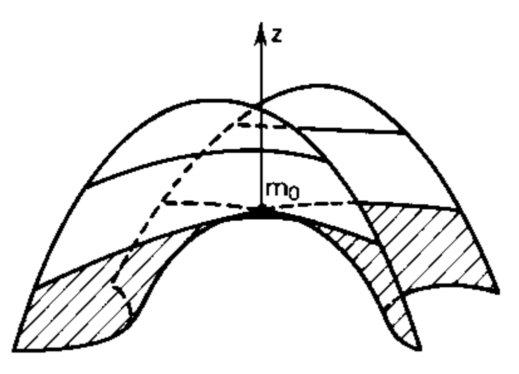


Fig. 46.

3e Cas : Φ *est dégénérée, i.e.* $rt - s^2 = 0$. — On dit que M_0 est un point *parabolique* de Σ. Nous ne ferons aucune étude générale dans ce cas, qui se présente, en particulier, en tous les points non stationnaires d'une surface développable (**3**.2.*3*).

Remarque. — Le choix du repère n'intervient qu'en apparence. A titre d'exercice, le lecteur vérifiera en effet que si $(O'; \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ est un repère dans lequel Σ admet un paramétrage cartésien de la forme $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$, et si m_0 s'écrit $O' + \xi_0\mathbf{i}' + \eta_0\mathbf{j}' + \zeta_0\mathbf{k}'$, avec $\zeta_0 = \varphi(\xi_0, \eta_0)$ alors :

$$\operatorname{sgn}\left[\varphi''_{\xi^2}(\xi_0, \eta_0) \cdot \varphi''_{\eta^2}(\xi_0, \eta_0) - (\varphi''_{\xi\eta}(\xi_0, \eta_0))^2\right] = \operatorname{sgn}(rt - s^2).$$

3° ***Intersection des supports de deux nappes au voisinage d'un point de contact.*** — Pour tout $i \in \mathbb{N}_2$, on désigne par Σ_i une C^k-nappe géométrique de $\mathcal{E}$ $(k \geqslant 2)$, par $\mathcal{S}_i$ le support de Σ_i, par M_i un point régulier de Σ_i. On suppose que M_1 et M_2 ont une image commune m_0 et qu'il existe un plan tangent commun $\mathcal{T}_0$, à Σ_1 en M_1 et à Σ_2 en M_2.

Choisissons un repère $(m_0; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ tel que $\mathcal{T}_0$ soit le plan $(m_0; \mathbf{i}, \mathbf{j})$. Nous pouvons supposer (quitte à la remplacer par une sous-nappe) que Σ_i admet un paramétrage $z = f_i(x, y)$, où f_i est défini sur un ouvert W de $\mathbb{R}^2$ contenant (0, 0), de classe C^k, telle que :

$$f_i(0, 0) = 0; \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x}(0, 0) = 0; \qquad \frac{\partial f_i}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Nous constatons que $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ se projette sur $(m_0; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ parallèlement à $\mathbb{R}\mathbf{k}$, suivant l'intersection de la nappe de représentant cartésien $z = (f_1 - f_2)(x, y)$

et de $\mathscr{T}_0$ qui n'est autre que le plan tangent en m_0 à cette nappe. La discussion fait intervenir le signe de :

$$\delta = f''_{x^2}(0,0) \cdot f''_{y^2}(0,0) - (f''_{x,y}(0,0))^2, \quad \text{où} \quad f = f_1 - f_2.$$

On déduit du 2° que, au voisinage de m_0, $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2$ est *en général :*

– si $\delta > 0$: réduite à $\{m_0\}$;

– si $\delta < 0$: la réunion des supports de deux C^k-arcs géométriques plongés dont les tangentes au point d'image m_0 sont distinctes.

3.2. NOTIONS SUR LES NAPPES RÉGLÉES

Les définitions et les résultats du **3.2** *s'interprètent aisément en termes de nappes paramétrées réglées.*

3.2.1. Généralités ; exemples

1° DÉFINITION. – **Une C^k-nappe géométrique Σ de $\mathscr{E}$ ($k \geqslant 1$), de support $\mathscr{S}$, est dite *réglée* si, et seulement si elle admet une paramétrisation de la forme $(I \times \mathbb{R}, F)$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et où F s'écrit :**

$$(u, v) \longmapsto F(u, v) = f(u) + v\mathbf{g}(u) \qquad (1)$$

avec $f : I \to \mathscr{E}$ et $\mathbf{g} : I \to E\backslash\{0\}$, toutes deux de classe C^k.

Pour la paramétrisation $(I \times \mathbb{R}, F)$, les lignes coordonnées du point $M(u_0, v_0)$ de Σ sont :

– le C^k-arc géométrique G_{u_0} dont une paramétrisation est

$$(\mathbb{R}, v \longmapsto f(u_0) + v\mathbf{g}(u_0)),$$

et dont le support est une droite affine $\mathscr{G}_{u_0}$ de $\mathscr{E}$. Le support $\mathscr{S}$ de Σ s'écrivant $\bigcup_{u \in I} \mathscr{G}_u$, on dit que $(\mathscr{G}_u)_{u \in I}$ et $(G_u)_{u \in I}$ sont des *familles de génératrices* (*rectilignes*) de $\mathscr{S}$ et Σ respectivement ;

– le C^k-arc géométrique C_{v_0} dont une paramétrisation est

$$(I, u \longmapsto f(u) + v_0\mathbf{g}(u)) ;$$

son support est noté $\mathscr{C}_{v_0}$. On dit que $(\mathscr{C}_v)_{v \in \mathbb{R}}$ et $(C_v)_{v \in \mathbb{R}}$ sont des *familles de directrices* de $\mathscr{S}$ et Σ respectivement.

REMARQUES. — *a*) Ayant arbitrairement choisi $\alpha : I \to \mathbb{R}$ et $\beta : I \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, de classe C^k, écrivons :

$$F(u, v) = f(u) + \alpha(u)\mathbf{g}(u) + \frac{v - \alpha(u)}{\beta(u)}\,\beta(u)\mathbf{g}(u)$$

et remarquons que $(u, v) \longmapsto (u, (v - \alpha(u))/\beta(u))$ détermine un C^k-difféomorphisme de $I \times \mathbb{R}$ sur lui-même noté θ^{-1}. Il en résulte qu'une autre paramétrisation de la forme (1) de Σ est $(I \times \mathbb{R},\ F_1 = F \circ \theta)$, avec :

$$F_1(\lambda, \mu) = f_1(\lambda) + \mu \mathbf{g}_1(\lambda), \qquad \text{où} \qquad f_1 = f + \alpha\mathbf{g} \qquad \text{et} \qquad g_1 = \beta\mathbf{g}.$$

Les lignes coordonnées pour la seconde paramétrisation étant notées G'_λ et C'_μ, on constate que, pour tout $u \in I$, $G_u = G'_u$ et donc $\mathscr{G}_u = \mathscr{G}'_u$: *les familles de génératrices n'ont pas changé.*

b) Inversement, le lecteur pourra être amené, dans l'étude d'un cas particulier, à rechercher si, étant donné un C^k-arc tracé sur Σ dont le support rencontre toutes les génératrices $\mathscr{G}_u$, celui-ci peut être adopté (en jouant sur α) comme directrice (relative aux G_u).

c) On peut (en jouant sur β), se ramener au cas où l'application $\|\mathbf{g}\|$ est constante.

d) On peut avoir à rechercher des nappes réglées dont le support est de la forme $\bigcup_{u \in I} \mathscr{D}_u$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et où les $\mathscr{D}_u$ sont des droites données de $\mathscr{E}$. Ce problème peut, bien sûr, ne pas avoir de solution (penser au cas où les $\mathscr{D}_u$ distinctes seraient en nombre fini).

• $M(u, v)$ désignant abréviativement le point de Σ représenté par $(I \times \mathbb{R}, F, (u, v))$, l'existence du plan tangent à Σ en $M(u, v)$, qui sera discutée au 2°, équivaut à :

$$\operatorname{rg}\,(F'_u(u, v),\ F'_v(u, v)) = 2 \tag{2}$$

avec ici :

$$F'_u(u, v) = f'(u) + v\mathbf{g}'(u) \qquad \text{et} \qquad F'_v(u, v) = \mathbf{g}(u).$$

Il en résulte que, lorsqu'il existe, ce plan contient la génératrice $\mathscr{G}_u$.

— Étudions d'abord quelques nappes réglées particulières.

2° ***Nappe cylindrique.*** — C'est le cas où, dans (1), $\mathbf{g}$ prend ses valeurs (non nulles) dans une droite vectorielle fixe $\mathbb{R}\mathbf{k}$, $(\mathbf{k} \in E\backslash\{0\})$, ce qui (cf. remarque *c*) du 1°) permet de se ramener au cas où F s'écrit : $(u, v) \longmapsto f(u) + v\mathbf{k}$. $\mathscr{S}$ est ici le cylindre dont $\mathbb{R}\mathbf{k}$ est une direction de génératrices, et dont toute $\mathscr{C}_v$, $v \in \mathbb{R}$, est un ensemble directeur (relatif à $\mathbb{R}\mathbf{k}$).

Pour tout $u \in I$, $\mathbf{g}(u)$ et $\mathbf{g}'(u)$ sont colinéaires à $\mathbf{k}$, et (2) se traduit par : $f'(u)$ *n'est pas colinéaire à* $\mathbf{k}$. Si cette condition est remplie par $u_0 \in I$, alors, pour tout v, on dispose du plan tangent à Σ en $M(u_0, v)$, et celui-ci est $\mathscr{G}_{u_0} + \mathbb{R}f'(u_0)$; il est déterminé par $\mathscr{G}_{u_0}$ et par la tangente à l'une quelconque des directrices, C_0 par exemple au point $M(u_0, 0)$; il est invariant lorsque, u_0 étant fixé, v parcourt $\mathbb{R}$, ce que l'on exprime, par abus de langage, en disant que *le plan tangent à une nappe cylindrique est le même en tous les points d'une génératrice.*

EXEMPLE. — La C^∞-nappe géométrique Σ de $\mathbb{R}^3$ représentée par $(\mathbb{R}^2, F)$, avec :

$$F : (u, v) \longmapsto \left(\frac{-u^2 + 1}{u^2 + 1}, \frac{-u^3 + u}{u^2 + 1}, v\right)$$

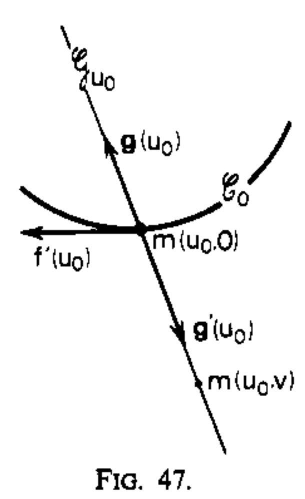


Fig. 47.

est cylindrique : $\mathscr{S}$ est le cylindre de direction de génératrices $\mathbb{R}\mathbf{k}$, dont une base est une strophoïde droite du plan $(O;\ \mathbf{i},\ \mathbf{j})$. En remarquant que $F(u', v') = F(u, v)$ exige $v' = v$, on montre que les seuls points d'ordre géométrique 2 de $\mathscr{S}$ sont ceux de la droite $O + \mathbb{R}\mathbf{k}$. Tout point m_0 de coordonnées $(0, 0, v_0)$ est l'image de deux points $M(-1, v_0)$ et $M(1, v_0)$ de Σ en lesquels les plans tangents admettent les équations respectives $y + x = 0$ et $y - x = 0$.

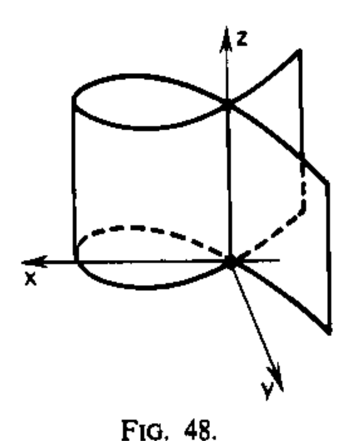


Fig. 48.

Remarque. — *Pour que la C^k-nappe réglée Σ déterminée par* (1) *soit cylindrique il faut et il suffit que, pour tout $u \in I$, $\mathbf{g}'(u)$ soit colinéaire à $\mathbf{g}(u)$.* Cette condition est évidemment nécessaire. Inversement, si elle est remplie, il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall u \in I, \qquad \mathbf{g}'(u) - \varphi(u)\mathbf{g}(u) = 0. \tag{3}$$

En utilisant une projection, on constate que φ est de classe C^{k-1}, et donc continue. En raisonnant comme en IV.5.1.4, 1°, on déduit de (3) :

$$\forall u \in I \qquad \mathbf{g}(u) = \left(\exp\left(\int_{u_0}^{u} \varphi(t)\,dt\right)\right)\mathbf{k}$$

où $u_0 \in I$ est arbitrairement choisi, et où $\mathbf{k} = \mathbf{g}(u_0)$. □

3° *Nappe conique.* — C'est le cas où, dans (1) l'application f est constante, c'est-à-dire le cas où F s'écrit : $(u, v) \longmapsto O + v\mathbf{g}(u)$.

$\mathscr{S}$ est ici le cône dont O est un sommet et dont toute $\mathscr{C}_{v_0}$, $v_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, est un ensemble directeur (relatif à O).

Pour tout $u \in I$, on a $f'(u) = 0$, et (2) s'écrit :

$$\mathrm{rg}\,(v\mathbf{g}'(u),\ \mathbf{g}(u)) = 2.$$

Pour tout $u \in I$, le point $M(u, 0)$ de Σ, d'image O, est stationnaire. Pour $v \neq 0$, $M(u_0, v)$ est régulier si, et seulement si $\mathbf{g}'(u_0)$ n'est pas colinéaire à $\mathbf{g}(u_0)$, qui est non nul; on dispose alors du plan tangent à Σ en $M(u_0, v)$, qui s'écrit $\mathscr{G}_{u_0} + \mathbb{R}\mathbf{g}'(u_0)$; il est déterminé par $\mathscr{G}_{u_0}$ et, par exemple, par la tangente à la directrice C_1 au point $M(u_0, 1)$; il est invariant lorsque, u_0 étant fixé, v décrit $\mathbb{R}\backslash\{0\}$: on dit que *le plan tangent à une surface conique est le même en tous les points* (*distincts du sommet*) *d'une génératrice.*

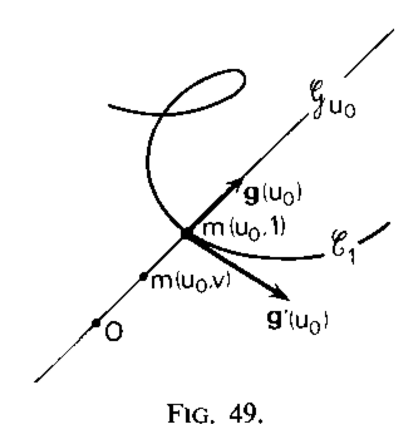


FIG. 49.

REMARQUE. — Les notations étant celles de la définition du 1°, les génératrices $\mathscr{G}_u$ ont un point commun si, et seulement s'il existe une application α (nécessairement de classe C^k) de I dans $\mathbb{R}$ telle que l'application $f + \alpha\mathbf{g}$ soit constante.

Vérification laissée au lecteur. □

4° ***Nappes doublement réglées.*** — EXEMPLE I. — $\mathscr{E}$ étant rapporté à $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, le *paraboloïde hyperbolique* $\mathscr{S}$ d'équation cartésienne $xy = az$, $(a \neq 0)$, est le support de la C^∞-nappe géométrique plongée Σ qui admet les deux paramétrisations du type (1) $(\mathbb{R}^2, F)$ et $(\mathbb{R}^2, G)$, avec :

$$F(u, v) = O + u\mathbf{i} + v(\mathbf{j} + ua^{-1}\mathbf{k})$$
$$G(\lambda, \mu) = O + \lambda\mathbf{j} + \mu(\mathbf{i} + \lambda a^{-1}\mathbf{k})$$

la C^∞-équivalence des nappes paramétrées $(\mathbb{R}^2, F)$ et $(\mathbb{R}^2, G)$ tenant à ce que l'on a $G = F \circ \theta$, avec $\theta(\lambda, \mu) = (\mu, \lambda)$, ce qui entraîne $\theta \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

Les deux paramétrisations fournissent chacune une famille de génératrices de $\mathscr{S}$, que l'on note $(\mathscr{G}_u)_{u \in \mathbb{R}}$ et $(\mathscr{G}'_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$. On vérifie :

α) *Deux génératrices d'une même famille sont non coplanaires* (pour $u \neq u'$, $\mathscr{G}_u$ et $\mathscr{G}_{u'}$ ont des directions distinctes et sont incluses dans les plans parallèles distincts $x = u$ et $x = u'$).

β) *Deux génératrices de familles différentes sont coplanaires et distinctes* ($\mathscr{G}_u$ et $\mathscr{G}'_\lambda$ ont en commun l'unique point $(u, \lambda, a^{-1}u\lambda)$;

γ) *Par tout point de* $\mathscr{S}$ *passe une génératrice de chaque famille* (*unique d'après* α) (le point $(x, y, a^{-1}xy)$ appartient à $\mathscr{G}_x$ et à $\mathscr{G}'_y$).

Il va de soi que *le plan tangent à* Σ *au point* $M(u, v) = M'(\lambda, \mu)$, avec $u = \mu$ et $v = \lambda$, *est le plan déterminé par* $\mathscr{G}_u$ *et* $\mathscr{G}'_\lambda$.

EXEMPLE II. — $\mathscr{E}$ euclidien étant rapporté à $(O\,;\,\mathbf{i},\,\mathbf{j},\,\mathbf{k})$ orthonormal, *l'hyperboloïde à une nappe* $\mathscr{S}$ d'équation cartésienne :

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 - 1 = 0, \qquad (abc \neq 0)$$

est le support de la C^∞-nappe paramétrique Σ qui admet les deux paramétrisations du type (1), $(\mathbb{R}^2, F)$ et $(\mathbb{R}^2, G)$, avec :

$$F(u, v) = O + a(\cos u - v \sin u)\mathbf{i} + b(\sin u + v \cos u)\mathbf{j} + cv\mathbf{k}$$
$$G(\lambda, \mu) = O + a(\cos \lambda + \mu \sin \lambda)\mathbf{i} + b(\sin \lambda - \mu \cos \lambda)\mathbf{j} + c\mu\mathbf{k},$$

la C^∞-équivalence des nappes paramétrées $(\mathbb{R}^2, F)$ et $(\mathbb{R}^2, G)$ tenant à ce que $G = F \circ \theta$, avec θ : $(\lambda, \mu) \longmapsto (\lambda - 2 \operatorname{Arc\,tg} \mu, \mu)$, ce qui entraîne $\theta \in \operatorname{Diff}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

On notera qu'ici Σ est immergée, mais non plongée ; tout point de $\mathscr{S}$ est en effet d'ordre géométrique 1, mais de multiplicité infinie, $M(u, v)$ et $M(u + 2k\pi, v)$ [resp. $M'(\lambda, \mu)$ et $M'(\lambda + 2k\pi, \mu)$] étant confondus pour tout $k \in \mathbb{Z}$; on peut, naturellement, obtenir des sous-nappes plongées de Σ en ne faisant varier u (resp. λ) que dans un intervalle ouvert d'amplitude inférieure à 2π.

Chaque paramétrisation fournit une famille de génératrices de $\mathscr{S}$; on note ces familles $(\mathscr{G}_u)_{u \in [0, 2\pi[}$ et $(\mathscr{G}'_\lambda)_{\lambda \in [0, 2\pi[}$. On vérifie que $\mathscr{G}'_u$ est symétrique de $\mathscr{G}_u$ par rapport au plan $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ et que si $|\lambda - u| = \pi$, alors $\mathscr{G}'_\lambda$ est symétrique de $\mathscr{G}_u$ par rapport à O. On termine l'étude comme dans le cas du paraboloïde hyperbolique.

3.2.2. Plans tangents à une nappe réglée en les points d'une génératrice

Étant donnée la C^k-nappe réglée Σ définie au **3.2.1**, 1°, nous nous proposons de discuter pour $u_0 \in I$ donné et v décrivant $\mathbb{R}$, l'existence du plan tangent à Σ au point $M_0(u_0, v)$ de la génératrice G_{u_0}, existence qui, rappelons-le, équivaut à :

$$\operatorname{rg}(f'(u_0) + v\mathbf{g}'(u_0), \mathbf{g}(u_0)) = 2. \qquad (1)$$

Lorsqu'il existe, le plan tangent appartient à l'ensemble $\mathscr{F}_{u_0}$ (faisceau linéaire) des plans de $\mathscr{E}$ qui contiennent la génératrice $\mathscr{G}_{u_0}$ de $\mathscr{S}$. Nous munissons $\mathscr{F}_{u_0}$ de la topologie induite par celle de la grassmanienne d'ordre 2 de $\mathscr{E}_\Omega$ (**1**.1.4), où $\Omega \in \mathscr{G}_{u_0}$ est arbitrairement choisi.

Rappelons : $\mathbf{g}(u_0) \neq 0$.

• 1er CAS : $(f'(u_0), \mathbf{g}'(u_0), \mathbf{g}(u_0))$ *est une base*, $\mathscr{B}_{u_0}$, *de* E. Pour tout $v \in \mathbb{R}$, $\mathscr{T}(\Sigma\,;\, M(u_0, v))$ existe, et admet $Y = vX$ pour équation dans le repère $(\Omega\,;\,\mathscr{B}_{u_0})$ de $\mathscr{E}$. Soit $\mathscr{A}_{u_0}$ le plan $\mathscr{G}_{u_0} + \mathbb{R}\mathbf{g}'(u_0)$, d'équation $X = 0$. On constate que $v \longmapsto \mathscr{T}(\Sigma\,;\, M(u_0, v))$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathscr{F}_{u_0} \backslash \{\mathscr{A}_{u_0}\}$ et que

$$\mathscr{A}_{u_0} = \lim_{v \to +\infty} \mathscr{T}(\Sigma\,;\, M(u_0, v)).$$

A tout $O \in \mathscr{E}$, associons *la nappe conique asymptotique* Σ_O *de* Σ dont une paramétrisation est $(I \times \mathbb{R}, (u, v) \longmapsto O + v\mathbf{g}(u\ )$; son support $\mathscr{S}_0$ est un cône de sommet O. Nous constatons que, pour tout $u_0 \in I$, les génératrices G_{u_0} et L_{u_0}

de Σ et de Σ_O ont des supports parallèles $\mathscr{G}_{u_0}$ et $\mathscr{L}_{u_0}$ et que le plan $\mathscr{A}_{u_0}$ est parallèle au plan tangent à Σ_O en les points de G_{u_0} (autres que le sommet); nous dirons que $\mathscr{A}_{u_0}$ est le plan asymptotique de Σ, relatif à la génératrice G_{u_0}.

Point central; ligne de striction. — Supposons en outre que $\mathscr{E}$ est euclidien. Il existe alors un unique point de la génératrice G_{u_0} en lequel le plan tangent à Σ est perpendiculaire au plan asymptotique $\mathscr{A}_{u_0}$; on l'appelle *point central* de G_{u_0}; quand u_0 parcourt I, il engendre un arc tracé sur Σ, qui est dit *ligne de striction* relative à la famille de génératrices $(G_u)_{u \in I}$.

EXEMPLE : NAPPES CONOÏDES. — C'est le cas où, avec les notations de **3.2.1**, 1°, la paramétrisation $(I \times \mathbb{R}, (u, v) \longmapsto f(u) + v\mathbf{g}(u))$ est telle que l'arc C_0 représenté par (I, f) ait un support inclus dans une droite affine $\mathscr{D}$ (mais non réduit à un point), et que $\mathbf{g}$ prenne ses valeurs dans un plan vectoriel P qui ne contient pas la direction de $\mathscr{D}$.

Notons que $\mathbf{g}'$ prend aussi ses valeurs dans P et exceptons le cas où $\mathbf{g}'(u)$ serait colinéaire à $\mathbf{g}(u)$ pour tout $u \in I$ (Σ serait une nappe plane). Pour tout $u_0 \in I$, $(f'(u_0), \mathbf{g}'(u_0), \mathbf{g}(u_0))$ est ainsi — en général — une base de E; ici le plan asymptotique $\mathscr{A}_{u_0}$ est le plan de direction P qui contient $\mathscr{G}_{u_0}$; le cône $\mathscr{S}_O$ est inclus dans un plan de direction P.

REMARQUES. — *a*) La nappe réglée Σ dont le support est le paraboloïde hyperbolique $\mathscr{S}$ d'équation $xy = az$ est *doublement conoïde*. Les génératrices $\mathscr{G}_u$ et $\mathscr{G}'_\lambda$ sont respectivement parallèles aux plans directeurs $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations $x = 0$ et $y = 0$; les plans asymptotiques $\mathscr{A}_u$ et $\mathscr{A}'_\lambda$ relatifs à G_u et à G'_λ admettent les équations $x = u$ et $y = \lambda$ (fig. 50); $\mathscr{S}_O$ est $(\mathscr{P} \cup \mathscr{P}')\backslash(O + \mathbb{R}\mathbf{k})$.

b) Reprenons l'hyperboloïde à une nappe d'équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 - 1 = 0$, de centre O; $\mathscr{S}_O$ est le cône d'équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$. Le plan déterminé par les génératrices parallèles $\mathscr{G}_u$ et $\mathscr{G}'_{u+\pi}$ est asymptotique relativement à G_u et aussi à $G'_{u+\pi}$; il est tangent à $\mathscr{S}_O$ en les points (autres que O) de la génératrice L_u (fig. 51). On dit ici que la nappe conique Σ_O est *asymptote à* Σ.

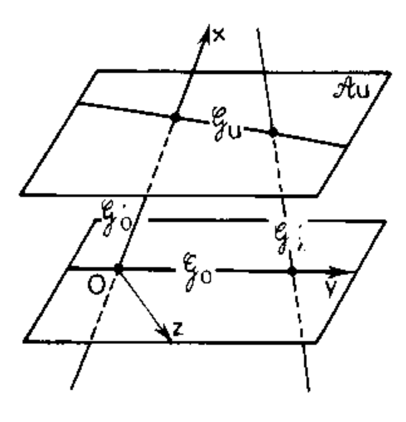


FIG. 50.

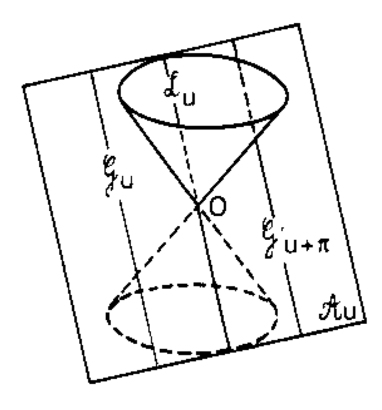


FIG. 51.

• 2ᵉ CAS : $\mathbf{g}'(u_0)$ *est colinéaire à* $\mathbf{g}(u_0)$, $f'(u_0)$ *ne l'est pas.*

En tout point de G_{u_0}, Σ admet le même plan tangent $\mathscr{G}_{u_0} + \mathbb{R}f'(u_0)$, (cf. nappes cylindriques).

• 3ᵉCAS : $\mathbf{g}'(u_0)$ *est non colinéaire à* $\mathbf{g}(u_0)$, *et* $f'(u_0) \in \operatorname{Vect}(\mathbf{g}(u_0), \mathbf{g}'(u_0))$. Une figure (laissée au lecteur) montre que $F'_u(u_0, v) = f'(u_0) + v\mathbf{g}'(u_0)$ n'est colinéaire à $\mathbf{g}(u_0)$ que pour une valeur unique de v, notée v_0; $M(u_0, v_0)$ est un point stationnaire de Σ qui est dit *point caractéristique* de G_{u_0}; en tout point de G_{u_0} distinct de $M(u_0, v_0)$, Σ admet le même plan tangent $\mathscr{G}_{u_0} + \mathbb{R}\mathbf{g}'(u_0)$, (cf. nappes coniques).

• 4[e] CAS : $f'(u)$ et $\mathbf{g}'(u_0)$ *sont colinéaires à* $\mathbf{g}(u_0)$.
Tous les points de G_{u_0} sont stationnaires.

REMARQUE. — La nature « géométrique » des résultats de la discussion montre qu'ils se retrouveraient après un changement de paramétrisation conservant les génératrices G_u ; la remarque *a*) du 3.2.*1*, 1° permet de retrouver cette invariance.

3.2.*3*. Nappes développables

1° DÉFINITION. — **Une C^k-nappe réglée Σ est dite *développable* si, et seulement si, pour tout couple (M, M') de points réguliers distincts appartenant à une même génératrice, les plans tangents à Σ en M et M' sont confondus.**

C'est ainsi qu'*une nappe conique* (resp. *cylindrique*) *est développable*, mais qu'une des nappes doublement réglées étudiées au 3.2.*1*, 4° n'est pas développable.
Une nappe dont le support est contenu dans un plan est développable.
L'étude du 3.2.*2* fournit :

PROPOSITION. — **Soit la C^k-nappe réglée Σ représentée par $(I \times \mathbb{R}, F)$, où**

$$F(u, v) = f(u) + v\mathbf{g}(u)$$

avec $f : I \to \mathscr{E}$ et $\mathbf{g} : I \to E \backslash \{0\}$ de classe C^k. Alors Σ est développable si, et seulement si, pour tout $u \in I$, $(f'(u), \mathbf{g}(u), \mathbf{g}'(u))$ est un système lié.

Nous avons vu (1.6.*3*, 1°) qu'il s'agit là d'une condition nécessaire pour que la famille de droites $(f(u) + \mathbb{R}\mathbf{g}(u))_{u \in I}$ admette une enveloppe ; l'étude qui suit est donc intimement liée à celle du 1.6.*3*, à laquelle le lecteur se rapportera.

2° ***Développable des tangentes à un arc.*** — Soit Γ un C^k-arc géométrique régulier de $\mathscr{E}$ $(k \geqslant 2)$. On constate que, quel que soit le représentant (I, f) de Γ, la nappe paramétrée :

$$(I \times \mathbb{R},\ F : (u, v) \longmapsto f(u) + vf'(u))$$

représente une même nappe géométrique réglée Σ. On a, pour tout $u \in I$:

$$f'(u) \neq 0 \,; \qquad \operatorname{rg}(f'(u), \mathbf{g}'(u), \mathbf{g}(u)) = \operatorname{rg}(f'(u), f''(u)) \leqslant 2$$

La nappe Σ est donc *développable*, et Γ est tracée sur Σ.
— Pour tout $u_0 \in I$, la génératrice $\mathscr{G}_{u_0} = f(u_0) + \mathbb{R}f'(u_0)$ de $\mathscr{S} = \operatorname{supp} \Sigma$ est la tangente à Γ au point représenté par (I, f, u_0) que nous avons identifié au point $M(u_0, 0)$ de Σ. Γ *est ainsi l'enveloppe de la famille de droites* $(\mathscr{G}_u)_{u \in I}$.
— Le point $M(u_0, v)$ de Σ est régulier si, et seulement si : $\operatorname{rg}(vf''(u), f'(u)) = 2$. Il en résulte que Γ *est un arc de points stationnaires de* Σ, et que, pour $v \neq 0$, le point $M(u_0, v)$ de Σ est régulier si, et seulement si le point $M(u_0, 0)$ de Γ est bi-régulier, et alors *le plan tangent à* Σ *en* $M(u_0, v)$ *est le plan osculateur à* Γ *en* $M(u_0, 0)$.
— Considérons maintenant l'un quelconque, C, des arcs géométriques de $\mathscr{E}$ tracés sur Σ et passant par $M(u_0, 0)$. Soit (J, h), avec $h(t) = F(u(t), v(t))$ et $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = 0$, un représentant de C. Compte tenu de $v(t_0) = 0$, on a :

$$h'(t_0) = (u'(t_0) + v'(t_0))f'(u(t_0)), \qquad (f'(u(t_0)) = f'(u_0)).$$

Considéré comme point de C, $M(u_0, 0)$ est ainsi régulier si, et seulement si $u'(t_0) + v'(t_0) \neq 0$, ce qui a lieu en général ; C admet alors, comme Γ, $\mathscr{G}_{u_0}$ pour tangente en $M(u_0, 0)$. Dans le cas où $u'(t_0) + v'(t_0) = 0$, le lecteur constatera en calculant $h''(t_0)$ qu'en général C admet au point

stationnaire $M(u_0, 0)$ une tangente incluse dans le plan osculateur à Γ en $M(u_0, 0)$, dans la mesure, naturellement où celui-ci existe.

La première partie conduit à dire que Σ *est la développable des tangentes à* Γ, la seconde à dire que Γ est l'*arête de rebroussement* de Σ.

3° ***Étude d'une réciproque***. — Reprenons la nappe géométrique réglée Σ de la proposition du 1°, en éliminant tout d'abord le cas où $\mathbf{g}'(u)$ est colinéaire à $\mathbf{g}(u)$ pour tout $u \in I$ (Σ est alors une nappe cylindrique).

Limitons-nous même au cas où $\mathbf{g}'(u)$ *n'est colinéaire à* $\mathbf{g}(u)$ *pour aucun* $u \in I$. Cette hypothèse implique (d'après $\operatorname{rg}(f'(u), \mathbf{g}'(u), \mathbf{g}(u)) \leqslant 2$) :

$$\forall u \in I \quad f'(u) \in \operatorname{Vect}(\mathbf{g}'(u), \mathbf{g}(u)), \qquad \text{(qui est un plan de } E).$$

Il existe donc deux applications φ et ψ de I dans R telles que $f' = \varphi\mathbf{g} + \psi\mathbf{g}'$; en utilisant des projections on constate qu'elles sont de classe C^{k-1}.

Pour $u_0 \in I$ donné, le point $M(u_0, v)$ de Σ n'est stationnaire que si $v = -\psi(u_0)$, ce qui conduit à introduire le C^{k-1}-arc géométrique Γ_1, tracé sur Σ, et représenté par (I, f_1), avec $f_1(u) = f(u) - \psi(u)\mathbf{g}(u)$. On calcule :

$$f_1'(u) = (\varphi(u) - \psi'(u))\mathbf{g}(u).$$

Éliminons le cas où $\varphi = \psi'$ (alors, d'après une remarque du 3.2.*1*, 2°, la nappe Σ est conique). *Supposons même* (ce qui est une hypothèse plus forte que $\varphi \neq \psi'$) *que* $\varphi - \psi'$ *ne prend pas la valeur* 0. L'arc Γ_1 est alors régulier. En remarquant que :

$$F(u, v) = f_1(u) + \left(\frac{\psi(u) + v}{\varphi(u) - \psi'(u)}\right) f_1'(u)$$

et en utilisant le C^{k-2} difféomorphisme de $I \times \mathbb{R}$ sur lui-même

$$(u, v) \longmapsto \left(u, \frac{\psi(u) + v}{\varphi(u) - \psi'(u)}\right)$$

nous constatons que les nappes paramétrées $\sigma = (I \times \mathbb{R}, F)$ et $\sigma_1 = (I \times \mathbb{R}, F_1)$, avec $F_1(\lambda, \mu) = f_1(\lambda) + \mu f_1'(\lambda)$ sont C^{k-2}-équivalentes. Or la nappe Σ_1 représentée par σ_1 est la développable des tangentes de Γ_1.

L'identification de Σ et Σ_1 est assurée si Σ est de classe C^∞ ; sinon elle n'est possible qu' « aux classes de différentiabilité près ». De toute façon, on dit que Γ_1 est l'arête de rebroussement de Σ.

EXEMPLE. — *Étude de la C^∞-nappe réglée Σ définie par $(I \times \mathbb{R}, F)$, avec :*

$$F(u, v) = O + p(u)\mathbf{i} + q(u)\mathbf{j} + v(a(u)\mathbf{i} + b(u)\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

où a, b, p, q sont des applications de classe C^∞ de l'intervalle réel I dans $\mathbb{R}$. Ici la directrice C_0 représentée par $(I, u \longmapsto O + p(u)\mathbf{i} + q(u)\mathbf{j})$ a son support inclus dans le plan $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$, et la génératrice $\mathscr{G}_u$ admet le système d'équations cartésiennes :

$$(x = a(u)z + p(u)) \wedge (y = b(u)z + q(u))$$

Σ est développable si, et seulement si (0 désignant l'application nulle de I dans $\mathbb{R}$) :

$$\begin{vmatrix} p' & a' & a \\ q' & b' & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ i.e.} \qquad a'q' - b'p' = 0$$

Supposons que cette condition est remplie, et qu'en outre (a', b') ne prend pas la valeur $(0, 0)$, ce qui garantit que $\mathbf{g}'(u)$ n'est jamais colinéaire à $\mathbf{g}(u)$. Ici $\varphi = 0$, et ψ est déterminé par :

$$\forall u \in I \qquad (\psi(u) = p'(u)/a'(u)) \vee (\psi(u) = q'(u)/b'(u))$$

L'arête de rebroussement Γ_1 admet la paramétrisation (I, f_1), avec :

$$f_1(u) = O + p(u)\mathbf{i} + q(u)\mathbf{j} - \psi(u)(a(u)\mathbf{i} + b(u)\mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

De : $f'_u(u) = -\psi'(u)(a(u)\mathbf{i} + b(u)\mathbf{j} + \mathbf{k})$, on déduit que, si ψ' ne prend pas la valeur 0, alors Γ_1 est l'enveloppe de la famille de droites $(\mathcal{G}_u)_{u \in I}$, d'autre part Σ est la développable des tangentes de Γ_1.

3.3. SOUS-VARIÉTÉS. COURBES ET SURFACES

L'objet du **3.3**, *est de préciser les notions intuitives de* « courbes de $\mathscr{E}_2$ ou de $\mathscr{E}_3$ » *et de* « surfaces de $\mathscr{E}_3$ ». *En particulier nous étudierons les* « surfaces de $\mathscr{E}_3$ définies implicitement » *généralisant ainsi le sous-chapitre* **1.5**. *Les démonstrations pourront être réservées à une seconde lecture.*

3.3.*1*. Notions sur les sous-variétés de $\mathscr{E}_n$

Nous allons généraliser la notion d'arc plongé de $\mathscr{E}_n$ (resp. de nappe plongée de $\mathscr{E}_3$).

Nous considérons dans tout le chapitre un espace affine $(\mathscr{E}, E)$ de dimension finie $n > 0$, dans lequel a été choisi un repère $(O ; \mathbf{e})$, ce qui peut permettre d'identifier $\mathscr{E}$ et $\mathbb{R}^n$; k est un élément de $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, p est un entier tel que $1 \leqslant p \leqslant n$.

Les parties *données* de $\mathscr{E}_n$ et les ouverts *donnés* de $\mathbb{R}^p$ seront considérés comme non vides.

1° Définition I. — **On dit qu'une partie $\mathscr{S}$ de l'espace affine $\mathscr{E}$ en est une** *sous-variété* **de dimension p et de classe C^k si, et seulement si pour tout $a \in \mathscr{S}$ est vérifiée l'assertion :**

$\mathbf{i}_a$) Il existe un plongement de classe C^k d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathscr{E}$ dont l'image est un voisinage ouvert de a dans $\mathscr{S}$ (i.e. l'intersection de $\mathscr{S}$ et d'un ouvert de $\mathscr{E}$ contenant a).

Si $F : U \to \mathscr{E}$ est un tel plongement, on dit que le couple (U, F) est une *paramétrisation locale* **de $\mathscr{S}$ en a.**

L'assertion $\mathbf{i}_a$) s'explicite ainsi : *il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, une application $F : U \to \mathscr{E}$ de classe C^k, et un ouvert $\mathscr{V}$ de $\mathscr{E}$ contenant a tels que :*

- *En tout point de U, F est de rang p;*
- *$F(U) = \mathscr{S} \cap \mathscr{V}$, et F induit un homéomorphisme de U sur $\mathscr{S} \cap \mathscr{V}$.*

REMARQUES. — *a*) On peut toujours se ramener au cas de paramétrisations locales définies sur des domaines, ce que nous ferons systématiquement par la suite.

b) L'image d'un plongement d'un domaine de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathscr{E}$ est une sous-variété connexe de $\mathscr{E}$ qui est dite *plongée*. Il en est ainsi pour l'image de toute paramétrisation locale d'une sous-variété $\mathscr{S}$.

c) Toute partie ouverte (et non vide) d'une sous-variété $\mathscr{S}$ de $\mathscr{E}$ est une sous-variété de $\mathscr{E}$, de même dimension et de même classe que $\mathscr{S}$.

d) Si $\mathscr{S}$ est une sous-variété d'un sous-espace affine de $\mathscr{E}$, alors $\mathscr{S}$ est une sous-variété de $\mathscr{E}$, de même dimension et de même classe.

Les vérifications de *c*) et *d*) sont laissées au lecteur.

e) S'il existe *un* point $a \in \mathscr{S}$ tel que i_a soit vérifiée, on dit seulement que $\mathscr{S}$ est une *sous-variété de $\mathscr{E}$ au voisinage de a*.

CAS PARTICULIER. — Une sous-variété de $\mathscr{E}_n$ de dimension 1 (resp. 2; resp. $n - 1$) est dite *courbe* (1) (resp. *surface*; resp. *hypersurface*). Retenons :

DÉFINITION II. — **On appelle *courbe* de classe C^k de $\mathscr{E}_n$ toute partie $\mathscr{S}$ de $\mathscr{E}_n$ telle que tout point $a \in \mathscr{S}$ admette dans $\mathscr{E}$ un voisinage ouvert dont l'intersection avec $\mathscr{S}$ soit le support d'un C^k-arc géométrique plongé de $\mathscr{E}_n$.**

On appelle *surface* de classe C^k de $\mathscr{E}_3$ toute partie $\mathscr{S}$ de $\mathscr{E}_3$ telle que tout point $a \in \mathscr{S}$ admette dans $\mathscr{E}$ un voisinage ouvert dont l'intersection avec $\mathscr{S}$ soit le support d'une C^k-nappe géométrique plongée de $\mathscr{E}_3$.

On a immédiatement :

PROPOSITION. — **Le support d'un C^k-arc paramétré plongé (2) de $\mathscr{E}_n$ (resp. d'une C^k-nappe paramétrée plongée de $\mathscr{E}_3$) est une courbe (resp. une surface) plongée de classe C^k.**

REMARQUES. — *a*) *F peut être une immersion injective d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathscr{E}$ sans que F(U) soit une sous-variété de $\mathscr{E}$.*

Reprenons l'exemple de la lemniscate $\gamma = (\mathbb{R}, F)$ de $\mathscr{E} = \mathbb{R}^2$ (**1.2.***1*, 1°), avec

$$F(t) = (t/(t^4 + 1),\ t^3/(t^4 + 1)).$$

Pour tout disque ouvert $\mathscr{U} = (O, r)$ de $\mathbb{R}^2$ de rayon $r > 0$ assez petit, on constate que $F^{-1}(\operatorname{supp} \gamma \cap \mathscr{U})$ est la réunion de trois intervalles ouverts deux à deux disjoints de $\mathbb{R}$ (un contient 0, les autres sont de la forme $]-\infty, -c[$ et $]c, +\infty[$). □

b) *La réunion de deux sous-variétés disjointes de dimension p de $\mathscr{E}$, n'est pas nécessairement une sous-variété de dimension p de $\mathscr{E}$.*

Dans l'exemple précédent, les supports $\mathscr{S}_i$ des arcs $\gamma_i = (I_i, F|I_i)$, où $I_1 =]-1, 1[$ et $I_2 =]1, +\infty[$ sont des courbes de $\mathbb{R}^2$, mais $\mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2$ n'en est pas une, bien que $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2 = \varnothing$.

---

(1) Il serait plus correct de préciser : *sous-variété courbe* (resp. *sous-variété surface;* resp. *sous-variété hypersurface*).

(2) A condition qu'il soit défini sur un intervalle ouvert.

2° Proposition. — Une partie $\mathscr{S}$ de $\mathscr{E}$ en est une sous-variété de dimension p et de classe C^k si, et seulement si, pour tout $a \in \mathscr{S}$ est vérifiée l'assertion :

ii$_a$) Il existe une permutation des vecteurs de e, un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ et une application $(\varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_n) : V \to \mathbb{R}^{n-p}$, de classe C^k, tels que l'application :

$$\Phi : V \to \mathscr{E} \qquad (x_1, \ldots, x_p) \longmapsto O + \sum_{i=1}^{p} x_i e_i + \sum_{j=p+1}^{n} \varphi_j(x_1, \ldots, x_p) e_j \qquad (1)$$

ait pour image un voisinage ouvert de a dans $\mathscr{S}$ (i.e. l'intersection de $\mathscr{S}$ et d'un ouvert de $\mathscr{E}$ contenant a).

Si ii$_a$) est vérifiée, le couple (V, Φ) est une paramétrisation locale de $\mathscr{S}$ en a, qui est qualifiée de *cartésienne*.

Preuve de i$_a$ $\Rightarrow$ ii$_a$. — Par hypothèse pour tout $a \in \mathscr{S}$ il existe un plongement F de classe C^k d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathscr{E}$ tels que $F(U)$ soit un ouvert de $\mathscr{S}$ contenant a; F peut s'écrire :

$$\forall \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_p) \in U \qquad F(\mathbf{u}) = O + \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{u}) e_i$$

où les $f_i : U \to \mathbb{R}$ sont de classe C^k.

Soit $\mathbf{u}_0 = F^{-1}(a)$. F étant de rang p au point $\mathbf{u}_0$, nous pouvons supposer, moyennant une permutation des vecteurs de e, que :

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_p)}{D(u_1, \ldots u_p)}(\mathbf{u}_0) \neq 0$$

Au voisinage de $\mathbf{u}_0$ nous pouvons ainsi appliquer le théorème d'inversion locale à :

$$(f_1, \ldots, f_p) : \quad U \to \mathbb{R}^p \qquad \mathbf{u} \longmapsto (x_1 = f_1(\mathbf{u}), \ldots, x_p = f_p(\mathbf{u})).$$

Il existe un ouvert U' de $\mathbb{R}^p$, tel que $\{\mathbf{u}_0\} \subset U' \subset U$, un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ et un $\varpi \in \mathrm{Diff}^k(U', V)$ coïncidant avec $(f_1, \ldots, f_p)$ sur U'. L'application $\Phi = (F|U') \circ \varpi^{-1}$ de V dans $\mathscr{E}$ s'écrit (1) avec :

$$\forall j \in \mathbb{N}_n \backslash \mathbb{N}_p \qquad \varphi_j(x_1, \ldots, x_p) = f_j(\varpi^{-1}(x_1, \ldots, x_p)).$$

Elle est de classe C^k. D'autre part $\Phi(V)$, qui est l'image par F de l'ouvert U' de U, contient $a = F(\mathbf{u}_0)$ et (puisque F est un plongement) est un ouvert de $F(U)$, qui est lui-même un ouvert de $\mathscr{S}$; $\Phi(V)$ est donc un ouvert de $\mathscr{S}$ contenant a. □

Preuve de ii$_a$ $\Rightarrow$ i$_a$. — Par hypothèse, pour tout $a \in \mathscr{S}$, ii$_a$) est vérifiée. L'application Φ qui y intervient est visiblement de classe C^k. Il suffit de montrer qu'il s'agit d'un plongement.

Au point $(x_1, \ldots, x_p) \in V$, la matrice jacobienne de Φ est de la forme :

$$\begin{bmatrix} I_p \\ \boxed{} \end{bmatrix}$$

ce qui montre qu'elle est de rang p; Φ est donc une immersion.

D'autre part $\Phi(x'_1, \ldots, x'_p) = \Phi(x_1, \ldots, x_p)$ exige $x'_1 = x_1, \ldots, x'_p = x_p$, et Φ est une injection; soit $\boldsymbol{\Phi}$ la bijection, évidemment continue, de V sur $\Phi(V)$ induite par cette injection; $\boldsymbol{\Phi}^{-1}$ est continue car elle coïncide sur $\Phi(V)$ avec l'application continue $\mathscr{E} \to \mathbb{R}^p$ qui à tout point de $\mathscr{E}$ associe le p-uplet de ses p premières coordonnées dans le repère $(O; \mathrm{e})$. □

• ***Sous-variétés cartésiennes.*** — COROLLAIRE I ET DÉFINITION. — **Soit $\mathscr{S}$ une partie de $\mathscr{E}$ à laquelle on peut associer un repère (O, e) de $\mathscr{E}$, un ouvert V de $\mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}_n$, et une application $\Phi : V \to \mathscr{E}$ de la forme :**

$$(x_1, \ldots, x_p) \mapsto O + \sum_{i=1}^{p} x_i e_i + \sum_{j=p+1}^{n} \varphi_j(x_1, \ldots, x_p) e_j$$

où les $\varphi_j : V \to \mathbb{R}$ sont de classe C^k, et ceci de façon que $\mathscr{S} = \Phi(V)$. Alors $\mathscr{S}$ est une sous-variété plongée de $\mathscr{E}$, de dimension p et de classe C^k. On dit que $\mathscr{S}$ est une *sous-variété cartésienne de $\mathscr{E}$.*

On utilise une variante de la preuve de $\text{ii}_a \Rightarrow \text{i}_a$. □

• Une variante de la preuve de $\text{ii}_a \Rightarrow \text{i}_a$ et le corollaire *1* fournissent :

COROLLAIRE II. — **Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}_n$, F une application de classe C^k de U dans $\mathscr{E}$ et $\mathbf{u}_0 \in U$ un point régulier de F** (i.e. tel que $dF(\mathbf{u}_0)$ soit de rang p). **Alors il existe un ouvert U' de $\mathbb{R}^p$ tel que $\{\mathbf{u}_0\} \subset U' \subset U$ et que $\mathscr{S}' = F(U')$ soit une sous-variété cartésienne de $\mathscr{E}$, de dimension p et de classe C^k.**

Naturellement $S = F(U)$ n'est pas nécessairement une sous-variété de $\mathscr{E}$ (même si F est une immersion injective) et $\mathscr{S}'$ n'est pas nécessairement un ouvert de S (cf. le cas où S est le lemniscate du **1.2.***2*, 1° et où $\mathbf{u}_0$ est le point (0, 0) de $U = \mathbb{R}^2$).

REMARQUE. — Nous n'avons fait qu'étendre et affiner des démonstrations déjà données au **1.2.***1*, dans le cas des arcs géométriques et au **3.1.***1* dans le cas des nappes géométriques.

3° ***Deux autres définitions d'une sous-variété.*** — Elles résultent de :

PROPOSITION. — **Une partie $\mathscr{S}$ de $\mathscr{E}$ en est une sous-variété de dimension p et de classe C^k si, et seulement si, pour tout $a \in \mathscr{S}$ est vérifiée l'une des deux assertions suivantes, qui sont équivalentes :**

iii_a) Il existe un ouvert $\mathscr{W}$ de $\mathscr{E}$ contenant a, et une application $f = (f_{p+1}, \ldots, f_n)$ de $\mathscr{W}$ dans $\mathbb{R}^{n-p}$, de classe C^k sur $\mathscr{W}$ et de rang $n - p$ au point a, tels que :

$$\mathscr{S} \cap \mathscr{W} = f^{-1}(0), \qquad (0 \text{ désigne ici } 0_{\mathbb{R}^{n-p}});$$

iv_a) Il existe un ouvert Ω de $\mathscr{E}$ contenant a et un C^k-difféomorphisme ϖ de Ω sur un ouvert Ω' de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$\mathscr{S} \cap \Omega = \varpi^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\} \cap \Omega')$$

Reprenant les notations du 1°, il s'agit de prouver que, pour toute partie $\mathscr{S}$ de $\mathscr{E}$ et pour tout point a de $\mathscr{S}$, les implications suivantes sont vraies :

$$\text{ii}_a \Rightarrow \text{iii}_a; \qquad \text{iii}_a \Rightarrow \text{iv}_a; \qquad \text{iv}_a \Rightarrow \text{i}_a.$$

Preuve de $\text{ii}_a \Rightarrow \text{iii}_a$. — Par hypothèse ii_a est vraie. On note $\Phi(V) = \mathscr{S} \cap \mathscr{U}$, où $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\mathscr{E}$ contenant a. On considère :

$$\mathscr{V} = \{m = O + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathscr{E} \mid (x_1, \ldots, x_p) \in V\}$$

qui est un ouvert de $\mathscr{E}$ contenant $\Phi(V)$. On constate que $\mathscr{W} = \mathscr{U} \cap \mathscr{V}$ est un ouvert de $\mathscr{E}$ tel que $\mathscr{S} \cap \mathscr{W} = \Phi(V)$.

On dispose de l'application $f = (f_{p+1}, \ldots, f_n) : \mathscr{W} \to \mathbb{R}^{n-p}$ définie par :

$$\forall j \in \mathbb{N}_n \backslash \mathbb{N}_p \qquad \forall m \in \mathscr{W} \qquad f_j(m) = x_j - \varphi_j(x_1, \ldots, x_p);$$

f est de classe C^k. Sa matrice jacobienne au point $m \in \mathscr{W}$, de la forme :

$$\begin{bmatrix} \ & I_{n-p} \end{bmatrix}$$

est de rang $n - p$; f est donc une submersion de classe C^k.

On constate enfin que $f^{-1}(0)$ est $\Phi(V)$, c'est-à-dire $\mathscr{S} \cap \mathscr{W}$. □

Preuve de iii$_a$ $\Rightarrow$ iv$_a$. — Par hypothèse iii$_a$ est vraie. Rappelons que $\mathscr{E}$ a été muni d'un repère $(O ; \mathbf{e})$; soient $(a_1, \ldots, a_n)$ les coordonnées de a dans ce repère, et $(x_1, \ldots, x_n)$ celles de m.

L'application d'un ouvert $\mathscr{W}'$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n-p}$ canoniquement associée à l'application $(f_{p+1}, \ldots, f_n)$ de $\mathscr{W}$ dans $\mathbb{R}^{n-p}$, qui est abusivement notée $(f_{p+1}, \ldots, f_n)$ est de classe C^k et de rang p au point a, ce qui permet de supposer, moyennant une permutation des vecteurs de $\mathbf{e}$ que :

$$\frac{D(f_{p+1}, \ldots, f_n)}{D(x_{n+1}, \ldots, x_n)}(a) \neq 0.$$

On dispose de l'application de classe C^k :

$$\psi : \mathscr{W} \to \mathbb{R}^n \quad m \longmapsto (x_1, \ldots, x_p, f_{p+1}(m), \ldots, f_n(m))$$

Relativement à la base $\mathbf{e}$, la matrice jacobienne de ψ au point a, de la forme

$$\begin{bmatrix} I_p & O \\ \ & M \end{bmatrix}, \qquad \text{avec} \qquad \det M = \frac{D(f_{p+1}, \ldots, f_n)}{D(x_{p+1}, \ldots, x_n)}(a),$$

est carrée inversible. Le théorème d'inversion locale s'applique à ψ en a. Il existe un ouvert Ω de $\mathscr{E}$, tel que $\{a\} \subset \Omega \subset \mathscr{W}$, un ouvert Ω' de $\mathbb{R}^n$ et un $\varpi \in \mathrm{Diff}^k(\Omega, \Omega')$ coïncidant avec ψ sur Ω.

On a : $$\mathscr{S} \cap \Omega = \{m \in \Omega \mid f(m) = 0\} = \varpi^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\} \cap \Omega').$$ □

Preuve de iv$_a$ $\Rightarrow$ *i*$_a$. — Par hypothèse iv$_a$ est vraie. On considère l'application

$$\sigma : \quad \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \qquad (x_1, \ldots, x_p) \longmapsto (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$$

qui induit un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}^p$ sur $\sigma(\mathbb{R}^p) = \mathbb{R}^p \times \{0\}$. Ainsi l'image réciproque de $\mathbb{R}^p \times \{0\} \cap \Omega'$ par cette application est un ouvert V de $\mathbb{R}^p$. L'application $\Phi : V \to \mathscr{E}$ $\mathbf{u} \longmapsto \varpi^{-1}(\sigma(\mathbf{u}))$ a pour image $\mathscr{S} \cap \Omega$. Elle est de classe C^k et de rang p en tout point de V car σ est de rang p et ϖ^{-1} est un difféomorphisme.

D'autre part Φ est un plongement. En effet elle est injective car :

$$[\varpi^{-1}(\sigma(\mathbf{u})) = \varpi^{-1}(\sigma(\mathbf{u}'))] \Leftrightarrow [\sigma(\mathbf{u}) = \sigma(\mathbf{u}')], \quad \text{i.e.} \quad [\mathbf{u} = \mathbf{u}'].$$

D'autre part elle induit un homéomorphisme (l'application réciproque s'obtenant par ϖ, suivi de $(x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0) \longmapsto (x_1, \ldots, x_p)$).

- Dans la pratique, on utilise surtout le corollaire suivant :

Corollaire. — **Soient p un entier tel que $1 \leqslant p \leqslant n$, et $f = (f_{p+1}, \ldots, f_n)$ une application de classe $C^k (k \geqslant 1)$ d'un ouvert $\mathscr{W}$ de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}^{n-p}$. On note :**

$S = f^{-1}(0)$ et $\mathscr{S} = S \cap \Omega$, où Ω est l'ensemble des points de $\mathscr{W}$ en lesquels

f est régulière (i.e. de rang $n-p$). Alors $\mathscr{S}$ est un ouvert de S, et, s'il n'est pas vide, $\mathscr{S}$ est une sous-variété de $\mathscr{E}$, de dimensions p et de classe C^k.

D'après III.8.1.7, 3°, Ω est un ouvert de $\mathscr{W}$ et, $\mathscr{W}$ étant un ouvert de $\mathscr{E}$, Ω est un ouvert de $\mathscr{E}$, ce qui entraîne que $\mathscr{S}$ est un ouvert de S.

Reste à constater que $\mathbf{iii}_a$ est vérifiée en tout $a \in \mathscr{S}$. □

Il arrive que l'on n'ait à utiliser que :

COROLLAIRE. — **S est une sous-variété de $\mathscr{E}$ au voisinage de chacun de ses points réguliers pour f.**

Dans la pratique, on utilise $S = \bigcap_{j=p+1}^{n} f_j^{-1}(0)$ et : f est régulière en $a \in \mathscr{W}$ si, et seulement si le système des formes linéaires $(\mathrm{d}f_j(a))_{p<j\leqslant n}$ est de rang $n-p$.

Notons que si $\mathscr{E}$ est euclidien, l'indépendance des $\mathrm{d}f_j(a)$ équivaut à celle des gradients des f_j au point a.

EXEMPLES. — *a*) Les « courbes planes sans point singulier » au sens du **1.5** sont des courbes au sens du présent **3.3**.

b) On obtient un grand nombre de courbes de $\mathscr{E}_2$ (resp. de surfaces de $\mathscr{E}_3$) :

— soit comme supports d'arcs plongés (resp. de nappes plongées);

— soit par application du corollaire précédent avec $n-p=1$ (on a une équation $f(m)=0$; il faut vérifier que $\mathrm{d}f$ ne s'annule pas).

C'est ainsi que les *sphères, les tores à collier, les principales quadriques* (*ellipsoïdes, hyperboloïdes, paraboloïdes*) *sont des surfaces de* $\mathscr{E}_3$.

c) On obtient un grand nombre de courbes de $\mathscr{E}_3$:

— soit comme support d'arcs plongés;

— soit comme application du corollaire précédent avec $n-p=2$ (on a une équation : $(f(m)=0) \wedge (g(m)=0)$; il faut vérifier que $(\mathrm{d}f(m), \mathrm{d}g(m))$ reste de rang 2).

4° ***Changement de paramétrisation locale; orientation locale.*** — Soient $\mathscr{S}$ une sous-variété de dimension p et de classe C^k de $\mathscr{E}$, a un point de $\mathscr{S}$, et (U, F) une paramétrisation locale de $\mathscr{S}$ en a.

a) Pour tout C^k-difféomorphisme φ de U sur un ouvert V de $\mathbb{R}^p$, $(V, F \circ \varphi^{-1})$ est visiblement une seconde paramétrisation locale de $\mathscr{S}$ en a.

b) Inversement soit (V, G) l'une quelconque des paramétrisations locales de $\mathscr{S}$ en a. Il existe des domaines $U' \subset U$ et $V' \subset V$ tels que $F \mid U'$ et $G \mid V'$ soient des plongements de même image $\mathscr{S}'$, avec $\{a\} \subset \mathscr{S}' \subset \mathscr{S}$; ces plongements induisent des homéomorphismes, notés $\bar{F}$ et $\bar{G}$, de U' et V' sur $\mathscr{S}'$ et, en étendant la démonstration du théorème II du **3.1**.*1*, 2°, on constate que $\theta = \bar{F}^{-1} \circ \bar{G}$ est un C^k-difféomorphisme de V' sur U' et que $G \mid V' = (F \mid U') \circ \theta$. Comme V' est connexe, on a soit $\theta \in \mathrm{Diff}^k_+(V', U')$, soit $\theta \in \mathrm{Diff}^k_-(V', U')$; selon le cas on dit que (U, F) et (V, G) définissent la même orientation locale ou des orientations locales différentes de $\mathscr{S}$ en a (et d'ailleurs en tout point de $\mathscr{S}'$).

En particulier (U, F) et $(\varphi(U), F \circ \varphi^{-1})$, où φ est la bijection définie sur U et consistant à transposer les deux premières coordonnées ($p \geqslant 2$), définissent des orientations locales différentes.

3.3.2. Sous-espaces tangents à une sous-variété

Soient $\mathscr{S}$ une sous-variété de $\mathscr{E}$, de dimension p et de classe C^k, et a un point de $\mathscr{S}$.

1° DÉFINITION. — **Un vecteur x de E est dit tangent en a à $\mathscr{S}$ si et seulement s'il existe un arc paramétré (I, f) où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathscr{E}$ une application de classe C^1, enfin un point t_0 de I tels que :**

i) $f(I) \subset \mathscr{S}$, ce qui traduit que le support de l'arc est inclus dans la sous-variété ;

ii) $f(t_0) = a$ et $f'(t_0) = \mathbf{x}$.

Lorsque $\mathbf{x}$ est non nul nous disposons au point a de la tangente à l'arc paramétré (I, f) et si $\mathbf{x}$ est tangent en a à $\mathscr{S}$, la droite affine $a + \mathbb{R}\mathbf{x}$, qui est la tangente à l'arc au point a, est dite *tangente à $\mathscr{S}$ au point a.*

REMARQUES. — *a*) Tout arc paramétré (J, g), C^1-équivalent à (I, f) convient pour vérifier la définition.

b) Dans le cas d'une surface $\mathscr{S}$ de $\mathscr{E}_3$, le lecteur notera que i) est une propriété d'inclusion du support de l'arc dans $\mathscr{S}$, situation moins restrictive que celle observée en 3.1.2, 2°.

2° THÉORÈME. — **L'ensemble des vecteurs de E tangents en a à $\mathscr{S}$ constitue dans E un sous-espace vectoriel de dimension p appelé** *sous-espace vectoriel tangent en a à $\mathscr{S}$*, **et noté $T(\mathscr{S}; a)$; le sous-espace affine $\mathscr{T}(\mathscr{S}; a) = a + T(\mathscr{S}; a)$ est dit sous-espace tangent en a à $\mathscr{S}$.**

Nous utilisons la définition **iv)** a d'une sous-variété (3.3.*1*. 3°) : il existe un ouvert Ω de $\mathscr{E}$ contenant a et un C^k-difféomorphisme ϖ de Ω sur un ouvert Ω' de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\mathscr{S} \cap \Omega = \varpi^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0_{\mathbb{R}^{n-p}}\} \cap \Omega')$$

Posons $b = \varpi(a)$.

— Soit $\mathbf{x} \in E$, tangent en a à $\mathscr{S}$. Utilisant les notations de la définition du 1°, la continuité de f en t_0 prouve l'existence d'un intervalle ouvert J inclus dans I, contenant t_0, tel que $f(J) \subset \Omega$. Le C^1-arc paramétré $(J, \varpi \circ f)$ a alors son support inclus dans le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^p \times \{0_{\mathbb{R}^{n-p}}\}$ de $\mathbb{R}^n$; comme ϖ est différentiable en a, on dispose de $(\varpi \circ f)'(t_0) = d\varpi(a).\mathbf{x}$ qui est donc un vecteur de $\mathbb{R}^p \times \{0_{\mathbb{R}^{n-p}}\}$.

Puisque ϖ est un C^k-difféomorphisme de Ω sur Ω', $d\varpi(a)$ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$, ce qui permet d'une part d'affirmer l'existence du sous-espace vectoriel de dimension p de E, $T(\mathscr{S}; a) = [d\varpi(a)]^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0_{\mathbb{R}^{n-p}}\})$, d'autre part de constater : $\mathbf{x} \in T(\mathscr{S}; a)$.

— Réciproquement soit $\mathbf{x}$ un vecteur de $T(\mathscr{S}; a)$. Posons $\mathbf{y} = d\varpi(a).\mathbf{x}$ qui est donc, dans $\mathbb{R}^n$, un vecteur de $\mathbb{R}^p \times \{0_{\mathbb{R}^{n-p}}\}$.

Comme Ω' est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, comme $b \in \Omega'$, la continuité de $t \longmapsto b + t\mathbf{y}$ permet de trouver $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall t \in]\eta, \eta[\qquad b + t\mathbf{y} \in \Omega'$$

On peut ainsi envisager l'arc paramétré (I, f) de $\mathscr{E}$ défini par $I =]-\eta, \eta[$ et $f : I \to \mathscr{E}, t \longmapsto \varpi^{-1}(b + t\mathbf{y})$; il est de classe C^k. Comme b et $\mathbf{y}$ appartiennent à $\mathbb{R}^p \times \{0_{\mathbb{R}^{n-p}}\}$, pour tout $t \in]-\eta, \eta[$, $b + t\mathbf{y} \in \Omega' \cap (\mathbb{R}^p \times \{0_{\mathbb{R}^{n-p}}\})$; donc $f(I) \subset \mathscr{S}$. En outre on constate $f(0) = a$ et $f'(0) = \mathbf{x}$. □

A titre d'exercice, le lecteur démontrera :

PROPOSITION. — **Soient $\mathscr{S}$ une sous-variété de $\mathscr{E}$, a un point de $\mathscr{S}$, $\mathscr{W}$ un ouvert de $\mathscr{E}$ contenant a et $\mathscr{S}' = \mathscr{W} \cap \mathscr{S}$ qui est une sous-variété de $\mathscr{E}$** (cf. 3.3.*1*, 1°). **Alors :**

$$\mathcal{C}(\mathscr{S}; a) = \mathcal{C}(\mathscr{S}'; a)$$

3° ***Différentes caractérisations du sous-espace tangent en** a **à** $\mathscr{S}$.* — Nous utilisons les notations des définitions $\mathbf{i}_a$ et $\mathbf{iii}_a$ des sous-variétés du **3.3.*1***.

PROPOSITION I. — **Si (U, F) est une paramétrisation locale de $\mathscr{S}$ en a et si pour cette paramétrisation $a = F(\mathbf{u}_0)$ alors l'espace vectoriel tangent en a à $\mathscr{S}$ est $T(\mathscr{S}; a) = \mathrm{d}F(\mathbf{u}_0).\mathbb{R}^p$.**

Pour $x \in \mathrm{d}F(\mathbf{u}_0).\mathbb{R}^p$, il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ tel que $x = \mathrm{d}F(\mathbf{u}_0) \circ \mathbf{x}$. Une démonstration analogue à celle de 2° prouve l'existence d'un C^k-arc paramétré (I, f) avec $I =]-\eta, \eta[$, $\eta > 0$ et $f : I \to \mathscr{E}$, $t \longmapsto F(\mathbf{u}_0 + t\mathbf{x})$; on a évidemment $f(I) \subset \mathscr{S}$, $f(0) = a$, $f'(0) = \mathrm{d}F(\mathbf{u}_0).\mathbf{x} = x$, ce qui prouve :

$$\mathrm{d}F(\mathbf{u}_0).\mathbb{R}^p \subset T(\mathscr{S}; a).$$

L'égalité des dimensions entraîne alors l'égalité cherchée. □

REMARQUE. — Il est bien évident que si (V, G) est une autre paramétrisation locale de $\mathscr{S}$ en a, $a = G(\lambda_0)$, nous retrouvons :

$$T(\mathscr{S}; a) = \mathrm{d}F(\mathbf{u}_0).\mathbb{R}^p = \mathrm{d}G(\lambda_0).\mathbb{R}^p$$

CAS D'UNE SURFACE CARTÉSIENNE. — **Avec la notation du corollaire I du** 3.3.*1*, 2°, $T(\mathscr{S}; \Phi(\xi))$, **où $\xi \in V$ est fixé, admet la base :**

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\xi) = e_i + \sum_{j=p+1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\xi) e_j\right)_{1 \leqslant i \leqslant p}$$

PROPOSITION II. — **Si, au voisinage de a, $\mathscr{S}$ est définie par un système d'équations : $f_j(m) = 0$, $p + 1 \leqslant j \leqslant n$, alors l'espace vectoriel tangent en a à $\mathscr{S}$ est :**

$$T(\mathscr{S}; a) = \bigcap_{j=p+1}^{n} \operatorname{Ker} \mathrm{d}f_j(a).$$

Les sous-espaces $H_j = \operatorname{Ker} df_j(a)$, $p + 1 \leqslant j \leqslant n$ constituent une famille d'hyperplans de E, de rang $n - p$ (propriété de iii$_a$), dont l'intersection H est ainsi un sous-espace vectoriel de E, de dimension p (**I.9**.3.6, 4°).

Soit $\mathbf{x} \in T(\mathscr{S}\,;\, a)$, d'après la définition de 1° nous disposons d'un C^1-arc paramétré (I, φ) vérifiant : $\varphi(I) \subset \mathscr{S}$, $\varphi(t_0) = a$, $\varphi'(t_0) = \mathbf{x}$.

Quitte à nous restreindre à un sous-intervalle $J \subset I$, contenant t_0, nous pouvons supposer $\varphi(I) \subset \mathscr{W}$ (notations de **3**.3.1, 3° iii$_a$). Ainsi nous disposons des applications $f_j \circ \varphi$, $p + 1 \leqslant j \leqslant n$ et comme $\varphi(I) \subset \mathscr{S}$, ce sont des applications nulles. Il en résulte :

$$\forall j, \qquad p + 1 \leqslant j \leqslant n \qquad df_j(a).\mathbf{x} = 0$$

donc $\mathbf{x} \in H$; $T(\mathscr{S}\,;\, a) \subset H$ et l'égalité des dimensions entraîne à nouveau l'égalité cherchée. □

Corollaire. — **Au point** a **de** $\mathscr{S}$, **un système d'équations de l'espace tangent en** a **à** $\mathscr{S}$, $T(\mathscr{S}, a)$, **est :**

$$(df_{p+1}(a).\overrightarrow{am} = 0) \wedge \ldots \wedge (df_n(a).\overrightarrow{am} = 0)$$

Si $\mathscr{E}$ est muni d'un repère $(O, \mathbf{e})$ et si $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ désignent respectivement les coordonnées de a et de m dans ce repère, $df_j(a).\overrightarrow{am} = 0$ s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k) \frac{\partial f_j}{\partial x_k} (a_1, \ldots, a_n) = 0,$$

en notant abusivement $(f_{p+1}, \ldots, f_n)$ l'application de l'ouvert $\mathscr{W}'$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n-p}$, canoniquement associée (grâce à $(O, \mathbf{e})$) à l'application $(f_{p+1}, \ldots, f_n)$ de $\mathscr{W}$ dans $\mathbb{R}^{n-p}$.

* Nous verrons d'autre part (**5**.6.3) que, si $\mathscr{E}$ est euclidien, $df_j(a).\overrightarrow{am} = 0$ s'écrit $(\operatorname{grad} f_j(a) | \overrightarrow{am}) = 0$.*

Cas particuliers. — *a*) La tangente au point a d'une courbe de $\mathscr{E}_2$ d'équation $f(m) = 0$ admet l'équation : $df(a).\overrightarrow{am} = 0$.

b) Le plan tangent au point a d'une surface de $\mathscr{E}_3$ d'équation $f(m) = 0$ admet l'équation : $df(a).\overrightarrow{am} = 0$.

c) La tangente au point a d'une courbe de $\mathscr{E}_3$ d'équation

$$(f(m) = 0) \wedge (g(m) = 0)$$

admet l'équation :

$$(df(a).\overrightarrow{am} = 0) \wedge (dg(a).\overrightarrow{am} = 0)$$

• ***Deux extensions de la notion de sous-espace tangent.*** — Convention I. — *Dans la situation du corollaire* II *du* **3**.3.*1*, 2°, *nous* **conviendrons** *de dire que, si* $a = F(\mathbf{u}_0)$ *est un point simple de* S, *alors* S *admet en ce point un sous-espace tangent, qui est,* **par définition**, $\mathscr{T}(\mathscr{S}'\,;\, a)$ *et donc* $dF(\mathbf{u}_0) \,.\, \mathbb{R}^p$.

C'est ce que nous avons implicitement fait au **3**.1.2, 1°.

CONVENTION II. — *Dans la situation du corollaire du* **3**.3.1, 3°, *nous* **conviendrons** *de dire que, si $\mathscr{S}$ n'est pas vide, alors S admet en tout point $a \in \mathscr{S}$*, un sous-espace tangent, qui est, **par définition,** *$\mathcal{T}(\mathscr{S}; a)$ et donc* $\bigcap_{j=p+1}^{n}$ Ker $df_j(a)$.

Rappelons qu'ici $\mathscr{S}$ est un ouvert de S, et étudions deux cas particuliers.

• CAS OÙ $p = n - 1$. — **Soient** f **une application** C^k **d'un ouvert** $\mathscr{W}$ *de* $\mathscr{E}$ **(rapporté à un repère** $\mathbb{R}$) **dans** $\mathbb{R}$, **et** $S = f^{-1}(0)$.

S'il existe un point $a = (a_1, \ldots, a_n)$ **de** S **tel que :**

$$(f'_{x_1}(a)), \ldots, f'_{x_n}(a)) \neq (0, \ldots, 0)$$

alors il existe un ouvert de $\mathscr{E}$ **contenant** a **et coupant** S **suivant une hypersurface** $\mathscr{S}'$ *de* $\mathscr{E}$, *de* **classe** C^k, **cartésienne, graphe d'une application de la forme** $x_n = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ **ou de l'une de celles qui s'en déduisent par une permutation circulaire sur les coordonnées;** S **admet un hyperplan (affine) tangent en** a, **dont une équation dans le repère** $\mathscr{R}$ **est :**

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k) f'_{x_k}(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

Pour $n = 2$, on retrouve très exactement le théorème du **1**.5.2. Pour $n = 3$ on obtient une généralisation de ce théorème; **on parle alors de la** *surface* $\mathscr{S}'$ **et du** *plan tangent* **en** a **à** S.

• CAS OÙ $n = 3$ ET $p = 1$. — **Soient** $f = (g, h)$ **une application** C^k **d'un ouvert** $\mathscr{W}$ **de** $\mathscr{E}_3$ **dans** $\mathbb{R}^2$, $S_1 = g^{-1}(0)$, $S_2 = h^{-1}(0)$ **et** $C = S_1 \cap S_2$.

S'il existe un point $m = (a, b, c)$ **de** C **tel que :**

$$rg \begin{bmatrix} g'_x(m) & g'_y(m) & g'_z(m) \\ h'_x(m) & h'_y(m) & h'_z(m) \end{bmatrix} = 2 \qquad (1)$$

alors il existe un ouvert de $\mathscr{E}$ **contenant** m **et coupant** C **suivant une courbe** $\mathscr{C}'$, **de classe** C^k, **cartésienne et graphe d'une application de la forme** $(y, z) = (\psi_1(x), \psi_2(x))$ **ou de l'une de celles qui s'en déduisent par permutation circulaire sur** (x, y, z). **D'après** (1), S_1 **et** S_2 **admettent des plans tangents en** m, $\mathcal{T}_1$ **et** $\mathcal{T}_2$ **distincts;** C **admet une tangente en** m, **qui est** $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$; **un vecteur directeur en est :**

$$(g'_y h'_z - g'_z h'_y)(m)\mathbf{i} + (g'_z h'_x - g'_x h'_z)(m)\mathbf{j} + (g'_x h'_y - g'_y h'_x)(m)\mathbf{k}$$

4° ***Intersection des deux surfaces*** $\mathscr{S}_1$ ***et*** $\mathscr{S}_2$ ***de*** $\mathscr{E}_3$. — L'énoncé précédent nous apprend que si en tout $m \in \mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2$ les plans tangents $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ à $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ sont distincts, alors $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2$ est une courbe, admettant $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ pour tangentes en m. Ce résultat avait d'ailleurs été obtenu, sous une autre forme, au **3**.1.3, 1°.

— S'il existe *un* point $m_0 \in \mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2$ en lequel les deux surfaces sont tangentes (i.e. ont le même plan tangent) alors $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2$ n'est en général pas une courbe. Le **3**.1.3, 3° nous apprend que, au voisinage de m_0, $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2$ *en général* est soit réduite à $\{m_0\}$, soit réunion de deux courbes à tangentes distinctes en m_0.

— Nous trouverons au paragraphe suivant le cas où $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2$ est une courbe $\mathscr{C}$ en tout point de laquelle les deux surfaces ont le même plan tangent (on dit alors que $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ se « raccordent le long de $\mathscr{C}$ »).

Étude locale de l'intersection d'une surface $\mathscr{S}$ ***et d'une courbe*** $\mathscr{C}$ ***de*** $\mathscr{E}_3$. — On se place au voisinage de $m_0 \in \mathscr{S} \cap \mathscr{C}$. On définit $\mathscr{S}$ au voisinage de m_0 par une équation $g(m) = 0$, et $\mathscr{C}$ par une paramétrisation locale (I, f). On a ainsi

$g(m_0) = 0$, et il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = m_0$; on a $f'(t_0) \neq 0$. On suppose que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ sont de classe C^k.

Pour tout $p \in \mathbb{N}_k$, nous dirons que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ ont en m_0 un contact d'ordre au moins égal à p si, et seulement si t_0 est zéro d'ordre au moins égal à $p + 1$ de $\varphi = g \circ f$, ce qui s'écrit :

$$\varphi'(t_0) = \cdots = \varphi^{(p)}(t_0) = 0$$

et signifie que, au voisinage de t_0, φ est négligeable devant $t \longmapsto (t - t_0)^p$.

– Si $p = 1$, la condition est $\mathrm{d}g(m_0).f'(t_0) = 0$; elle exprime que la tangente en m_0 à $\mathcal{C}$ est une tangente en m_0 à $\mathcal{S}$; si elle est remplie, on dit que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ sont *tangentes* en m_0.

– Si $p = 2$ (resp. $p \geqslant 3$) on dit que $\mathcal{S}$ est *osculatrice* (resp. *surosculatrice*) à $\mathcal{C}$ en m_0.

REMARQUES. – *a*) Nous avons étudié, dans $\mathcal{E}_3$ euclidien, le cas des sphères osculatrices.

b) La méthode vaut pour l'étude de l'intersection de deux courbes de $\mathcal{E}_2$ (cf. cercles osculateurs).

3.3.3. Cylindres et cônes circonscrits à une surface de $\mathcal{E}_3$

§ *$(\mathcal{E}, E)$ est ici un espace affine de dimension* 3. §

1° ***Cylindres circonscrits.*** – Soient $\mathcal{S}$ une surface de $\mathcal{E}$ et $\mathbf{u}$ un vecteur non nul de E.

DÉFINITION. – **On appelle** *cylindre circonscrit à $\mathcal{S}$ parallèlement à* $\mathbb{R}\mathbf{u}$, **le cylindre Σ (au sens du** II.7.3.3) **dont les génératrices sont les tangentes à $\mathcal{S}$ de direction $\mathbb{R}\mathbf{u}$.**

On appelle *contour apparent de $\mathcal{S}$ pour la direction* $\mathbb{R}\mathbf{u}$, **l'ensemble $\mathcal{C}$ des points de $\mathcal{S}$ en lesquels la direction du plan tangent contient u.**

• ***Cas où $\mathcal{S}$ est donnée, au moins localement, par une équation*** $f(m) = 0$ (f ***de classe*** C^k, $k \geqslant 2$, $\mathrm{d}f$ ***ne prenant pas la valeur*** 0). – Alors le contour apparent $\mathcal{C}$ admet l'équation :

$$(f(m) = 0) \wedge (\mathrm{d}f(m).\mathbf{u} = 0)$$

et on obtient une équation du cylindre circonscrit Σ en écrivant que $m \in \mathcal{E}$ appartient à Σ si, et seulement si la droite $m + \mathbb{R}\mathbf{u}$ est tangente à $\mathcal{S}$, i.e. si, et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ vérifiant les deux équations :

$$f(m + t\mathbf{u}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}f(m + t\mathbf{u}).\mathbf{u} = 0$$

à l'inconnue $t \in \mathbb{R}$ ont une racine commune, i.e. si et seulement si (I.**5**.3.2, 1°) l'équation $f(m + t\mathbf{u}) = 0$, à l'inconnue $t \in \mathbb{R}$ admet une racine au moins double.

Le lecteur observera que cette méthode est la même que celle qui consisterait à remarquer que $\mathcal{C}$ est un ensemble directeur de Σ et à utiliser II.7.3.3° (1er cas).

Notons qu'il peut arriver que $\mathscr{C}$ et Σ soient vides.

PROPRIÉTÉ. — **En un point du contour apparent $\mathscr{C}$, le plan tangent à la surface $\mathscr{S}$ est,** *en général,* **tangent au cylindre circonscrit Σ.**

On note g la fonction $m \longmapsto \mathrm{d}f(m).\mathbf{u}$, qui est de classe C^{k-1}, $k \geqslant 2$.

Soit $m_0 \in \mathscr{C}$. En général $(\mathrm{d}f(m_0), \mathrm{d}g(m_0))$ est de rang 2 et $\mathscr{C}$ est une courbe au voisinage de m_0 ; dans la mesure où la tangente à $\mathscr{C}$ en m_0 n'est pas dirigée par $\mathbf{u}$, Σ admet un plan tangent en m_0, défini par la tangente à $\mathscr{C}$ en m_0 et par la génératrice $m_0 + \mathbb{R}\mathbf{u}$; on reconnait le plan tangent à $\mathscr{S}$ en m_0. □

Dans le cas le plus favorable, $\mathscr{C}$ est une courbe en chaque point de laquelle la tangente a une direction distincte de $\mathbb{R}\mathbf{u}$, ce qui permet d'appliquer la proposition ; on dit alors que *$\mathscr{S}$ et Σ se raccordent le long de* Σ. Mais la situation n'est pas toujours aussi simple.

REMARQUES. — *a) Cas où il existe une droite $\mathscr{G} \subset \mathscr{S}$, le long de laquelle le plan tangent tourne.*

En général $\mathscr{G}$ n'a pas pour direction $\mathbb{R}\mathbf{u}$, et il existe un unique point $m_0 \in \mathscr{G}$ appartenant à $\mathscr{C}$. La droite $m_0 + \mathbb{R}\mathbf{u}$ est une génératrice de Σ et en général $\mathscr{S}$ et Σ ont le même plan tangent en m_0.

Si, exceptionnellement, $\mathscr{G}$ est dirigée par $\mathbf{u}$, alors on a $\mathscr{G} \subset \mathscr{C}$ et $\mathscr{G} \subset \Sigma$, mais $\mathscr{S}$ et Σ ne peuvent évidemment pas se raccorder le long de la génératrice commune $\mathscr{G}$.

b) Cas où il existe une droite $\mathscr{G} \subset \mathscr{S}$ le long de laquelle le plan tangent est fixe.

En général $\mathscr{S}$ et Σ se raccordent le long de $\mathscr{G}$ (qui n'est qu'exceptionnellement une génératrice du cylindre).

EXEMPLES. — *a) $\mathscr{S}$ est un ellipsoïde (de $\mathscr{E}_3$ euclidien).*

Il existe un repère orthonormal $(O\,; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de $\mathscr{E}$ dans lequel $\mathscr{S}$ admet l'équation $f(x, y, z) = 0$, avec :

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1, \qquad (A, B, C) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$$

On vérifie que $\mathrm{d}f$ ne prend pas la valeur 0 sur $\mathscr{E}\backslash\{O\}$, $\mathscr{S}$ est donc bien une surface.

On note $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$, et on constate que $\mathrm{d}f(m).\mathbf{u} = 0$ s'écrit :

$$\alpha f'_x(x, y, z) + \beta f'_y(x, y, z) + \gamma f'_z(x, y, z) = 0$$

et ici :

$$A\alpha x + B\beta y + C\gamma z = 0.$$

On a : $\mathscr{C} = \mathscr{S} \cap \mathscr{P}$, où $(\mathscr{P}, P)$ est le plan d'équation : $A\alpha x + B\beta y + C\gamma z = 0$, qui contient O. $\mathscr{C}$ n'est pas vide car toute droite de $\mathscr{P}$ qui contient O coupe $\mathscr{S}$ en deux points (vérification aisée). Le plan tangent à $\mathscr{S}$ au point $m_0 \in \mathscr{C}$, qui contient $m_0 + \mathbb{R}\mathbf{u}$, est distinct de $\mathscr{P}$ (car $\mathbf{u} \notin P$ à cause de $A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 \neq 0$), $\mathscr{C}$ est donc une courbe plane en aucun point de laquelle la tangente n'est dirigée par $\mathbf{u}$ (toujours à cause de $\mathbf{u} \notin P$). Il y a raccordement de $\mathscr{S}$ et Σ le long de $\mathscr{C}$. On obtient une équation de Σ en écrivant que l'équation :

$$A(x + \alpha t)^2 + B(y + \beta t)^2 + C(z + \gamma t)^2 - 1 = 0 \qquad (1)$$

admet une racine au moins double ; cette équation est du second degré. On trouve :

$$(A\alpha x + B\beta y + C\gamma z)^2 - (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2)(Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1) = 0 \qquad (2)$$

Le lecteur vérifiera que, pour tout $(m_1, m_2) \in \mathscr{S}^2$ tel que $m_1 \neq m_2$ et que $\overrightarrow{m_1m_2}$ soit colinéaire à $\mathbf{u}$, le milieu de $[m_1, m_2]$ est un point de $\mathscr{P}$, qui est dit *plan diamétral de la direction* $\mathbb{R}\mathbf{u}$.

Il appliquera ensuite au cas de la sphère ($A = B = C = R^{-2}$).

b) $\mathscr{S}$ *est un hyperboloïde à une nappe (de* $\mathscr{E}_3$ *euclidien).*

Le début de l'étude est le même qu'en *a)*, avec ici $A > 0$, $B > 0$, $C < 0$. Arrivés à $\mathscr{C} = \mathscr{S} \cap \mathscr{P}$ nous avons ici deux cas à considèrer :

Cas où $\mathbf{u} \notin P$, i.e. $A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 \neq 0$. En d'autres termes la droite $O + \mathbb{R}\mathbf{u}$ n'est pas une génératrice du cône asymptote de $\mathscr{S}$ (cf. **3**.2.2, 1°, remarque *b*). $\mathscr{C}$ n'est pas vide. En effet toute génératrice de $\mathscr{S}$ a une direction distincte de $\mathbb{R}\mathbf{u}$ et, d'après la remarque *a)* précédente, elle contient un et un seul point de $\mathscr{C}$. On montre, comme ci-dessus qu'il y a raccordement de $\mathscr{S}$ et Σ le long de $\mathscr{C}$ et on retrouve l'équation (2) de Σ.

Cas où $\mathbf{u} \in P$. — Ici $\mathscr{P}$ est le plan tangent au cône asymptote le long de sa génératrice $\mathscr{L} = O + \mathbb{R}\mathbf{u}$. Il coupe $\mathscr{S}$ suivant deux génératrices $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ parallèles et symétriques par rapport à $\mathscr{L}$ (cf. fig. 53 au **3**.2.2, 1°). D'après la remarque *a)* précédente, on a $\mathscr{C} = \mathscr{G} \cup \mathscr{G}'$ et $\Sigma = \mathscr{G} \cup \mathscr{G}'$. Il n'est évidemment pas question de plan tangent à Σ en l'un de ses points.

Par le calcul, on constate qu'ici l'équation (1) s'écrit :

$$2(A\alpha x + B\beta y + C\gamma z)t + (Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1) = 0$$

Elle admet une racine au moins double si, et seulement si

$$(Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0) \wedge (A\alpha x + B\beta y + C\gamma z = 0)$$

On retrouve : $\mathscr{C} = \mathscr{S} \cap \mathscr{P}$.

• ***Cas où*** $\mathscr{S}$ ***est le support d'une nappe géométrique plongée, représentée par*** (D, F). — Le contour apparent $\mathscr{C}$ est ici l'ensemble des points de $\mathscr{S}$ en lesquels le paramètre (u, v) vérifie la condition $\varphi(u, v) = 0$, avec :

$$\varphi(u, v) = \det_{\mathbf{e}}(F'_u(u, v), F'_v(u, v), \mathbf{u}), \quad (\mathbf{e} : \text{base quelconque de } E).$$

Nous avons vu (exemple du **3**.1.2, 2°) que $\mathscr{C}$ est, *en général*, une réunion de supports d'arcs paramétrés de la forme $t \longmapsto F(u(t), v(t))$. Il en résulte que le cylindre circonscrit Σ est, *en général*, une réunion de supports de nappes paramétrées de la forme $(t, \rho) \longmapsto F(u(t), v(t)) + \rho\mathbf{u}$.

Nous ne pousserons pas plus loin cette étude.

2° ***Cônes circonscrits***. — Soient $\mathscr{S}$ une surface de $\mathscr{E}$ et a un point de $\mathscr{E}$.

DÉFINITION. — **On appelle** *cône circonscrit à* $\mathscr{S}$ *de sommet a*, **le cône** Σ **(au sens de II.7.3.4) dont les génératrices sont les tangentes à** $\mathscr{S}$ **qui contiennent** a.

On appelle *contour apparent de* $\mathscr{S}$ *de point de vue a*, **l'ensemble** $\mathscr{C}$ **des points de** $\mathscr{S}$ **en lesquels le plan tangent passe par** a.

L'étude est calquée sur celle des cylindres circonscrits.

Cas où $\mathscr{S}$ ***est donnée, au moins localement, par une équation*** $f(m) = 0$. — On suppose, comme au 1°, que f est de classe C^k, $k \geqslant 2$, et que $\mathrm{d}f$ ne prend pas la valeur 0. $\mathscr{C}$ admet l'équation :

$$(f(m) = 0) \wedge (\mathrm{d}f(m).\overrightarrow{am} = 0)$$

On obtient une équation de $\Sigma \backslash \{a\}$ en écrivant que $m \in \mathscr{E} \backslash \{a\}$ appartient à Σ si,

et seulement si la droite $a + \mathbb{R}\overrightarrow{am}$ est tangente à $\mathscr{S}$, i.e. si, et seulement si les deux équations :

$$f(a + t\overrightarrow{am}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}f(a + t\overrightarrow{am}).\overrightarrow{am} = 0.$$

à l'inconnue $t \in \mathbb{R}$ ont une racine commune, i.e. si et seulement si l'équation $f(a + t\overrightarrow{am}) = 0$ a une racine au moins double.

Comme pour les cylindres on démontre :

PROPRIÉTÉ. — **En un point du contour apparent $\mathscr{C}$, le plan tangent à la surface $\mathscr{S}$ est,** *en général,* **tangent au cône circonscrit Σ.**

Dans le cas où $\mathscr{C}$ est une courbe en tout point de laquelle la tangente ne passe pas par a, on dit que $\mathscr{S}$ et Σ se raccordent le long de $\mathscr{C}$.

Le lecteur adaptera les remarques *a)* et *b)* du 1°.

EXEMPLE. — *$\mathscr{S}$ est un paraboloïde de révolution (de $\mathscr{E}_3$ euclidien).* Nous savons qu'il existe un repère orthonormal $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de $\mathscr{E}$ dans lequel $\mathscr{S}$ admet l'équation $f(x, y, z) = 0$, avec :

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2pz, \qquad p > 0.$$

On vérifie que $\mathrm{d}f$ ne prend la valeur 0 en aucun point de $\mathscr{E}$; $\mathscr{S}$ est bien une surface.

On note $a = O + \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$, et on constate que $\mathrm{d}f(m).\overrightarrow{am} = 0$ s'écrit :

$$(x - \alpha)f'_x(x, y, z) + (y - \beta)f'_y(x, y, z) + (z - \gamma)f'_z(x, y, z) = 0$$

et compte tenu de $f(m) = 0$, peut être remplacé par :

$$\alpha x + \beta y - p(z + \gamma) = 0.$$

On a $\mathscr{C} = \mathscr{S} \cap \mathscr{P}$, où $\mathscr{P}$ est le plan d'équation : $\alpha x + \beta y - p(z + \gamma) = 0$.

La projection orthogonale c de $\mathscr{C}$ sur xOy a pour équation :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2p\gamma \qquad (2)$$

Cas où $\alpha^2 + \beta^2 - 2p\gamma < 0$, i.e. a « intérieur » à $\mathscr{S}$. — On a $c = \varnothing$ et donc $\mathscr{C} = \varnothing$ et $\Sigma = \varnothing$.

Cas où $\alpha^2 + \beta^2 - 2p\gamma > 0$, i.e. a « extérieur » à $\mathscr{S}$. — Ici c est un cercle (dont le centre est la projection orthogonale de a sur xOy); $\mathscr{C}$ est une courbe plane. En un point $m_0 \in \mathscr{C}$ la tangente à $\mathscr{C}$ ne contient pas a (à cause de $a \notin \mathscr{P}$). Il y a donc raccordement de $\mathscr{S}$ et Σ le long de $\mathscr{C}$.

On obtient une équation de Σ en écrivant que l'équation du second degré

$$(\alpha + t(x - \alpha))^2 + (\beta + t(y - \beta))^2 - 2p(\gamma + t(z - \gamma)) = 0$$

admet une racine double. On obtient :

$$[\alpha(x - \alpha) + \beta(y - \beta) - p(z - \gamma)]^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - 2p\gamma)[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2] = 0 \quad (3)$$

Cas où $\alpha^2 + \beta^2 - 2p\gamma = 0$, i.e. $a \in \mathscr{S}$. — De (2) on déduit : $\mathscr{C} = \{a\}$. Ici Σ est le plan $\mathscr{P}$ tangent en a à $\mathscr{S}$, ce que l'on retrouve par (3), compte tenu de $\alpha^2 + \beta^2 - 2p\gamma = 0$.

• ***Cas où $\mathscr{S}$ est le support d'une nappe géométrique plongée, représentée par (D, F).*** — Le contour apparent $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points de $\mathscr{S}$ en lesquels

le paramètre (u, v) vérifie la condition $\varphi(u, v) = 0$, avec :

$$\varphi(u, v) = \det_e(F'_u(u, v),\ F'_v(u, v),\ \overrightarrow{aF(u, v)}), \qquad (\mathbf{e} : \text{base quelconque de } E).$$

$\mathscr{C}$ est, *en général*, une réunion de supports d'arcs paramétrés de la forme $t \longmapsto F(u(t), v(t))$. Il en résulte que $\Sigma\backslash\{a\}$ est, *en général*, une réunion de support de nappes paramétrées de la forme :

$$(t, \rho) \longmapsto F(u(t), v(t)) + \rho(F(u(t), v(t)) - a)$$

Nous ne pousserons pas plus loin cette étude.

3° ***Conoïdes circonscrits à une surface.*** – Soient $\mathscr{S}$ une surface, $(\mathscr{P}, P)$ un plan et $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{E}$ tels que $\mathscr{P} \cap \mathscr{D} = \{O\}$.

Définition. – **On appelle** *conoïde circonscrit à $\mathscr{S}$, de plan directeur P et d'axe $\mathscr{D}$*, **le conoïde Σ dont les génératrices sont les tangentes à $\mathscr{S}$ qui rencontrent $\mathscr{D}$ et ont une direction incluse dans P.**

• Si $\mathscr{S}$ est donnée par une équation $f(m) = 0$, on obtient une équation de $\Sigma\backslash\mathscr{D}$ en écrivant que $m \in \mathscr{S}\backslash\mathscr{D}$ appartient à Σ si, et seulement si l'équation $f(\mu_m + t\overrightarrow{\mu_m m}) = 0$, où μ_m désigne la projection de m sur $\mathscr{D}$ parallèlement à P, admet une racine au moins double.

Lorsque le repère est choisi de façon que :

$$(\mathscr{P}) \quad z = 0; \qquad (\mathscr{D}) \quad (x = 0) \wedge (y = 0); \qquad (\mathscr{S}) \quad f(x, y, z) = 0,$$

on a : $f(\mu_m + t\,\overrightarrow{\mu_m m}) = f(tx, ty, z)$, et le calcul est simple.

• Comme pour les cylindres, on démontre :

Propriété. – **En un point de contact de la surface $\mathscr{S}$ et d'une génératrice du conoïde Σ, le plan tangent à $\mathscr{S}$ est,** *en général*, **tangent à Σ.**

3.3.4. Notion de surface orientée

Il s'agit ici d'une orientation « globale » et non plus seulement « locale », comme en 3.3.1, 4°.

1° ***Sous-variété orientable.*** – Définition. – **Soit $\mathscr{S}$ une sous-variété de dimension p et de classe C^k de $\mathscr{E}$. On dit que $\mathscr{S}$ est** *orientable* **si, et seulement s'il existe une famille $\mathscr{F} = ((U_i, F_i))_{i \in I}$ de paramétrisations locales de $\mathscr{S}$ vérifiant les deux assertions :**

i) Les ouverts $F_i(U_i)$ de $\mathscr{S}$ en constituent un recouvrement;

ii) Pour tout $(i, j) \in I^2$, (U_i, F_i) et (U_j, F_j) définissent la même orientation locale de $\mathscr{S}$ en tout point de $F(U_i) \cap F(U_j)$.

On notera que si les U_i sont des domaines, il suffit que (U_i, F_i) et (U_j, F_j) définissent la même orientation en un point de $F_i(U_i) \cap F_j(U_j)$ pour qu'elles définissent la même orientation en tout point de cet ensemble.

On dit que $\mathscr{S}$ est *orientée* si on s'est donné une telle famille $\mathscr{F}$, dont les éléments sont alors appelés *paramétrisations de la sous-variété orientée $\mathscr{S}$.*

• *Dans toute la suite, nous nous limitons au cas où $\mathscr{S}$ est une surface de $\mathscr{E}$, espace affine euclidien orienté de dimension* 3.

2° PROPOSITION. — **Une surface $\mathscr{S}$ de $\mathscr{E}_3$, de classe C^k, est orientable si, et seulement s'il existe un champ de vecteurs unitaires normaux qui soit une application continue de l'espace topologique $\mathscr{S}$ dans E_3.**

La condition est nécessaire. — Soit $\mathscr{S}$ une surface orientée et $\mathscr{F}$ une famille de paramétrisations vérifiant les assertions i) et ii) de la définition du 1°.

Soit m un point de $\mathscr{S}$; (U, F) étant un élément de $\mathscr{F}$ tel que $m \in F(U)$, considérons le vecteur normal en m à $\mathscr{S}$:

$$(\|F'_u \wedge F'_v\|^{-1}\ F'_u \wedge F'_v)(F^{-1}(m)) \tag{1}$$

On constate qu'il ne change pas lorsqu'on remplace (U, F) par un autre élément (V, G) de $\mathscr{F}$ tel que $m \in G(V)$; on peut donc le noter $\mathbf{n}(m)$. On dispose ainsi d'un champ $\mathbf{n} : \mathscr{S} \to E$ de vecteurs unitaires normaux qui, d'après (1) est de classe C^{k-1} sur un voisinage convenablement choisi de chaque point de $\mathscr{S}$; ce champ est donc continu sur $\mathscr{S}$. □

La condition est suffisante. — On suppose ici qu'il existe un champ continu $\mathbf{n} : \mathscr{S} \to E_3$ de vecteurs unitaires normaux.

Soient m un point de $\mathscr{S}$, et (U, F) où U est un domaine, une paramétrisation locale de $\mathscr{S}$ en m (avec $m = F(u_0, v_0)$). Selon que le produit mixte non nul :

$$(F'_u(u_0, v_0),\ F'_v(u_0, v_0), \mathbf{n}(m))$$

est positif ou négatif, nous posons

$$(U_m, F_m) = (U, F) \qquad \text{ou} \qquad (U_m, F_m) = (\varphi(U),\ F \circ \varphi^{-1}),$$

où φ est la bijection définie sur U par $(u, v) \longmapsto (v, u)$. On constate que $\mathbf{n}(m)$ est ainsi un vecteur unitaire de la normale à $\mathscr{S}$ en m, orientée grâce à l'orientation locale de $\mathscr{S}$ représentée par (U_m, F_m). On en déduit que la famille $\mathscr{F} = ((U_m, F_m))_{m \in \mathscr{S}}$ définit une orientation de $\mathscr{S}$. □

COROLLAIRE I. — **Une surface orientable et connexe et, en particulier, une surface plongée de $\mathscr{E}_3$ peut être orientée exactement de deux façons.**

Soient en effet $\mathbf{n}$ et $\mathbf{n}_1$ deux champs continus de vecteurs unitaires normaux à $\mathscr{S}$. L'application $m \longmapsto (\mathbf{n}(m) | \mathbf{n}_1(m))$ est continue sur le connexe $\mathscr{S}$ et prend ses valeurs dans $\{-1, +1\}$. Elle est donc constante et on a soit $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}$, soit $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}$.

COROLLAIRE II. — **Une surface $\mathscr{S}$ de classe C^k, $k \geqslant 1$ de $\mathscr{E}_3$ définie par une équation $f(m) = 0$ est orientable.**

On sait que : $\qquad \forall m \in \mathscr{E} \qquad \operatorname{grad} f(m) \neq 0.$

On applique la proposition précédente en remarquant que :

$$\mathbf{n} : m \longmapsto \|\operatorname{grad} f(m)\|^{-1} \operatorname{grad} f(m)$$

est un champ de vecteurs unitaires normaux de classe C^{k-1}, et donc continu. □

EXEMPLE DE SURFACE NON ORIENTABLE. — *Le ruban de Möbius.* Cf. exercice 4-02.

EXERCICES

Les conventions faites à propos des exercices sur le chapitre 1 sont reprises. En particulier, il nous arrivera de parler, par abus de langage, de la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ même dans des cas où il existe des points de l'espace en lesquels f et df prennent la valeur 0.

3.1. — Σ étant des nappes définies par :

$$\begin{cases} x = v\cos u \\ y = v\sin u \\ z = au \end{cases} \qquad \begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^2 - v^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = v\cos u \\ y = v\sin u \\ z = \sin 2u \end{cases}$$

étudier l'intersection de $\operatorname{supp}\Sigma$ et d'un plan tangent à Σ.

3.2. — Tout plan tangent coupe suivant deux paraboles le support de la nappe définie par :

$$(u, v) \longmapsto O + u^2\mathbf{i} + uv\mathbf{j} + (v^2 + 2u)\mathbf{k}.$$

3.3. — Soit Σ la nappe d'équation cylindrique :

$$\rho = \frac{z^2 + a^2 - b^2}{2(b + a\cos\theta)}, \qquad (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2.$$

Montrer que les plans tangents à Σ en les points de cote z donnée ont un point commun.

3.4. — Déterminer une nappe paramétrée cartésienne, $z = f(x, y)$, telle que toutes les normales rencontrent l'axe Oz.

3.5. — Soient $\mathscr{S}$ le paraboloïde d'équation $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} - 2z = 0$ et a le point de coordonnée (α, β, γ). Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points de $\mathscr{S}$ en lesquels la normale à $\mathscr{S}$ contient a ; construire les projections de $\mathscr{C}$ sur les plans de coordonnées.

3.6. — Soit Σ la nappe réglée définie par :

$$x = a\,\mathrm{ch}\,u\cos v, \qquad y = b\,\mathrm{ch}\,u\sin v, \qquad z = c\,\mathrm{sh}\,u.$$

a) Ensemble des normales en les points d'un arc $\Gamma_u (u = C^{te})$.

b) Section par un plan d'équation $z = h$.

3.7. — Nature de la surface $\mathscr{S}$ d'équation : $x\sin\dfrac{z}{a} - y\cos\dfrac{z}{a} = 0$. Lieu des points de $\mathscr{S}$ en lesquels le plan tangent contient le point $O + a\mathbf{i}$.

3.8. — Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation : $z = \sin x . \sin y . \sin(x + y)$.
Déterminer les plans tangents parallèles à $(O ; \mathbf{i}, \mathbf{j})$. Étudier l'intersection de $\mathscr{S}$ et de l'un d'eux.

3.9. – Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation : $z^3 - xy = 0$.
Déterminer les plans tangents à $\mathscr{S}$ qui contiennent la droite d'équation :

$$(x = 2) \wedge (y - 3z + 3) = 0.$$

3.10. – Lieu des points du paraboloïde hyperbolique d'équation : $xy = az$ en lesquels :

a) Le plan tangent est tangent au cercle d'équation :

$$(z = 0) \wedge (x^2 + y^2 = R^2).$$

b) Le plan tangent fait un angle de $\pi/4$ avec la droite $O + \mathbb{R}\mathbf{k}$.

3.11. – Déterminer une C^1-nappe paramétrée cartésienne :

$$(]a, b[\times]c, d[, \qquad (x, y) \longmapsto O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k})$$

de façon que, le plan tangent au point de paramètre (x, y) rencontre l'axe $O + \mathbb{R}\mathbf{i}$ au point d'abscisse $2x$, et l'axe $O + \mathbb{R}\mathbf{j}$ au point d'ordonnée $2y/3$. En quel point recontre-t-il alors l'axe $O + \mathbb{R}\mathbf{k}$?

3.12. – Lieu de la projection orthogonale de O sur les plans tangents à la surface d'équation $xyz = a^3$.

3.13. – On donne une nappe régulière Σ. Déterminer les arcs réguliers Γ tracés sur Σ, tels que O se projette orthogonalement sur toute tangente à Γ en un point du plan xOy.

Montrer que si la nappe Σ est conique de sommet O (resp. de révolution d'axe Oz) les arcs Γ peuvent s'obtenir par quadratures.

3.14. – Montrer que tout plan qui contient la droite $O + \mathbb{R}\mathbf{k}$ coupe sous un angle constant la nappe représentée par :

$$x = a \cos u \sin v, \qquad y = a \sin u \sin v,$$
$$z = a\left(\cos v + \operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{v}{2}\right) + \varphi(u)$$

où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée, de classe C^1.

TRAJECTOIRES ORTHOGONALES. – *Soit $(C_\lambda)_{\lambda \in I}$ une famille d'arcs réguliers tracés sur une nappe régulière Σ de $\mathscr{E}_3$ euclidien (repères orthonormaux). On appelle trajectoire orthogonale de la famille tout arc régulier Γ tracé sur Σ, tel que par chacun de ses points passe un arc C_λ orthogonal à Γ au point considéré.*

3.15. – Soit Σ la nappe représentée par : $x = auv^2$, $y = au$, $z = au^2v$ $(a > 0)$. Trajectoires orthogonales des arcs $(C_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ définis par $uv = \lambda$.

3.16. – Trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes de la nappe :

a) $x = 2uv + v^2$, $\quad y = v\sqrt{3} - 4u^3/(3\sqrt{3}) + 4u^2/\sqrt{3}$, $\quad z = v$.

b) $x = \cos u - 2v \sin u$, $\quad y = \sin u + 2v \cos u$, $\quad z = 2v$.

3.17. – Trajectoires orthogonales de la famille des cercles tracés sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, passant par $O + R\mathbf{k}$, et tangents au cercle $(z = 0) \wedge (x^2 + y^2 = R^2)$.

3.18. — Trajectoires orthogonales (sur la nappe Σ qu'ils engendrent) de la famille des cercles C_λ tangents en O à Oz et centrés sur la droite $(y = a) \wedge (z = 0)$, au point $(\lambda, a, 0)$.

3.19. — Trajectoires orthogonales, sur la nappe Σ d'équation $z = x \operatorname{sh} y$, des arcs C_λ tels qu'en chacun de leurs points la normale à Σ fasse un angle constant λ avec $O + \mathbb{R}\mathbf{k}$.

LIGNES DE PLUS GRANDE PENTE. — **3.20.** — Pour chacune des nappes suivantes ($\mathscr{E}_3$ *euclidien, repères orthonormaux*), on demande les *lignes de plus grande pente* relatives à xOy, i.e. les trajectoires orthogonales des sections par les plans d'équations $z = \lambda$ (*lignes de niveau*) :

a) $z = \cos x + \cos y$; *b*) $z \operatorname{Log} x = \operatorname{Log} y$.

c) $x = a \dfrac{\sin u}{1 + \cos u \cos v}, \qquad y = a \dfrac{\sin v}{1 + \cos u \cos v}, \qquad z = a \dfrac{\cos u + \cos v}{1 + \cos u \cos v}.$

d) Nappe conique de sommet O sont les lignes de niveau, sont des cercles.

3.21. — Trouver les arcs tracés sur la nappe Σ dont toutes les tangentes sont tangentes à la nappe Σ_1, dans les cas suivants :

a) (Σ) $x^2 + y^2 = 2pz$, (Σ_1) $x^2 + y^2 = -2pz$;

b) (Σ) $xy = az$, (Σ_1) $xy = bz$;

c) (Σ) $x^2 + y^2 = k^2z^2$, (Σ_1) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

(dans le dernier cas, on rectifiera les arcs obtenus).

3.22. — Trouver les lignes de striction (3.2.2) de chacune des nappes réglées représentées par :

a) $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} x = tz + t^2 \\ y = t^2 z + t \\ z = z \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} x = (a + z)\cos t \\ y = (a - z)\sin t \\ z = z \end{cases}$

d) $x^2 - 4y^2 - az = 0$; *e*) $x^3 + xy + z = 0$.

3.23. — Montrer que les plans $\mathscr{P}_t$ d'équations : $x \sin t - y \cos t + z \operatorname{ch} t = a \operatorname{sh} t$ sont les plans osculateurs à un arc géométrique que l'on déterminera.

3.24. — On donne une application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^1. Montrer que les plans $\mathscr{P}_t$ d'équations :

$$2t^2x + 2ty + z - 4\varphi(t) = 0$$

sont les plans osculateurs à une hélice.

3.25. — Trouver les surfaces développables dont toutes les génératrices rencontrent :

a) une droite donnée; *b*) un cercle donné.

3.26. — Montrer que la nappe représentée par :

$$x = a\frac{-vu^2 - 2u + v}{(u^2+1)^2}, \qquad y = a\frac{u^2(u^2 - 2uv - 1)}{(u^2+1)^2}, \qquad z = av$$

est développable et déterminer son arête de rebroussement.

3.27. — Déterminer $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour que la nappe représentée par :

$$x = tz + \varphi(t), \qquad y = z\varphi(t) + t^3/3, \qquad z = z$$

soit développable. Discuter. Trouver, s'il y a lieu, l'arête de rebroussement.

3.28. — Trouver les nappes développables contenant les deux paraboles d'équations :

$$(z = 0) \wedge (4px - y^2 = 0) \qquad \text{et} \qquad (z = a) \wedge (4py - x^2 = 0)$$

3.29. — Soit Σ la nappe réglée représentée par :

$$x = z\cos\theta + a\sin\theta, \qquad y = z\sin\theta + a\cos\theta, \qquad z = z$$

Trouver la ligne de striction et la comparer au contour apparent dans la direction $\mathbb{R}\mathbf{k}$. Expliquer le résultat obtenu.

3.30. — Paraboloïde de raccordement. — Soit Σ la C^∞-nappe géométrique réglée représentée par $(\mathbb{R}^2, F)$, où

$$F(u, v) = O + v\cos u\mathbf{i} + v\sin u\mathbf{j} + a\sin 2u\mathbf{k}.$$

a) Montrer que supp Σ est inclus dans le conoïde Plücker d'équation :

$$z(x^2 + y^2) - 2axy = 0$$

b) Soit $G_u(u = C^{te})$ une génératrice rectiligne de Σ de support $\mathscr{G}_u$. On désigne par Σ_u la nappe réglée engendrée par la normale à Σ au point de paramètre (u, v) lorsque v parcourt $\mathbb{R}$. Montrer que supp Σ_u est, en général, un paraboloïde hyperbolique à plans directeurs orthogonaux, exceptionnellement une droite.

c) Montrer que la nappe réglée Σ'_u déduite de Σ_u par rotation de $\pi/2$ autour de $\mathscr{G}_u$ se raccorde à Σ le long de $\mathscr{G}_u$.

d) Étendre (sous des conditions de régularité) ces résultats à une génératrice quelconque d'une nappe réglée quelconque.

3.31. — Nature de la trace sur le plan xOy du cylindre circonscrit à la surface d'équation $x^2 + y^2 = \sin^2 z$ parallèlement à $\mathbb{R}(\mathbf{i} - \mathbf{k})$.

3.32. — Contour apparent du conoïde de Plücker :

$$z(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0, \quad (a > 0)$$

pour la direction $\mathbb{R}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$.

3.33. — Équation du cône de sommet $O + a\mathbf{k}$ circonscrit à la surface d'équation :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - a^3 = 0, \quad (a > 0).$$

3.34. — On donne la sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2Rx = 0$, $(R > 0)$.

a) Équation du cône Σ de sommet (x_0, y_0, z_0) circonscrit à S.

b) On suppose $z_0 > 2R$. Montrer que la trace de Σ sur xOy est une ellipse qui admet un foyer et une longueur de petit axe indépendants de (x_0, y_0).

3.35. — Soit $\mathscr{S}$ le conoïde droit d'axe Oz circonscrit à la sphère d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ay = 0, \qquad (a > 0).$$

a) Équation de $\mathscr{S}$.

b) Montrer que le contour apparent de $\mathscr{S}$, de point de vue $O + a\mathbf{j}$ est tracé sur un cylindre parabolique.

c) Montrer que le cône circonscrit à $\mathscr{S}$ de sommet $O + b\mathbf{i}$, $b \neq 0$, est de révolution.

3.36. — *a*) Soit $\mathscr{K}$ le cône d'équation (en repère orthonormal) :

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0$$

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe trois génératrices de $\mathscr{K}$ formant un trièdre trirectangle est $a + a' + a'' = 0$, et que, lorsque cette condition est remplie, il existe une infinité de trièdres trirectangles formés de génératrices de K (un tel cône est dit équilatère).

b) Lieu des sommets des cônes équilatères circonscrits à la surface d'équation :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0, \quad (ABC \neq 0) \quad \left[\text{resp.}\ \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0\right].$$

4

ÉTUDE MÉTRIQUE DES NAPPES ET DES SURFACES

($\mathscr{E}$, E) désigne un espace affine euclidien orienté de dimension 3 ; tous les repères utilisés sont orthonormaux directs.

4.1. PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES LOCALES

L'étude des paragraphes **4**.1.*1 et* **4**.1.*2 ne figure pas au programme des* C.P.

Position du problème. — Au **4**.1.*1*, la démarche est celle qui a été suivie dans le cas des arcs :

— On définit des *éléments métriques* d'une nappe géométrique régulière et orientée Σ en l'un de ses points M (en s'assurant naturellement de l'indifférence du choix des représentants utilisés pour ce faire).

— On pose ensuite :

DÉFINITION. — **On appelle invariants métriques de la C^k-nappe paramétrée** (D, $(u, v) \mapsto F(u, v)$) **régulière et orientée, $k \geqslant 2$, au point de paramètre (u, v), les éléments métriques de la nappe géométrique Σ orientée représentée par (D, F), au point M représenté par (D, F, (u, v)).**

Ici nous ne disposons pas de représentant privilégié (i.e. normal) de Σ, et les deux questions sont imbriquées : P_M, $\mathbf{n}_m$, Φ_M, h_M, Ψ_M, ... vont apparaître simultanément comme éléments de Σ en M et comme invariants de (D, F) en $M(u, v)$.

NOTATIONS. — Soit Σ une C^k-nappe géométrique régulière et orientée, $k \geqslant 2$.

• Au point M de Σ nous associons son image m_M, le plan tangent orienté $(\mathscr{P}_M, P_M)$ en M à Σ, la normale orientée $\mathscr{N}_M$ en M à Σ, le vecteur unitaire $\mathbf{n}_M$ de $\mathscr{N}_M$; nous avons vu que ces éléments ne dépendent pas du choix d'un représentant.

• Dans la pratique, nous utiliserons un représentant (D, F) de Σ, ce qui revient à travailler sur une nappe paramétrée ([1]). Nous disposons alors de la base directe $\mathscr{B}_{u,v} = (F'_u(u, v), F'_v(u, v))$ de P_M, et $\mathbf{n}_M$ s'écrit $\mathbf{N}(u, v)$, avec :

$$\mathbf{N} = \frac{1}{H} F'_u \wedge F'_v, \qquad \text{où} \qquad H = \|F'_u \wedge F'_v\|.$$

([1]) Il va de soi que la nappe paramétrée (D, F) pourra être une paramétrisation locale d'une surface (au sens des sous-variétés); l'étude permet donc de définir des invariants métriques d'une surface en l'un de ses points.

Les applications H et $\mathbf{N}$ de D dans $\mathbb{R}$ et E sont de classe C^{k-1} ; on a $H > 0$, ce qui traduit la régularité de Σ.

En considérant les dérivées partielles de l'application $\|\mathbf{N}\|^2$, de classe C^{k-1}, on constate que $(\mathbf{N}|\mathbf{N}'_u)$ et $(\mathbf{N}|\mathbf{N}'_v)$ coïncident avec l'application nulle de D dans $\mathbb{R}$: pour tout $(u, v) \in D$, $\mathbf{N}'_u(u, v)$ et $\mathbf{N}'_v(u, v)$ appartiennent à P_M.

Remarque. — Dans la pratique, on utilise un repère orthonormal direct $(O\,;\,\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de $\mathscr{E}$ et on note :

$$F(u, v) = O + X(u, v)\mathbf{i} + Y(u, v)\mathbf{j} + Z(u, v)\mathbf{k}.$$

On a ainsi :

$$F'_u \wedge F'_v = \frac{D(Y, Z)}{D(u, v)}\mathbf{i} + \frac{D(Z, X)}{D(u, v)}\mathbf{j} + \frac{D(X, Y)}{D(u, v)}\mathbf{k}$$

4.1.*1*. Les deux formes quadratiques fondamentales

1° Définition. — **La forme quadratique définie positive Φ_M de P_M dont la forme polaire est la restriction φ_M à P_M du produit scalaire euclidien de E est dite** *première forme quadratique fondamentale de Σ en M et de (D, F) en $M(u, v)$.*

Elle ne dépend évidemment pas du choix du représentant (D, F) de Σ, mais ce choix étant fait, elle s'exprime dans la base $\mathscr{B}_{u,v}$ par :

$$\Phi_M(F'_u(u, v)\,\mathrm{d}u + F'_v(u, v)\,\mathrm{d}v) = \|F'_u(u, v)\,\mathrm{d}u + F'_v(u, v)\,\mathrm{d}v\|^2$$

où $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$ est le vecteur générique de $\mathbb{R}^2$, ce qui s'écrit :

$$\Phi_M(F'_u(u, v)\,\mathrm{d}u + F'_v(u, v)\,\mathrm{d}v) = E(u, v)\,\mathrm{d}u^2 + 2F(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G(u, v)\,\mathrm{d}v^2 \quad (1)$$

en désignant par E, F, G les applications ([1]) $\|F'_u\|^2$, $(F'_u|F'_v)$, $\|F'_v\|^2$ de classe C^{k-1} de D dans $\mathbb{R}$.

Notons que l'égalité de Lagrange fournit : $H = \sqrt{EG - F^2}$.

Applications. — *a*) Soit $\Gamma = F \circ \gamma$ un arc tracé sur Σ, où γ est un arc de $\mathbb{R}^2$, de classe C^1, dont un représentant est $([a, b], t \longmapsto (u(t), v(t)))$; Γ admet le représentant de classe $C^1([a, b], t \longmapsto F(u(t), v(t))$ et est ainsi rectifiable ; le vecteur dérivée première étant au point de paramètre t :

$$F'_u(u(t), v(t))u'(t) + F'_v(u(t), v(t))v'(t)$$

la longueur de Γ est :

$$\int_a^b [E(u(t), v(t))u'^2(t) + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t), v(t))v'^2(t)]^{1/2}\,\mathrm{d}t$$

([1]) Deux applications, prenant respectivement leurs valeurs dans $\mathscr{E}$ et dans $\mathbb{R}$, sont désignées par le même symbole F ; le contexte permet de les distinguer.

Si Γ est régulier, tout paramètre normal s vérifie :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E(u(t), v(t))u'^2(t) + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t), v(t))v'^2(t)$$

que nous retiendrons sous la forme symbolique :

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

b) L'orthogonalité des vecteurs $\mathbf{w}_i (i \in \mathbb{N}_2)$ tangents en M à Σ s'écrit, en introduisant leurs coordonnées (ξ_i, η_i) dans la base $\mathscr{B}_{u,v}$:

$$E(u, v)\xi_1\xi_2 + F(u, v)(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + G(u, v)\eta_1\eta_2 = 0 \qquad (2)$$

— En particulier si les $\Gamma_i = F \circ \gamma_i$, $i \in \mathbb{N}_2$, sont deux arcs géométriques réguliers, tracés sur Σ et passant par M, de représentant $(I_i, t \longmapsto F(u_i(t), v_i(t))$ tels que le point M de Γ_i corresponde à la valeur t_i du paramètre, il suffit d'écrire (2) avec $\xi_i = u_i'(t_i)$ et $\eta_i' = v_i'(t_i)$ pour obtenir la condition d'orthogonalité des Γ_i en M, qui se retient sous la forme symbolique :

$$E\,du_1\,du_2 + F(du_1\,dv_2 + du_2\,dv_1) + G\,dv_1\,dv_2 = 0$$

— Plus généralement, en utilisant

$$\sqrt{\Phi_M(\mathbf{w}_1) \times \Phi_M(\mathbf{w}_2)}\cos\omega = \psi_M(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$$

le lecteur obtiendra l'angle en M de deux arcs tracés sur Σ et passant par M.

Cas d'un représentant cartésien. — Ici :

$$F(x, y) = O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}.$$

On calcule :

$$F_x'(x, y) = \mathbf{i} + p(x, y)\mathbf{k}; \qquad F_y'(x, y) = \mathbf{j} + q(x, y)\mathbf{k}.$$

D'où :

$$E = 1 + p^2, \qquad F = pq, \qquad G = 1 + q^2, \qquad H = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$
$$\mathbf{N} = H^{-1}(-p\mathbf{i} - q\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

et : $$ds^2 = (1 + p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2$$

2° *L'endomorphisme de Weingarten de Σ en M et de (D, F) en $M(u, v)$.* — Dorénavant nous supposons $k \geqslant 2$. Les différentielles de F et de $\mathbf{N}$ au point donné (u, v) de $\mathbb{R}^2$, abréviativement notées dF et $d\mathbf{N}$, sont des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans E, à valeurs dans P_M. Elles induisent donc des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans P_M, que nous noterons DF et $D\mathbf{N}$; dF étant de rang 2, DF est un isomorphisme et nous disposons de l'endomorphisme

$$h = -D\mathbf{N} \circ (DF)^{-1}$$

de P_M (le signe $-$ est introduit pour la commodité des calculs qui vont suivre); h est défini par :

$$[h(F_u'(u, v)) = -\mathbf{N}_u'(u, v)] \wedge [h(F_v'(u, v)) = -\mathbf{N}_v'(u, v)].$$

PROPOSITION I. — **L'endomorphisme h dépend de Σ et de M, mais non du choix du représentant (D, F), ce qui autorise à le noter que h_M; on dit quelquefois que h_M est l'endomorphisme de Weingarten de Σ en M et de (D, F) en $M(u, v)$.**

Considérons un second représentant (Δ, G), avec $G = F \circ \theta$ et $\theta \in \mathrm{Diff}^k_+ (\Delta, D)$, de la nappe orientée Σ, et associons lui l'application :

$$\mathbf{N}_1 = \|G'_\lambda \wedge G'_\mu\|^{-1} . G'_\lambda \wedge G'_\mu$$

qui vérifie $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N} \circ \theta$.

En introduisant, comme ci-dessus, $\mathrm{D}G$ et $\mathrm{D}\mathbf{N}_1$ et en utilisant :

$$\mathrm{d}G = \mathrm{d}F \circ \mathrm{d}\theta \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}\mathbf{N}_1 = \mathrm{d}\mathbf{N} \circ \mathrm{d}\theta$$

(où $\mathrm{d}\theta$ est mis pour $\mathrm{d}\theta(\lambda, \mu)$, avec $(\lambda, \mu) = \theta^{-1}(u, v)$), il vient :

$$\mathrm{D}G = \mathrm{D}F \circ \mathrm{d}\theta \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D}\mathbf{N}_1 = \mathrm{D}\mathbf{N} \circ \mathrm{d}\theta$$

et donc :

$$\mathrm{D}\mathbf{N}_1 \circ (\mathrm{D}G)^{-1} = \mathrm{D}\mathbf{N} \circ (\mathrm{D}F)^{-1}. \qquad \square$$

PROPOSITION II. — **L'endomorphisme h_M est symétrique.**

Les applications $(F'_u|\mathbf{N})$ et $(F'_v|\mathbf{N})$, de classe C^{k-1}, de D dans $\mathbb{R}$ coïncident avec l'application nulle de D dans $\mathbb{R}$. En écrivant qu'elles ont des dérivées partielles nulles, on obtient l'égalité des applications de classe C^{k-2} de D dans $\mathbb{R}$:

$$(F''_{u^2}|\mathbf{N}) \text{ et } -(F'_u|\mathbf{N}'_u), \text{ qui seront notées } L;$$
$$(F''_{uv}|\mathbf{N}),\ -(F'_u|\mathbf{N}'_v) \text{ et } -(F'_v|\mathbf{N}'_u), \text{ qui seront notées } M;$$
$$(F''_{v^2}|\mathbf{N}) \text{ et } -(F'_v|\mathbf{N}'_v) \text{ qui seront notées } N.$$

Pour tous $\mathbf{w}_i = \xi_i F'_u(u, v) + \eta_i F'_v(u, v)$, $i \in \mathbb{N}_2$, $(\mathbf{w}_1|h_M(\mathbf{w}_2))$ s'écrit :

$$-(\xi_1 F'_u(u, v) + \eta_1 F'_v(u, v)|\xi_2 \mathbf{N}'_u(u, v) + \eta_2 \mathbf{N}'_v(u, v))$$

ou :

$$L(u, v)\xi_1\xi_2 + M(u, v)(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + N(u, v)\eta_1\eta_2$$

On en déduit :

$$(\mathbf{w}_1|h_M(\mathbf{w}_2)) = (\mathbf{w}_2|h_M(\mathbf{w}_1)). \qquad \square$$

La proposition II justifie :

DÉFINITION. — **La forme quadratique sur P_M, Ψ_M, dont la forme polaire ψ_M s'écrit :**

$$\psi_M(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = (\mathbf{w}_1|h_M(\mathbf{w}_2)) \tag{3}$$

est dite seconde forme fondamentale de Σ en M et de (D, F) en $M(u, v)$ (elle ne dépend pas du choix du représentant de Σ).

Deux vecteurs ψ_M-orthogonaux de P_M sont dits conjugués ; deux droites de P_M dirigées par des vecteurs conjugués sont dites conjuguées.

Dans la base $\mathcal{B}_{u,v}$, la forme quadratique Ψ_M s'écrit :

$$\Psi_M(F'_u(u, v)\,\mathrm{d}u + F'_v(u, v)\,\mathrm{d}v) = L(u, v)\,\mathrm{d}u^2 + 2M(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N(u, v)\,\mathrm{d}v^2.$$

Le second membre de l'égalité précédente s'écrivant :

$$-\,(F'_u(u, v)\,\mathrm{d}u + F'_v(u, v)\,\mathrm{d}v \,|\, \mathbf{N}'_u(u, v)\,\mathrm{d}u + \mathbf{N}'_v(u, v)\,\mathrm{d}v)$$

il est commode de retenir l'expression : $\psi_M = -\,(\mathrm{d}m|\mathrm{d}\mathbf{N})$.

Remarques. — *a*) En introduisant les fonctions *produits mixtes :*

$$D = [F'_u, F'_v, F''_{u^2}], \qquad D' = [F'_u, F'_v, F''_{uv}]), \qquad D'' = [F'_u, F'_v, F''_{v^2}]$$

on constate :

$$L = D/H, \qquad M = D'/H, \qquad N = D''/H.$$

b) Si, en gardant le même espace affine sous-jacent, nous changeons la structure euclidienne orientée de $\mathcal{E}$, alors tous les produits mixtes sont multipliés par un même réel non nul (vérification laissée au lecteur), et donc (bien que H change) Ψ_M est remplacée par une forme proportionnelle. Pour $\mathbf{w}$ (resp. $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$) donné, la nullité de $\Psi_M(\mathbf{w})$ (resp. $\psi_M(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$) ne dépend donc que de la structure affine sous-jacente. La conjugaison est donc une propriété affine. Nous reprendrons cette remarque au **4**.1.*3*, 1°.

Cas d'un représentant cartésien. — On complète le calcul du 1° *in fine :*

$$F''_{x^2}(x, y) = r(x, y)\mathbf{k}\,; \qquad F''_{xy}(x, y) = s(x, y)\mathbf{k}\,;$$
$$F''_{y^2}(x, y) = t(x, y)\mathbf{k}.$$

On en déduit :

$$L = r/H\,; \qquad M = s/H\,; \qquad N = t/H,$$

et :

$$\Psi_M(F'_x\,\mathrm{d}x + F'_y\,\mathrm{d}y) = \frac{r\,\mathrm{d}x^2 + 2s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + t\,\mathrm{d}y^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Application. — Pour étudier l'intersection du support $\mathcal{S}$ commun à (D, F) et à $\boldsymbol{\Sigma}$ et du plan tangent $\mathcal{P}_M$ on peut (quitte à remplacer $\boldsymbol{\Sigma}$ par une sous-nappe) supposer que l'on se trouve dans le cas d'une représentation cartésienne. En comparant Ψ_M à la forme quadratique $(\xi, \eta) \mapsto r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2$ qui est intervenue dans la discussion du **3**,1.*3*, 2°, il vient :

Théorème. — **Le point M de $\boldsymbol{\Sigma}$ (resp. le point $M(u, v)$ de (D, F)) est *elliptique* (disposition *en ballon*) si, et seulement si la seconde forme quadratique fondamentale en M, Ψ_M, est définie; il est *hyperbolique* (disposition *en col*) si, et seulement si Ψ_M est *non dégénérée* et *non définie;* il est *parabolique* si, et seulement si Ψ_M est dégénérée.**

Dans les deux derniers cas, Ψ_M admet des vecteurs isotropes non nuls; les droites de P_M qu'ils dirigent sont dites *directions asymptotiques* de Σ en M (resp. de (D, F) en $M(u, v)$); dans le cas hyperbolique on reconnaît les directions des tangentes en M aux deux arcs dont la réunion des supports constitue $\mathscr{P}_M \cap \operatorname{supp} \Sigma$.

3° ***Orthogonalisation de Ψ_M dans l'espace euclidien (P_M, φ_M); directions principales de Σ en M et de (D, F) en $M(u, v)$.*** — D'après II.**2**.2.*2*, 1°, l'endomorphisme symétrique h_M de P_M admet deux valeurs propres (réelles) σ_1 et σ_2, distinctes ou confondues, et il existe une base de P_M à la fois φ_M-orthogonale et ψ_M-orthogonale (i.e. formée de vecteurs unitaires à la fois orthogonaux et conjugués); diag (σ_1, σ_2) représente à la fois h_M et Ψ_M dans cette base, qui est formée de vecteurs propres de h_M.

Reprenant (D, F), nous avons donc à chercher les $(\sigma, \mathbf{w}) \in \mathbb{R} \times P_M \setminus \{0\}$ tels que $h_M(\mathbf{w}) = \sigma \mathbf{w}$, ce qui s'écrit (vérification immédiate) :

$$\forall \mathbf{w}' \in P_M \qquad (\mathbf{w}' | h_M(\mathbf{w}) - \sigma \mathbf{w}) = 0$$

ou encore, en introduisant les coordonnées (ξ, η) et (ξ', η') de $\mathbf{w}$ et $\mathbf{w}'$ dans la base $\mathscr{B}_{uv}$ (et en écrivant abréviativement L pour $L(u, v), \ldots$) :

$$\forall (\xi', \eta') \in \mathbb{R}^2 \qquad (L - \sigma E)\xi\xi' + (M - \sigma F)(\xi\eta' + \xi'\eta) + (N - \sigma G)\eta\eta' = 0$$

ou enfin :

$$\begin{cases} (L - \sigma E)\xi + (M - \sigma F)\eta = 0 \\ (M - \sigma F)\xi + (N - \sigma G)\eta = 0 \end{cases}$$

Ce système fournit des $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ si, et seulement si σ est racine de l'équation du second degré :

$$\begin{vmatrix} L - \sigma E & M - \sigma F \\ M - \sigma F & N - \sigma G \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

qui s'écrit :

$$(EG - F^2)\sigma^2 - (GL + EN - 2FM)\sigma + (LN - M^2) = 0$$

Les valeurs propres σ_1 et σ_2 de h_M sont les racines (nécessairement réelles) de (4). Elles dépendent de Σ, de M, mais non du représentant (D, F); il en est de même de $\sigma_1 + \sigma_2$ et $\sigma_1\sigma_2$, respectivement égaux à tr h_M et det h_M, que nous retrouverons au **4**.1.*2*, 3°. Retenons :

$$\boxed{\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{GL + EN - 2FM}{2H^2} \quad \Bigg| \quad \sigma_1\sigma_2 = \frac{LN - M^2}{H^2}} \tag{5}$$

Remarque. — On retrouve (4) en écrivant que la forme quadratique $\Psi_M - \sigma\Phi_M$ est dégénérée.

CAS GÉNÉRAL : $\sigma_1 \neq \sigma_2$. — A chaque σ_i correspond une droite de vecteurs propres de h_M, dirigée par l'un quelconque des vecteurs non nuls donnés par les équations (nécessairement compatibles) :

$$((L - \sigma_i E)\xi + (M - \sigma_i F)\eta = 0) \wedge ((M - \sigma_i F)\xi + (N - \sigma_i G)\eta = 0) \qquad (6)$$

Les deux droites de P_M ainsi obtenues, caractérisées par le fait qu'elles sont *orthogonales et conjuguées*, sont dites *directions principales*. Elles constituent la gerbe dont une équation s'obtient en éliminant σ_i entre les équations (6) ce qui donne :

$$\begin{vmatrix} L\xi + M\eta & E\xi + F\eta \\ M\xi + N\eta & F\xi + G\eta \end{vmatrix} = 0$$

i.e.

$$(FL - EM)\xi^2 + (GL - EN)\xi\eta + (GM - FN)\eta^2 = 0 \qquad (7)$$

CAS OÙ σ_1 ET σ_2 ONT UNE VALEUR COMMUNE σ. — C'est le cas où on peut représenter h_M et Ψ_M par une matrice de la forme σI_2, i.e. le cas où il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que $\Psi_M = \sigma\Phi_M$, égalité qui s'écrit :

$$(L = \sigma E) \wedge (M = \sigma F) \wedge (N = \sigma G)$$

Toute droite de P_M est alors droite de vecteurs propres de h_M et peut être considérée comme direction principale de Σ en M (resp. de (D, F) en $M(u, v)$). On dit que M est un *ombilic* de Σ (resp. de (D, F)).

REMARQUE. — Pour que M soit ombilic, il faut et il suffit qu'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que F'_u et F'_v (et donc tout vecteur de P_M) soit vecteur propre de h_M, associé à la valeur propre σ, ce qui, compte tenu de $h_M(F'_u) = -\mathbf{N}'_u$ et $h_M(F'_v) = -\mathbf{N}'_v$, s'écrit :

$$(\mathbf{N}'_u(u, v) = -\sigma F'_u(u, v)) \wedge (\mathbf{N}'_v(u, v) = -\sigma F'_v(u, v))$$

Cas d'une représentation cartésienne. — Ici :

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2, \quad H = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$
$$L = r/H, \quad M = s/H, \quad N = t/H.$$

Retenons :

$$\boxed{\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{(1 + q^2)r + (1 + p^2)t - 2pqs}{2(1 + p^2 + q^2)^{3/2}} \qquad \sigma_1\sigma_2 = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}} \qquad (8)$$

Au **4.1.2** nous dirons que $\sigma_1 \sigma_2$ est la *courbure totale* de Σ en M (resp. de (D, F) en $M(u, v)$). D'où :

CONSÉQUENCE. — **Selon que le point M (resp. $M(u, v)$) est elliptique, hyperbolique ou parabolique, la courbure totale en M (resp. $M(u, v)$) est strictement positive, strictement négative ou nulle.**

EXERCICE. — *Montrer qu'une C^k-nappe Σ dont tous les points sont des ombilics ($k \geqslant 3$) a un support $\mathscr{S}$ inclus dans une sphère ou dans un plan.*

Σ étant représentée par (D, F), il existe une application $\sigma : D \to \mathbb{R}$ telle que :

$$(\mathbf{N}'_u = -\sigma F'_u) \wedge (\mathbf{N}'_v = -\sigma F'_v).$$

Comme F'_u ne prend pas la valeur 0, σ est de classe C^{k-2}, et donc C^1. En égalant deux expressions de $\mathbf{N}''_{uv}$, il vient : $\sigma'_v F'_u = \sigma'_u F'_v$ ce qui, (F'_u, F'_v) étant libre, donne : $\sigma'_u = 0$ et $\sigma'_v = 0$.

Ainsi σ est une application de l'ouvert connexe D dans $\mathbb{R}$ admettant une différentielle nulle en tout point de D ; elle est donc constante.

— Si $\sigma \neq 0$, on constate que l'application $F + \sigma^{-1}\mathbf{N}$ de D dans $\mathscr{E}$ est constante. O désignant sa valeur, $\mathscr{S}$ est inclus dans la sphère $(O, |\sigma^{-1}|)$.

— Si $\sigma = 0$, l'application $\mathbf{N}$ est constante. En désignant par $\mathbf{N}_0$ sa valeur et par O un point fixe, on vérifie que l'application $(u, v) \longmapsto (\mathbf{N}_0 | \overrightarrow{OF(u, v)})$ de D dans $\mathbb{R}$ est constante, ce qui entraîne que $\mathscr{S}$ est inclus dans un plan orthogonal à $\mathbf{N}_0$.

4.1.2. Courbure normale ; courbure géodésique ; torsion géodésique

Dans ce paragraphe nous considérons la C^k-nappe Σ, orientée et régulière et un C^p-arc géométrique Γ *orienté et régulier* tracé sur Σ ($2 \leqslant p \leqslant k$).

Nous allons définir des *éléments géométriques* de Γ, *relativement à* Σ, *au point M de Γ identifié à un point de Σ.*

1° ***Repère de Darboux-Ribeaucour.*** — A tout point M de Γ, nous associons son image m_M, ainsi que :

— le vecteur unitaire $\boldsymbol{\tau}_M$ de la tangente orientée en M à Γ ;

— le vecteur unitaire $\mathbf{n}_M$ de la normale orientée en M à Σ ;

— le vecteur $\mathbf{g}_M = \mathbf{n}_M \wedge \boldsymbol{\tau}_M$ unitaire de la *normale géodésique* orientée en M à Γ (i.e. normale en M à Γ incluse dans le plan tangent en M à Σ).

Nous dirons que le repère orthonormal $(m_M ; \boldsymbol{\tau}_M, \mathbf{g}_M, \mathbf{n}_M)$ est le *repère de Darboux-Ribaucour de Γ en M.*

2° ***Formules de Darboux.*** — On utilise un représentant normal (J, h) de Γ et on note : $m_M = h(s)$, $\boldsymbol{\tau}_M = \boldsymbol{\tau}(s)$, $\mathbf{n}_M = \mathbf{n}(s)$; $\mathbf{g}_M = \mathbf{g}(s)$. L'application $\boldsymbol{\tau} = h'$ est de classe C^{p-1}.

En introduisant un représentant (D, F) de Σ on constate que l'on peut écrire $h(s)$ sous la forme $F(u(s), v(s))$ et que $\mathbf{n}(s) = \mathbf{N}(u(s), v(s))$, ce qui montre que les applications $\mathbf{n}$ et $\mathbf{g}$ sont de classe C^{p-1}.

En dérivant les applications constantes de J dans $\mathbb{R}$:

$$\|\boldsymbol{\tau}\|^2, \quad \|\mathbf{g}\|^2, \quad \|\mathbf{n}\|^2, \quad (\mathbf{g}|\mathbf{n}), \quad (\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}), \quad (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{g}),$$

le lecteur vérifiera [1] que, pour tout $s \in J$, la matrice $A(s)$ du système de vecteurs $(\boldsymbol{\tau}'(s), \mathbf{g}'(s), \mathbf{n}'(s))$ dans la base orthonórmale $(\boldsymbol{\tau}(s), \mathbf{g}(s), \mathbf{n}(s))$ de E est antisymétrique. On l'écrit :

$$A(s) = \begin{bmatrix} 0 & -c_g(s) & -c_n(s) \\ c_g(s) & 0 & \gamma_g(s) \\ c_n(s) & -\gamma_g(s) & 0 \end{bmatrix}$$

et on dit que :

- $\gamma_g(s) = (\mathbf{g}(s)|\mathbf{n}'(s)) = -(\mathbf{n}(s)|\mathbf{g}'(s))$

est la *torsion géodésique* de Γ en M (relativement à Σ),

- $c_n(s) = (\mathbf{n}(s)|\boldsymbol{\tau}'(s)) = -(\boldsymbol{\tau}(s)|\mathbf{n}'(s))$

est la *courbure normale* de Γ en M (relativement à Σ),

- $c_g(s) = (\mathbf{g}(s)|\boldsymbol{\tau}'(s)) = -(\boldsymbol{\tau}(s)|\mathbf{g}'(s))$

est la *courbure géodésique* de Γ en M (relativement à Σ),

ce qui se justifie par le fait que, les changements d'abscisse curviligne se faisant par applications affines, il s'agit d'invariants (pour le couple (Σ, Γ)).

— Nous disposons ainsi d'applications γ_g, c_n et c_g de J dans $\mathbb{R}$, de classe C^{p-2}, et nous avons les « formules de Darboux » :

$\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = c_g\mathbf{g} + c_n\mathbf{n}$	$\dfrac{d\mathbf{g}}{ds} = -c_g\boldsymbol{\tau} - \gamma_g\mathbf{n}$	$\dfrac{d\mathbf{n}}{ds} = -c_n\boldsymbol{\tau} + \gamma_g\mathbf{g}$	(1)

En utilisant alors :

$$\boldsymbol{\tau} = F'_u \frac{du}{ds} + F'_v \frac{dv}{ds} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \mathbf{N}'_u \frac{du}{ds} + \mathbf{N}'_v \frac{dv}{ds}$$

et en se référant à la définition de h_M, on constate : $\dfrac{d\mathbf{n}}{ds} = -h_M(\boldsymbol{\tau})$ et :

$c_n = \Psi_M(\boldsymbol{\tau})$	$\gamma_g = -\psi_M(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{g})$	(2)

[1] Il s'agit d'une propriété générale des « repères mobiles orthonormaux ».

REMARQUES. — *a*) *En un point non bi-régulier de* Γ, *la courbure normale et la courbure géodésique sont nulles.*

Résulte de la première formule (1), avec $\boldsymbol{\tau}'(s) = 0$.

b) Si on remplace Γ par l'arc orienté opposé (sans toucher à Σ), les applications $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{n}$ sont changées en $-\boldsymbol{\tau}$, $-\mathbf{g}$, $\mathbf{n}$, les applications $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$, $\frac{d\mathbf{g}}{ds}$, $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$ sont changées en $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$, $\frac{d\mathbf{g}}{ds}$, $-\frac{d\mathbf{n}}{ds}$ et donc (d'après (1)), les applications c_n, c_g, γ_g sont changées en c_n, $-c_g$, γ_g (pour c_n et γ_g, on le retrouve par (2)).

c) Si on remplace Σ par la nappe orientée opposée (sans toucher à Γ), alors $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{n}$ sont changées en $\boldsymbol{\tau}$, $-\mathbf{g}$, $-\mathbf{n}$, et donc c_n, c_g, γ_g sont changées en $-c_n$, $-c_g$, γ_g.

d) Si on change l'orientation de $\mathscr{E}$, alors $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{n}$ sont changées en $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{g}$, $-\mathbf{n}$, et donc c_n, c_g, γ_g sont changées en $-c_n$, c_g, $-\gamma_g$.

Interprétation de c_n, c_g ***et*** γ_g. — Nous conservons l'hypothèse $2 \leqslant p \leqslant k$, qui implique l'existence de la courbure c de Γ, et nous supposons en outre que Γ est bi-régulier. Nous disposons ainsi du trièdre de Frenet $\mathscr{F} = (m; \boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\beta})$; $\boldsymbol{\tau}$ est de classe C^{p-1} ; $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\beta}$, c sont de classe C^{p-2}.

L'application $\mathbf{n}$ étant de classe C^{p-1}, nous constatons, en utilisant le

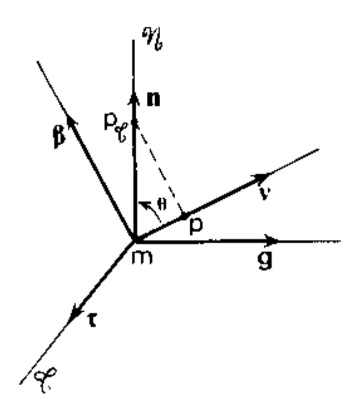


FIG. 52.

théorème du relèvement du **1.4.***1*, 2°, qu'il existe une application $\theta : J \to \mathbb{R}$, de classe C^{p-2}, unique modulo 2π, telle que :

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}\cos\theta + \boldsymbol{\beta}\sin\theta, \qquad \text{et donc :} \qquad \mathbf{g} = \mathbf{v}\sin\theta - \boldsymbol{\beta}\cos\theta$$

(Pour s donné, $\theta(s)$ est une détermination de la mesure d'angle $(\mathbf{v}(s), \mathbf{n}(s))$, dans le plan normal orienté par $\boldsymbol{\tau}(s)$ qui lui est orthogonal).

En utilisant la première formule de Frenet, on obtient :

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = c\mathbf{v} = c\,(\mathbf{g}\sin\theta + \mathbf{n}\cos\theta)$$

ce qui fournit, par comparaison avec (1) :

$$\boxed{c_n = c\cos\theta \quad\Big|\quad c_g = c\sin\theta} \qquad (3)$$

REMARQUE. — Ces relations restent vraies si Γ admet des points non bi-réguliers car en l'un de ces points on a :

$$c(s) = c_n(s) = c_g(s) = 0,$$

et l'on peut choisir arbitrairement $\theta(s)$.

— Si nous renforçons l'hypothèse en supposant que $3 \leqslant p \leqslant k$ et que Γ est bi-régulier, nous disposons de la torsion γ de Γ, de classe C^{p-3}, θ est dérivable et, en utilisant encore les formules de Frenet, nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{g}}{\mathrm{d}s} = -c \sin \theta \boldsymbol{\tau} - \left(\gamma - \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)\mathbf{n}$$

D'où :

$$\boxed{\gamma_g = \gamma - \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}} \tag{4}$$

* ***Interprétation cinématique de*** c_n, c_g ***et*** γ_g — Sous ces hypothèses restrictives, $\mathscr{R}$ désignant un repère fixe de $\mathscr{E}$ et l'abscisse curviligne étant le temps, le mouvement résultant $\mathscr{D}|\mathscr{R}$ du repère de Darboux s'obtient en composant le mouvement d'entraînement $\mathscr{F}|\mathscr{R}$ du repère de Frenet, dans lequel le vecteur rotation instantanée est $-\gamma\boldsymbol{\tau} + c\boldsymbol{\beta}$, et le mouvement relatif $\mathscr{D}|\mathscr{F}$, de vecteur rotation instantanée $\boldsymbol{\tau}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$. Le vecteur rotation instantanée de $\mathscr{D}|\mathscr{R}$ s'écrit donc (calcul aisé) :

$$-\gamma_g\boldsymbol{\tau} - c_n\mathbf{g} + c_g\mathbf{n}.$$ *

3° *Étude locale d'une surface.* — M désigne ici un point donné de la C^k-nappe géométrique orientée et régulière Σ ($k \geqslant 2$). *Par « arc* Γ *» nous entendons un* C^p*-arc géométrique orienté et régulier tracé sur* Σ *et passant par* M ($2 \leqslant p \leqslant k$). Nous reprenons les notations du **4.2.***1*, et, pour chaque arc Γ, celles du **4.2.***2* à cela près que — par abus de langage — la même notation désignera une application définie sur D (resp. J) et la valeur qu'elle prend au paramètre (u, v) de M (resp. au paramètre s de M). Nous allons exploiter les formules :

$$c_n = \Psi_M(\boldsymbol{\tau}), \qquad \gamma_g = -\psi_M(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{g}) \tag{5}$$

où $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{g}$, c_n, γ_g, mis pour $\boldsymbol{\tau}(s)$, $\mathbf{g}(s)$, $c_n(s)$, $\gamma_g(s)$, varient quand on passe d'un arc Γ à un autre.

• CAS PARTICULIER : *M est un ombilic de Σ.* C'est qu'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que $\Psi_M = \sigma\Phi_M$. On déduit de (5) que *tous les arcs Γ admettent en M une courbure normale commune σ et une torsion géodésique nulle.*

• CAS GÉNÉRAL : *M n'est pas un ombilic de Σ.* Nous avons vu que Σ admet en M deux directions principales qui sont orthogonales. Soit $(m; \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{n})$ un repère orthonormal direct de $\mathscr{E}$ choisi de façon que $\mathbf{I}$ et $\mathbf{J}$ dirigent ces directions principales.

Pour un arc Γ donné, φ désigne l'angle de la rotation d'axe $(m; \mathbf{n})$ qui permet de passer de ce repère au repère de Darboux en M ; en d'autres termes on a, pour cet arc Γ et au point M :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{I}\cos\varphi + \mathbf{J}\sin\varphi\,; \qquad \mathbf{g} = -\,\mathbf{I}\sin\varphi + \mathbf{J}\cos\varphi.$$

Comme $h_M(\mathbf{I}) = \sigma_1 \mathbf{I}$ et $h_M(\mathbf{J}) = \sigma_2 \mathbf{J}$, où σ_1 et σ_2 sont les valeurs propres de h_M associées aux vecteurs propres **I** et **J**, on déduit de (5) :

$c_n = \sigma_1 \cos^2\varphi + \sigma_2 \sin^2\varphi,$	$\gamma_g = (\sigma_1 - \sigma_2)\sin\varphi\cos\varphi$	(6)

Notons que ces formules restent valables si M est un ombilic $(\sigma_2 = \sigma_1 = \sigma)$ à condition de désigner par $(\mathbf{I}, \mathbf{J})$ une base orthonormale directe de P_M.

• De (6) on déduit immédiatement les trois théorèmes suivants, qui constituent l'essentiel des propriétés locales des nappes. Les notations sont celles du début du présent 3°, Σ étant donnée une fois pour toutes.

— THÉORÈME I ET DÉFINITION. — **La courbure normale c_n et la torsion géodésique γ_g d'un arc Γ en M ne dépendent que de M et de la tangente en M à Γ. A deux arcs Γ dont les tangentes en M sont orthogonales correspondent :**

— des courbures normales en M dont la demi-somme $1/2\,.(\sigma_1 + \sigma_2) = 1/2\,.\operatorname{tr} h_M$, **ne dépend que de M et est dite** *courbure moyenne* **de Σ en M ;**

— des torsions géodésiques en M opposées.

Retenons qu'à toute tangente en M à Σ sont attachées une courbure normale et une torsion géodésique.

— THÉORÈME II ET DÉFINITION. — **Les extremums de la courbure normale en M sont les valeurs propres σ_1 et σ_2 de l'endomorphisme h_M ; ils correspondent à ceux des arcs Γ dont la tangente en M est dirigée par une direction principale ; on les appelle** *courbures principales* **de Σ en M ; leur produit** $\sigma_1\sigma_2 = \det h_M$ **est dit** *courbure totale* **de Γ en M.**

Pour le calcul de la courbure moyenne et de la courbure totale, voir 4.1.*1*, 3°.

THÉORÈME III. — **La torsion géodésique d'un arc Γ en M est nulle si et seulement si la tangente en M à Γ est dirigée par une direction principale.**

• Voici quelques compléments aux théorèmes I et II :

a) ***Interprétation géométrique de la courbure normale.*** — Soient $\mathscr{T}$ une tangente en M à Σ, et $\mathscr{Q}_{\mathscr{T}}$ le « plan normal » défini par $\mathscr{T}$ et la normale $\mathscr{N}_M$. Nous savons (remarque de 3.1.*3*, 2°) que (en remplaçant éventuellement Σ par une sous-nappe), nous pouvons considérer $\mathscr{Q}_{\mathscr{T}} \cap \operatorname{supp}\Sigma$ comme le support d'un C^k-arc plongé orienté $\Gamma_{\mathscr{T}}$ (deux arcs opposés sont possibles). En M nous avons, pour $\Gamma_{\mathscr{T}}$: $\theta = 0 \,(\text{mod. } \pi)$, et donc : $|c_n| = c$. D'où

PROPOSITION I. — **La courbure normale associée à une tangente en M à Σ, $\mathscr{T}$, a pour valeur absolue la courbure en M de la « section normale » par le plan normal en M qui contient $\mathscr{T}$.**

b) ***Cercle de Meusnier.*** — Parmi les « arcs Γ », nous ne retenons ici que ceux pour lesquels M est bi-régulier ($c \neq 0$) et de courbure normale non nulle, ce qui implique $\cos\theta \neq 0$. Nous disposons ainsi du centre de courbure en M à Γ :

$$p = m + \frac{1}{c}\mathbf{v} = m + \frac{\cos\theta}{c_n}\mathbf{v}.$$

Nous constatons (cf. fig. 54 ci-dessus) que p est la projection orthogonale sur le plan osculateur $(m; \boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})$ du point $m + \dfrac{1}{c_n}\mathbf{n}$, qui, comme c_n, ne dépend que de M et de la tangente en M, $\mathscr{T}$; on le note $p_{\mathscr{T}}$; c'est le centre de courbure en M de la « section normale » $\Gamma_{\mathscr{T}}$ considérée ci-dessus ; il est dit *centre de courbure normal* associé à M et à $\mathscr{T}$; lorsque la direction de $\mathscr{T}$ est principale, on parle de *centre de courbure principal.* On peut énoncer :

PROPOSITION II. — **Le centre de courbure en M à l'arc Γ (bi-régulier et à courbure normale non nulle en M) ne dépend que de M et du plan osculateur en M. Tous les centres de courbure en M de ceux des arcs Γ considérés qui admettent une tangente en M donnée $\mathscr{T}$ appartiennent à un cercle centré sur la normale en M à Σ, passant par m et dont le plan est orthogonal à $\mathscr{T}$ (cercle de Meusnier).**

c) ***Surfaces minima.*** — Il s'agit des nappes dont la courbure moyenne est nulle en tout point (* parmi les nappes dont le support est limité par celui d'un arc fermé simple donné, les surfaces minima sont celles qui réalisent le minimum de l'aire *). Elles jouent un rôle important en Physique.

4° ***Pratique du calcul de c_n et de γ_g.*** — Nous considérons ici un C^p-arc géométrique Γ orienté et régulier ($2 \leqslant p \leqslant k$) tracé sur Σ, défini par un représentant quelconque $(I, t \longmapsto F(u(t), v(t)))$. Nous allons calculer la courbure normale $(c_n)_M$ et la torsion géodésique $(\gamma_g)_M$ de Γ au point M identifié au point de Σ dont un représentant est $(D, F, (u(t), v(t))$.

Soit $\mathbf{w} = \xi F'_u + \eta F'_v$, avec

$$(\xi, \eta) = \lambda(u'(t), v'(t))$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est arbitrairement choisi, un vecteur directeur de la tangente en M à Γ; pour vecteur directeur de la normale géodésique en M à Γ nous pouvons adopter (1) $\mathbf{w}_1 = \xi_1 F'_u + \eta_1 F'_v$ non nul, tel que (4.1.*1*, 2°) :

$$E\xi\xi_1 + F(\xi\eta_1 + \xi_1\eta) + G\eta\eta_1 = 0$$

et, par exemple :

$$\mathbf{w}_1 = -(F\xi + G\eta)F'_u + (E\xi + F\eta)F'_v.$$

Ainsi :

$$\mathbf{w} \wedge \mathbf{w}_1 = (E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2)F'_u \wedge F'_v = \|\mathbf{w}\|^2 H\mathbf{N}.$$

---

(1) Les notations F'_u, F'_v, $\mathbf{N}$, E, F, G, H désignent dans ce calcul les valeurs prises au point $(u(t), v(t))$ par les fonctions correspondantes.

Il en résulte que, en changeant éventuellement l'orientation (ce qui n'altère ni c_n ni γ_g) nous pouvons adopter : $\tau_M = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$, $\mathbf{g}_M = \frac{\mathbf{w}_1}{H\,\|\mathbf{w}\|}$. En utilisant (5), il en résulte :

$$(c_n)_M = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}\,\Psi_M(\mathbf{w}); \qquad (\gamma_g)_M = -\frac{1}{H\,\|\mathbf{w}\|^2}\,\psi_M(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1),$$

avec :

$$\|\mathbf{w}\|^2 = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2;$$
$$\Psi(\mathbf{w}) = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2;$$
$$\psi(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1) = -L\xi(F\xi + G\eta) + M(\xi(E\xi + F\eta) - \eta(F\xi + G\eta)) + N\eta(E\xi + F\eta).$$

Reste à remplacer (ξ, η) par $\lambda(u'(t), v'(t))$, ou, en utilisant la notation différentielle, par $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$. On obtient :

$$(c_n)_M = \frac{L\,\mathrm{d}u^2 + 2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2}{E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2} \tag{7}$$

$$(\gamma_g)_M = -\frac{1}{H}\,\frac{(EM - FL)\,\mathrm{d}u^2 + (EN - GL)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + (FN - GM)\,\mathrm{d}v^2}{E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2} \tag{8}$$

• A partir de la C^k-nappe paramétrée (D, F) et du C^p-arc paramétré $(I, t \mapsto F(u, (t), v(t))$ tracé sur (D, F) les seconds membres de (7) et (8) (dans lesquels $\mathrm{d}u = u'(t)$ et $\mathrm{d}v = v'(t)$) fournissent, *par définition, la courbure normale et la torsion géodésique de l'arc, relativement à la nappe*, au point *de paramètre t*.

4.1.3. Arcs remarquables d'une nappe donnée

Les programmes des C.P. mentionnent la recherche de courbes d'une surface satisfaisant à une condition différentielle.
De ce point de vue, le lecteur pourra étudier les asymptotiques, les lignes de courbure et les géodésiques d'une nappe en utilisant respectivement les conditions iii), iii) *et* ii) *des définitions qui vont suivre, et ceci sans utiliser* **4.1.1** *et* **4.1.2**. *Il en ira de même au* **4.1.4** *pour les loxodromies d'une nappe de révolution.*
On pourra raisonner sur des nappes paramétrées.

Σ est la C^k-nappe géométrique orientée et régulière de $\mathscr{E}_3$ $(k \geqslant 2)$, considérée jusqu'ici (cf. notations générales). Déterminer un arc Γ tracé sur $\mathscr{E}$, c'est trouver deux fonctions u et v d'une variable t, l'arc admettant alors une

paramétrisation de la forme $(I, t \longmapsto F(u(t), v(t))$. La notation différentielle permet de ne pas préciser *a priori* le paramètre t ; on pourra être conduit à adopter $t = u$.

1° ***Asymptotiques.*** — DÉFINITION. **On appelle *asymptotique* de Σ tout C^2-arc régulier Γ tracé sur Σ, vérifiant les trois assertions suivantes, qui sont équivalentes :**

i) La courbure normale c_n est nulle en tout point de Γ ;

ii) En tout point de Γ, la direction de la tangente à Γ est direction asymptotique de Σ (i.e. tout vecteur tangent est isotrope pour la seconde forme fondamentale) ;

iii) En tout point bi-régulier de Γ, le plan osculateur à Γ est confondu avec le plan tangent à Σ.

— L'équivalence des assertions i) et ii) tient à ce que, en utilisant un représentant normal de l'arc orienté, l'une et l'autre s'écrit :

$$\forall s \in J \qquad \Psi_M(\boldsymbol{\tau}(s)) = 0 \tag{1}$$

— L'équivalence de i) et iii) tient à ce qu'en tout point non birégulier d'un arc tracé sur Σ on a $c_n(s) = 0$, et à ce qu'en un point birégulier la nullité de $c_n(s)$ équivaut (d'après $c_n = c \cos \theta$) à celle de $\cos \theta(s)$. □

REMARQUES. — *a*) *La notion d'asymptotiques d'une nappe géométrique est* (d'après iii)) *une notion affine*. Cela résulte de la propriété qui a fait l'objet de la remarque *b*) du **4.1.*1*, 2°**.

b) Tout C^2-arc régulier tracé sur Σ dont le support est une droite est une asymptotique de Σ. On en déduit que *les génératrices rectilignes d'une nappe réglée en sont des asymptotiques.*

c) Sur un arc bi-régulier d'une asymptotique on a

$$\gamma_g = \gamma - \frac{d\theta}{ds} \quad \text{avec} \quad \frac{d\theta}{ds} = 0$$

et donc :

$$\gamma = \gamma_g = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \varphi \cos \varphi.$$

Comme $c_n = 0$ s'écrit : $\sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi = 0$, il vient en éliminant φ :

$$\gamma^2 = -\sigma_1 \sigma_2 \quad \text{(formule d'Enneper)}.$$

• ***Recherche des asymptotiques.*** — PROPOSITION I. — **L'arc géométrique représenté par $(I, t \longmapsto F(u(t), v(t))$, où (u, v) est une application de classe C^2 d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans D, telle que (u', v') ne prenne pas la valeur $(0, 0)$ est une asymptotique de Σ si, et seulement si (u, v) vérifie « l'équation différentielle » :**

$$L(u, v)u'^2 + 2M(u, v)u'v' + N(u, v)v'^2 = 0$$

qui s'écrit :

$$L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2 = 0 \tag{2}$$

La condition (1) s'écrit en effet :

$$\forall t \in I \qquad \Psi_M\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(t)\right) = 0.$$

en notant :

$$m : t \longmapsto F(u(t), v(t))$$

et donc :

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} : t \longmapsto F'_u(u(t), v(t))u'(t) + F'_v(u(t), v(t))v'(t). \qquad \square$$

REMARQUES. — *a) On constate que* (2) *s'écrit :* $(\mathrm{d}m|\mathrm{d}\mathbf{n}) = 0$.

b) Le lecteur vérifiera que, plus généralement, (2) *s'écrit :* $(\mathrm{d}m|\mathrm{d}\mathbf{N}) = 0$, où $\mathbf{N} : I \to E\backslash\{0\}$ *est choisie arbitrairement sous réserve qu'elle soit de classe* C^{k-1} *et vérifie* $\mathbf{N} \wedge \mathbf{n} = 0$.

Cas d'un représentant cartésien. — Ici (2) s'écrit :

$$r\,\mathrm{d}x^2 + 2s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + t\,\mathrm{d}y^2 = 0.$$

PROPOSITION II. — **Par un point elliptique de Σ ne passe aucune asymptotique. Par un point hyperbolique M de Σ passent exactement deux asymptotiques, dont les directions des tangentes en M sont les directions asymptotiques de Σ en M ; elles sont de classe C^{k-1}.**

Compte tenu de la proposition précédente, il s'agit d'une conséquence d'un théorème qui sera démontré ci-dessous (cf. 3°). En première lecture, on pourra admettre cette proposition.

EXEMPLE I. — *Hélicoïde droit.* — Σ est la C^∞-nappe représentée par $(\mathbb{R}^2, F)$ avec :

$$F(u, v) = O + av\cos u\,\mathbf{i} + av\sin u\,\mathbf{j} + bu\mathbf{k},$$

$$(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*.$$

C'est une nappe conoïde droit d'axe $O + \mathbb{R}\mathbf{k}$ dont les génératrices rectilignes sont les G_u, et dont les directrices sont les C_v (hélices circulaires d'axe $O + \mathbb{R}\mathbf{k}$ admettant les G_u pour normales principales) ; les unes et l'autre sont de classe C^∞.

On calcule aisément : $\Psi_M(F'_u\,\mathrm{d}u + F'_v\,\mathrm{d}v) = 2\dfrac{a^2b}{H}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

On en déduit que les $(G_u)_{u\in\mathbb{R}}$ et les $(C_v)_{v\in\mathbb{R}}$ sont des familles d'asymptotiques. D'après la proposition I, il n'existe pas d'autre asymptotique.

EXEMPLE II. — *Nappe doublement réglée* (de classe C^k, $k \geqslant 3$). — Les génératrices rectilignes sont les seules asymptotiques.

2° ***Lignes de courbure.*** — DÉFINITION. — **On appelle** *ligne de courbure* **de Σ tout C^2-arc régulier Γ tracé sur Σ, vérifiant les trois assertions suivantes qui sont équivalentes :**

i) La torsion géodésique γ_g est nulle en tout point de Γ ;

ii) En tout point de Γ, la direction de la tangente à Γ est direction principale de Σ ;

iii) La nappe réglée dont les génératrices sont les normales à Σ en tous les points de Γ est développable.

L'équivalence des trois assertions tient à ce que, en utilisant un représentant normal de l'arc orienté, chacune d'elle s'écrit :

$$\left(\mathbf{g}\middle|\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s}\right) \textit{ est l'application nulle de } J \textit{ dans } \mathbb{R}.$$

– Pour i), cela résulte de la définition même de γ_g.

– ii) signifie qu'en tout point de Γ les directions $\mathbb{R}\boldsymbol{\tau}(s)$ et $\mathbb{R}\mathbf{g}(s)$ sont conjuguées, ce qui s'écrit : $(h_M(\boldsymbol{\tau}(s))|\mathbf{g}(s)) = 0$. Or $h_M(\boldsymbol{\tau}) = -\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s}$.

– iii) signifie que la C^{k-1}-nappe géométrique Σ_Γ représentée par :

$$(J \times \mathbb{R}, \quad (s, \lambda) \longmapsto F(u(s), v(s)) + \lambda\mathbf{n}(s)) \qquad (3)$$

est développable, c'est-à-dire (**4.2**.3, 1°) que l'application produit mixte $\left[\boldsymbol{\tau}, \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s}, \mathbf{n}\right]$ de J dans $\mathbb{R}$ est nulle ; or cette application est $\left(\mathbf{g}\middle|\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s}\right)$. □

REMARQUES. – *a*) D'après les formules de Darboux, i) s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s} = -c_n\boldsymbol{\tau} \qquad (4)$$

En utilisant un représentant quelconque, on en déduit que (I, m), avec $m(t) = F(u(t), v(t))$ représente une ligne de courbure si, et seulement s'il existe une application $\rho : I \to \mathbb{R}$ vérifiant : $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}t} + \rho\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0$, ce qui se retient sous la forme différentielle :

$$\mathrm{d}\mathbf{n} + \rho\,\mathrm{d}m = 0 \qquad \text{(formule d'Olinde Rodrigues).}$$

b) Sur une ligne de courbure Γ, la courbure normale c_n est (théorème II du **4.1**.2, 3°) une courbure principale. Nous nous limitons au cas où, sur Γ, c_n ne prend pas la valeur 0, ce qui permet d'introduire $R = 1/c_n$ et $p = m + R\mathbf{n}$, ($p(s)$ est un centre de courbure principal à Γ au point de paramètre s de Γ ; on le suit par continuité). L'arc géométrique γ_Γ dont un représentant (non normal) est $(J, s \longmapsto p(s))$ est tracé sur la nappe Σ_Γ (représentée par (3)). On calcule (en utilisant (4)) :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s} + R\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\mathbf{n} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\mathbf{n}$$

Cette formule (ou, dans le cas $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s} = 0$, celle que donnerait une dérivation m-ième pour m assez grand) montre qu'en général l'arc γ_Γ admet pour tangente au point de paramètre s la génératrice rectiligne $\mathscr{G}_s$ de la nappe Σ_Γ. Retenons que, *pour toute ligne de courbure Γ, le support de l'arc γ_Γ est en général l'enveloppe de la famille des génératrices rectilignes de la nappe développable Σ_Γ*, i.e. *l'arête de rebroussement de Σ_Γ*.

Ce résultat est utilisé en optique géométrique, dans l'étude des caustiques.

c) Théorème de Joachimstal. — Soient Σ_1 et Σ_2 deux nappes géométriques dont les supports $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ se coupent à angle constant non nul (en des points M_1 et M_2 d'image commune, $\mathscr{P}_{M_1}$ et $\mathscr{P}_{M_2}$ font un angle donné). On sait que (quitte à utiliser des sous-nappes) $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2$ est le support d'un arc géométrique Γ. On suppose que Γ est ligne de courbure de Σ_1 ; on va montrer que Γ est ligne de courbure de Σ_2. Ceci résulte (avec des notations évidentes) de :

$$(\gamma_g)_1 - (\gamma_g)_2 = \left(\gamma - \frac{d\theta_1}{ds}\right) - \left(\gamma - \frac{d\theta_2}{ds}\right) = \frac{d(\theta_2 - \theta_1)}{ds}. \qquad \square$$

• ***Recherche des lignes de courbure.*** — Proposition I. — **L'arc géométrique représenté par $(I,\ t \longmapsto F(u(t), v(t))$, où (u, v) est une application de classe C^2 d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans D, telle que (u', v') ne prenne pas la valeur $(0, 0)$, est une ligne de courbure de Σ si, et seulement si (u, v) vérifie l'« équation différentielle » :**

$$\begin{vmatrix} L\,du + M\,dv & E\,du + F\,dv \\ M\,du + N\,dv & F\,du + G\,dv \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

Simple conséquence de l'expression de γ_g trouvée au **4.1.2**, *in fine.* $\square$

Remarques. — *a*) *Dans la proposition* I, *on peut sous les mêmes hypothèses, remplacer* (5) *par :*

$$[dm, \mathbf{N}, d\mathbf{N}] = 0$$

où $m(t) = F(u(t), v(t))$, et où $\mathbf{N} : I \to E\backslash\{0\}$ est choisie arbitrairement sous réserve qu'elle soit de classe C^{k-1} et vérifie $\mathbf{N} \wedge \mathbf{n} = 0$.

Résulte de ce que $\left(\mathbf{g}\middle|\frac{d\mathbf{n}}{ds}\right) = 0$ s'écrit : $\left[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \frac{d\mathbf{n}}{ds}\right] = 0$ $\square$

b) ***Cas d'un représentant cartésien.*** — On utilise la remarque *a*), avec :

$$\mathbf{N} = -\frac{\partial F}{\partial x} \wedge \frac{\partial F}{\partial y} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Les lignes de courbure sont données par l'« équation différentielle » :

$$\begin{vmatrix} dx & p & r\,dx + s\,dy \\ dy & q & s\,dx + t\,dy \\ p\,dx + q\,dy & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Proposition II. — **Par tout point M de Σ autre qu'un ombilic passent exactement deux lignes de courbure, dont les directions des tangentes en M sont les directions principales de Σ en M ; elles sont de classe C^{k-1}.**

Ici encore on applique le théorème du 3° (cf. ci-dessous). $\square$

Remarque. — Par tout point hyperbolique de Σ passent deux lignes de courbure et deux asymptotiques. Les tangentes aux premières (dont les directions sont principales) sont les bissectrices des tangentes aux secondes (dont les directions sont asymptotiques), ainsi que cela résulte des formules (6) du **4.1.2**, 3°, avec $\gamma_g = 0$ dans un cas et $c_n = 0$ dans l'autre.

EXEMPLE. — *Nappe d'Enneper.*

Il s'agit de la C^∞-nappe géométrique orientée Σ représentée par $(\mathbb{R}^2, F)$, avec :

$$F(u, v) = O + (u + uv^2 - u^3/3)\mathbf{i} + (v + u^2v - v^3/3)\mathbf{j} + (u^2 - v^2)\mathbf{k}$$

On calcule :

$$F'_u \left| \begin{matrix} 1 + v^2 - u^2 \\ 2uv \\ 2u \end{matrix} \right. \qquad F'_v \left| \begin{matrix} 2uv \\ 1 + u^2 - v^2 \\ -2v \end{matrix} \right. \qquad F''_{u^2} \left| \begin{matrix} -2u \\ 2v \\ 2 \end{matrix} \right. \qquad F''_{uv} \left| \begin{matrix} 2v \\ 2u \\ 0 \end{matrix} \right. \qquad F''_{v^2} \left| \begin{matrix} 2u \\ -2v \\ -2 \end{matrix} \right.$$

D'où :

$$\begin{aligned} &E = (1 + u^2 + v^2)^2; \quad F = 0; \quad G = (1 + u^2 + v^2)^2; \\ &\mathbf{N} = (1 + u^2 + v^2)^{-1} \quad (-2u\mathbf{i} + 2v\mathbf{j} + (1 - u^2 - v^2)\mathbf{k}); \\ &L = 2; \quad M = 0; \quad N = -2 \end{aligned}$$

La nappe est régulière. Les formes quadratiques fondamentales s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Phi(F'_u\,\mathrm{d}u + F'_v\,\mathrm{d}v) &= (1 + u^2 + v^2)^2\,(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2) \\ \Psi(F'_u\,\mathrm{d}u + F'_v\,\mathrm{d}v) &= 2\,(\mathrm{d}u^2 - \mathrm{d}v^2). \end{aligned}$$

— On calcule aisément la courbure moyenne, qui est nulle (il s'agit d'une *surface minima*), et la courbure totale $-4/(1 + u^2 + v^2)^4$. Tous les points sont hyperboliques.

— Comme dans chaque cas où $F = M = 0$, les lignes de courbure sont données par $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0$, et il s'agit des courbes coordonnées. Elles sont planes ; les plans de Γ_u et de C_v admettent les équations respectives :

$$x + uz = u + 2u^3/3; \qquad y - vz = v + 2v^3/3$$

— Les asymptotiques, données par $\mathrm{d}u^2 - \mathrm{d}v^2 = 0$ sont représentées par les :

$$\sigma_\lambda = (\mathbb{R}, F(u, u + \lambda)) \qquad \text{et les} \qquad c_\mu = (\mathbb{R}, F(u, -u + \mu)).$$

Il s'agit d'hélices. Vérifions le pour σ_λ. La binormale à σ_λ au point de paramètre u est la normale à Σ au point de paramètre $(u, u + \lambda)$; elle est désignée par $\mathbf{N}(u, u + \lambda)$ et on constate qu'elle fait un angle fixe avec la direction $\mathbb{R}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \lambda\mathbf{k})$, ce que montre l'égalité :

$$(\mathbf{N}(u, u + \lambda) | \mathbf{i} + \mathbf{j} - \lambda\mathbf{k}) = \lambda.$$

On conclut par **2**.3.*2*, 3°, *c*).

3° ***Étude d'une « équation différentielle »***. — Au 1° et au 2° nous avons rencontré des « équations différentielles » du type :

$$A\,\mathrm{d}u^2 + 2B\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + C\,\mathrm{d}v^2 = 0 \tag{6}$$

où A, B, C sont des applications de classe C^m, $m \geqslant 1$, d'un domaine D de $\mathbb{R}^2$ (au 1° et au 2°, nous avons $m = k - 2$, avec $k \geqslant 3$).

Intégrer l'équation (6) c'est, par définition, rechercher les applications $(\varphi, \psi) : I \to \mathbb{R}^2$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, de classe C^1 et à valeurs dans D, telles que (φ', ψ') ne prenne pas la valeur $(0, 0)$ et que, pour tout $t \in I$:

$$A(\varphi(t), \psi(t))\varphi'^2(t) + 2B(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)\psi'(t) + C(\varphi(t), \psi(t))\psi'^2(t) = 0 \tag{7}$$

On constate que si $(\varphi, \psi) : I \to \mathbb{R}^2$ est une solution, alors pour tout C^1-difféomorphisme de la forme $\theta : J \to I$, $(\varphi \circ \theta, \psi \circ \theta) : J \to \mathbb{R}^2$ est aussi une solution, et $(I, (\varphi, \psi))$ et $(J, (\varphi \circ \theta, \psi \circ \theta))$ représentent un même arc géométrique. Il s'agit donc de rechercher les arcs géométriques réguliers

γ de $\mathbb{R}^2$, à support inclus dans D vérifiant la condition : en chaque point de γ d'image (u, v) la tangente à γ a pour direction l'une des droites du faisceau d'équation :

$$A(u, v)U^2 + 2B(u, v)UV + C(u, v)V^2 = 0$$

Ces arcs sont dits *courbes intégrales* de (6); l'un d'eux sera dit *courbe intégrale maximale* s'il n'est sous-arc au sens strict d'aucune autre courbe intégrale.

En fait nous nous limiterons à une étude locale, au voisinage d'un point $\mu_0 = (u_0, v_0)$ de D, i.e. nous ne rechercherons que les sous-arcs des courbes intégrales de (6) inclus dans un voisinage ouvert, convenablement choisi de μ_0. Nous utiliserons le fait que, si une fonction numérique continue prend une valeur non nulle au point μ_0, il existe un voisinage ouvert de μ_0 sur lequel elle conserve un signe fixe (non nul).

L'application $B^2 - AC$ de D dans $\mathbb{R}$, de classe C^m, sera notée Δ.

1er Cas : $\Delta(\mu_0) < 0$. — D'après (7), aucune courbe intégrale de (6) ne passe par μ_0.

2e Cas : $\Delta(\mu_0) = 0$. — Nous ne traiterons pas ce cas, qui est délicat.

3e Cas : Dans toute la suite, nous supposons $\Delta(\mu_0) > 0$.

Lemme I. — **Si $\Delta(\mu_0) > 0$, alors il existe un voisinage ouvert U de μ_0, inclus dans D, sur lequel l'équation (6) prend la forme :**

$$(A_1\, du + B_1\, dv)(A_2\, du + B_2\, dv) = 0 \qquad (8)$$

où A_1, B_1, A_2, B_2 sont des applications de U dans $\mathbb{R}$, de classe C^m, telles que $A_1B_2 - A_2B_1 > 0$.

— Si $A(\mu_0) \neq 0$; on choisit U assez petit pour que $\Delta > 0$ et $A \neq 0$ sur U; on peut alors adopter (ainsi que le lecteur le vérifiera) :

$$A_1 = A, \quad B_1 = B - \sqrt{\Delta}, \quad A_2 = 1, \quad B_2 = (B + \sqrt{\Delta})/A.$$

On obtient :

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 2\sqrt{\Delta}.$$

— Si $A(\mu_0) = 0$ et $C(\mu_0) \neq 0$, on transpose du et dv dans (6).

— Si $A(\mu_0) = C(\mu_0) = 0$, nécessairement $B(\mu_0) \neq 0$, et on peut même se ramener à $B(\mu_0) > 0$.

On introduit $\Phi = A + 2B + C$ et on constate $\Phi(\mu_0) > 0$.

On choisit U assez petit pour que $\Delta > 0$, $B > 0$ et $\Phi > 0$ sur U; on peut alors adopter (ainsi que le lecteur le vérifiera) :

$$A_1 = (A + B + \sqrt{\Delta})/\sqrt{\Phi}; \qquad B_1 = (B + C - \sqrt{\Delta})/\sqrt{\Phi};$$
$$A_2 = (A + B - \sqrt{\Delta})/\sqrt{\Phi}; \qquad B_2 = (B + C + \sqrt{\Delta})/\sqrt{\Phi}.$$

On obtient :

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 2\sqrt{\Delta}. \qquad \square$$

Lemme II. — **Dans les conditions du lemme I, les courbes intégrales de (8) à support dans U sont exactement les courbes intégrales de l'une ou l'autre des équations différentielles :**

$$A_i\, du + B_i\, dv = 0, \quad i \in \mathbb{N}_2. \qquad (9)$$

— Il va de soi que toute courbe intégrale d'une des équations (9) est courbe intégrale de (8).

— Inversement, soit γ une courbe intégrale de (8), représentée par $(I, (\varphi, \psi))$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_2$; notons :

$$I_i = \{t \in I | A_i(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + B_i(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) = 0\}.$$

I_i est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{R}$ par une application continue de l'espace topologique I dans $\mathbb{R}$; c'est donc un fermé de I. Or (I_1, I_2) est une partition de I ; en effet $I = I_1 \cup I_2$ est trivial, d'autre part, puisque γ est régulier et que $A_1B_2 - A_2B_1 > 0$, on a $I_1 \cap I_2 = \varnothing$.

Comme I est connexe, on a : $(I_1 = \varnothing) \vee (I_2 = \varnothing)$. □

• Étudions maintenant l'équation différentielle $A_1\,\mathrm{d}u + B_1\,\mathrm{d}v = 0$, où A_1 et B_1 sont de classe C^m, $m \geqslant 1$, sur l'ouvert U contenant μ_0 de $\mathbb{R}^2$, et ne prennent pas simultanément la valeur 0 (à cause de $A_1B_2 - A_2B_1 > 0$). Les courbes intégrales sont définies comme ci-dessus.

Supposons par exemple $B_1(\mu_0) \neq 0$. Il en résulte que (quitte à remplacer U par un ouvert plus petit) B_1 ne prend pas la valeur 0 sur U. On peut ainsi adopter l'abscisse u pour paramètre sur les courbes intégrales de $A_1\,\mathrm{d}u + B_1\,\mathrm{d}v = 0$, ce qui nous ramène à l'équation différentielle « ordinaire » :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = f(u, v), \qquad \text{où} \qquad f(u, v) = -\frac{A_1(u)}{B_1(u)}. \tag{10}$$

Comme f est de classe C^m, on sait, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, qu'il existe une unique solution maximale $\psi : I \to \mathbb{R}$ de (10) vérifiant $\psi(u_0) = v_0$; on vérifie aisément qu'elle est de classe C^{m+1}. L'équation $A_1\,\mathrm{d}u + B_1\,\mathrm{d}v = 0$ admet donc une courbe intégrale représentée par $(I, u \longmapsto (u, \psi(u)))$, et donc régulière et de classe C^{m+1}. Le résultat s'étend à l'équation $A_2\,\mathrm{d}u + B_2\,\mathrm{d}v$. Une étude plus fine permettrait de démontrer :

THÉORÈME. — **Pour tout point μ_0 de D tel que $\Delta(\mu_0) > 0$, il existe un voisinage ouvert V de μ_0 inclus dans D, et exactement deux courbes intégrales maximales de l'équation différentielle (6) étudiée sur V dont le support passe par μ_0 ; ce sont des arcs de classe C^{m+1}.**

3° ***Géodésiques.*** — DÉFINITION. — **On appelle *géodésique* de Σ tout C^2-arc régulier Γ tracé sur Σ, vérifiant les trois assertions suivantes qui sont équivalentes :**

i) La courbure géodésique c_g est nulle en tout point de Γ ;

ii) En tout point bi-régulier de Γ, le plan osculateur à Γ contient la normale à Σ ;

iii) L'application $\mathbf{n} \wedge \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}$ est nulle.

— L'équivalence de i) et ii) tient à ce qu'en un point régulier mais non bi-régulier d'un arc tracé sur Σ on a $c_g(s) = 0$, et à ce qu'en un point bi-régulier la nullité de $c_g(s)$ équivaut à celle de $\sin \theta(s)$.

— L'équivalence de i) et iii) se déduit aisément de ce que, d'après les formules de Darboux, i) s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = c_n\mathbf{n}$. □

CAS PARTICULIER. — **Les géodésiques d'une nappe plane en sont les droites.**

Compte tenu de

$$\left(\mathbf{n}\middle|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}\right) = 0, \qquad \mathbf{n} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = 0 \qquad \text{exige} \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = 0. \qquad \square$$

• ***Recherche des géodésiques.*** — PROPOSITION I. — **L'arc géométrique Γ représenté par (I, m), avec $m(t) = F(u(t), v(t))$ où (u, v) est une application de classe C^2 d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans D, telle que (u', v') ne**

prenne pas la valeur (0, 0), **est une géodésique de** Σ **si, et seulement si** (u, v) **vérifie l'équation différentielle :**

$$\left[\mathbf{N}, \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}t^2}\right] = 0 \qquad (11)$$

En effet, pour un représentant normal d'un C^2-arc régulier tracé sur Σ :

$$c_g = \left(\mathbf{g}\middle|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}\right) = \left[\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}\right]$$

Or (**2.2**.*2*, 4°), on passe au cas d'un représentant quelconque par :

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \wedge \frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3 \quad \boldsymbol{\tau} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}$$

□

On démontre et nous admettrons :

PROPOSITION II. — **Étant donnés un point** M **de** Σ **et une tangente** $\mathscr{T}$ **en** M **à** Σ, **il existe une unique géodésique maximale de** Σ **qui passe par** M **et admet** $\mathscr{T}$ **pour tangente en** M ; **elle est de classe** C^k.

• La proposition qui va suivre et sa réciproque fournissent un second moyen de trouver les géodésiques d'une nappe ; il est utile dans le cas d'une nappe de révolution (cf. **4.1**.*4*, ci-dessous).

PROPOSITION III. — **Si, sur une géodésique de** Σ, **le paramètre est une fonction affine de l'abscisse curviligne** (**i.e.** *le temps dans un parcours à vitesse constante*) **alors est vérifiée l'assertion :**

$$\left(\left(F'_u\middle|\frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}t^2}\right) = 0\right) \wedge \left(\left(F'_v\middle|\frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}t^2}\right) = 0\right) \qquad (12)$$

(**qui exprime que** *le vecteur accélération reste normal à la surface*).

L'hypothèse $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = a$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, entraîne $\frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}t^2} = a^2 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}$. De $\mathbf{n} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = 0$, on déduit qu'est vérifiée l'assertion : $\mathbf{N} \wedge \frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}t^2} = 0$, qui, compte tenu de ce que Σ est régulière, est (12).

RÉCIPROQUE. — **Si, dans un mouvement ponctuel sur une nappe** Σ, **le vecteur accélération reste normal à** Σ, **alors le mouvement est uniforme et, considéré comme un arc paramétré, il représente une géodésique de** Σ.

Ici l'hypothèse est (12). Elle implique :

$$\left(F'_u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + F'_v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\middle|\frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}t^2}\right) = 0, \qquad \text{i.e.} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\middle|\frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}t^2}\right) = 0, \qquad \text{i.e.} \qquad \left\|\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right\| = a$$

avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ (en supposant, naturellement, que la vitesse initiale n'est pas nulle). □

Du point de vue de la Dynamique, les *supports des géodésiques sont les trajectoires des mouvements sans frottement sur* Σ *d'un point matériel qui n'est soumis qu'à la force de liaison.*

4.1.4. Étude d'un exemple : nappes de révolution

1° DÉFINITION. — **Une C^k-nappe géométrique orientée Σ de $\mathscr{E}$, $k \geqslant 1$, est dite** *nappe de révolution* **si, et seulement si on peut lui associer un repère orthonormal direct $(O\,;\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ de $\mathscr{E}$, tel que Σ admette un représentant de la forme $(I \times \mathbb{R}, F)$ avec :**

$$F(t, \theta) = O + \rho(t)\mathbf{u}_\theta + z(t)\mathbf{k}, \qquad (\mathbf{u}_\theta = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j})$$

où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et où ρ et z sont des applications de classe C^k de I dans $\mathbb{R}$, ρ ne prenant que des valeurs positives.

Le support $\mathscr{S}$ de Σ est ainsi l'ensemble de révolution (au sens du II.7.3.6) dont l'axe est $O + \mathbb{R}\mathbf{k}$ et dont la demi-méridienne dans le demi-plan d'équations $(y = 0) \wedge (x \geqslant 0)$ est le support du C^k-arc géométrique γ représenté par (I, f), avec :

$$f(t) = O + \rho(t)\mathbf{i} + z(t)\mathbf{k}.$$

• On a :

$$F'_t = \rho'\mathbf{u}_\theta + z'\mathbf{k}\,; \qquad F'_\theta = \rho\mathbf{v}_\theta. \tag{1}$$

D'où :

$$F'_t \wedge F'_\theta = -\rho z'\mathbf{u}_\theta + \rho\rho'\mathbf{k}\,; \qquad H = \rho\sqrt{\rho'^2 + z'^2} \tag{2}$$

Nous supposerons dans toute la suite que $\rho(t) > 0$ pour tout $t \in I$ et que l'arc γ est régulier (i.e. *que* (ρ', z') *ne prend pas la valeur* $(0, 0)$). *Dans ces conditions la nappe de révolution Σ est régulière* $(H > 0)$.

Les lignes coordonnées du point M de Σ de paramètre (t, θ) sont le parallèle C_t (cercle d'axe $O + \mathbb{R}\mathbf{k}$) et la demi-méridienne γ_θ (déduite de γ par rotation); elles se coupent orthogonalement.

— De (2) on déduit :

$$\mathbf{N} = -\frac{z'}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}}\mathbf{u}_\theta + \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}}\mathbf{k} \tag{3}$$

2° ***Cônes et cylindres circonscrits.*** — On vérifie que :

— la normale en $M(t, \theta)$ contient le point $p = O + (z + \rho\rho'/z')\mathbf{k}$ si $z' \neq 0$ et est parallèle à $O + \mathbb{R}\mathbf{k}$ dans le cas contraire;

— la tangente en M à γ_θ, et donc le plan tangent en M à Σ contiennent le point $q = O + (z - \rho z'/\rho')\mathbf{k}$ si $\rho' \neq 0$, et sont parallèles à $O + \mathbb{R}\mathbf{k}$ dans le cas contraire.

On en déduit aisément :

— Pour t donné, la notion de *surface conique (éventuellement cylindrique) circonscrite à Σ le long du parallèle C_t*, engendrée par la tangente à γ_θ en un point qui décrit C_t, et représentée par :

$$(\mathbb{R}^2, (\theta, \lambda) \longmapsto F(t, \theta) + \lambda(\rho'\mathbf{u}_\theta + z'\mathbf{k})), \qquad (\text{où } t,\ \rho',\ z' \text{ sont fixés}).$$

— Pour θ donné, la notion de *surface cylindrique circonscrite à Σ le long de la demi-méridienne* γ_θ, engendrée par la tangente à C_t en un point qui décrit γ_θ, et représentée par :

$$(I \times \mathbb{R}, (t, \mu) \longmapsto F(t, \theta) + \mu\mathbf{v}_\theta), \qquad (\text{où } \theta \text{ est fixé}).$$

— La nappe engendrée par la normale à Σ en un point qui décrit C_t (resp. γ_θ) est conique ou plane (resp. plane) et donc développable. Il en résulte que *les lignes de courbure de Σ sont les lignes coordonnées* (cf. 3°).

3° ***Les formes quadratiques fondamentales.*** — De (1) on déduit :

$$E = \rho'^2 + z'^2\,; \qquad F = 0\,; \qquad G = \rho^2$$

D'où la première forme quadratique fondamentale Φ_M :

$$F'_t\,dt + F'_\theta\,d\theta \longmapsto ds^2 = (\rho'^2 + z'^2)\,dt^2 + \rho^2\,d\theta^2$$

– On calcule ensuite :

$$F''_{t^2} = \rho''\mathbf{u}_\theta + z''\mathbf{k}; \qquad F''_{t\theta} = \rho'\mathbf{v}_\theta; \qquad F''_{\theta^2} = -\rho\mathbf{u}_\theta$$

D'où :

$$L = \frac{\rho' z'' - \rho'' z'}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}}; \qquad M = 0; \qquad N = \frac{\rho z'}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}}$$

et la seconde forme quadratique fondamentale Ψ_M :

$$F'_t\,dt + F'_\theta\,d\theta \longmapsto (\rho'^2 + z'^2)^{-1/2}[(\rho' z'' - \rho'' z')\,dt^2 + \rho z'\,d\theta^2]$$

• Les *asymptotiques* sont ainsi données par l'équation différentielle :

$$(\rho' z'' - \rho'' z')\,dt^2 + \rho z'\,d\theta^2 = 0$$

et les *points hyperboliques* correspondent à : $\rho z'(\rho' z'' - \rho'' z') < 0$.

• On peut retrouver les *lignes de courbure* en remarquant que (du fait de $F = M = 0$), au voisinage d'un point qui n'est pas un ombilic ($GL - EN \neq 0$), elles sont données par $dt\,d\theta = 0$.

• Notons σ_θ et σ_t les *courbures principales* respectivement attachées aux tangentes à γ_θ et à C_t, i.e. de directions (principales) $\mathbb{R}F'_t$ et $\mathbb{R}F'_\theta$. Un calcul simple donne :

$$h_M(F'_\theta) = -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \theta} = \frac{z'}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}}\mathbf{v}_\theta = \frac{z'}{\rho\sqrt{\rho'^2 + z'^2}}F'_\theta$$

et donc :

$$\sigma_t = \frac{z'}{\rho\sqrt{\rho'^2 + z'^2}}.$$

Il suffit ainsi de calculer la courbure totale :

$$\frac{LN - M^2}{H^2} = \frac{z'(\rho' z'' - \rho'' z')}{\rho(\rho'^2 + z'^2)^2}$$

pour obtenir :

$$\sigma_\theta = \frac{\rho' z'' - \rho'' z'}{(\rho'^2 + z'^2)^{3/2}}.$$

• Les *centres de courbure principaux* correspondants sont :

– Si $\sigma_\theta \neq 0$: $p_\theta = m + \dfrac{1}{\sigma_\theta}\mathbf{N} = m + \dfrac{\rho'^2 + z'^2}{\rho' z'' - \rho'' z'}(-z'\mathbf{u}_\theta + \rho'\mathbf{k})$

– Si $\sigma_t \neq 0$: $p_t = m + \dfrac{1}{\sigma_t}\mathbf{N} = O + \left(z + \dfrac{\rho\rho'}{z'}\right)\mathbf{k}$

En p_θ on reconnaît (cf. formules (11) du **2.2.3**, 4°) le centre de courbure de γ_θ au point M, ce qui était évident *a priori* puisque γ_θ est une section normale principale.

En p_t on reconnaît le point d'intersection de la normale en M à Σ et de $O + \mathbb{R}\mathbf{k}$, ce que l'on pouvait trouver en remarquant que le centre de courbure en M du parallèle C_t est $O + z\mathbf{k}$, et en utilisant le théorème de Meusnier.

4° ***Loxodromies.*** – DÉFINITION. – **On appelle** *loxodromie* **d'une nappe de révolution Σ tout arc tracé sur Σ, qui coupe sous un angle constant les méridiens (et donc aussi les parallèles) de Σ.**

L'angle étant noté α, elles sont données (avec la notation du 1°) par la condition [1] (liant θ et t) :

$$\rho^2 \, d\theta^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha (\rho'^2 + z'^2) \, dt^2.$$

Elles se déduisent par rotations d'axe Oz et symétrie par rapport au plan xOz (ce qui était aisément prévisible) de l'une d'elles, donnée par :

$$\theta = \operatorname{tg} \alpha \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\rho(u)} \sqrt{\rho'^2(u) + z'^2(u)} \, du \qquad (4)$$

où $t_0 \in I$ est arbitrairement choisi.

EXEMPLE. — *Loxodromies d'une sphère*

Ici : $\rho(t) = a \cos t, \quad z(t) = a \sin t, \quad (t \in \mathbb{R}).$

et (4) s'écrit, en adoptant $t_0 = 0$:

$$\theta = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{Log} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

ou encore, en posant $m = \operatorname{cotg} \alpha$: $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \operatorname{th} \frac{m\theta}{2}$.

On obtient l'arc Γ défini en coordonnées cylindriques par :

$$\rho = a/\operatorname{ch} m\theta \, ; \qquad z = a \operatorname{th} m\theta$$

Cet arc a été étudié au **2.2.2**, 4°, exemple III (figure 35). L'intérêt des loxodromies de la sphère terrestre est qu'il s'agit des trajectoires des mouvements « à cap constant ».

5° ***Géodésiques***. — On les recherche par des représentants de la forme :

$$(I, t \longmapsto m = F(t, \theta(t))),$$

(ce qui élimine ceux des parallèles qui sont des géodésiques).

On a (tous les accents concernant des dérivations par rapport à t) :

$$\frac{dm}{dt} = \rho' \mathbf{u}_\theta + \rho\theta' \mathbf{v}_\theta + z' \mathbf{k}$$

et :

$$\frac{d^2 m}{dt^2} = (\rho'' - \rho\theta'^2) \mathbf{u}_\theta + (2\rho'\theta' + \rho\theta'') \mathbf{v}_\theta + z'' \mathbf{k}$$

Quitte à effectuer un changement de paramètre admissible, nous pouvons supposer que le paramètre est une fonction affine de l'abscisse curviligne, i.e. que :

$$\left\| \frac{dm}{dt} \right\| = a, \qquad \text{ou} \qquad \rho'^2 + \rho^2 \theta'^2 + z'^2 = a^2, \qquad (a \in \mathbb{R}_+^*).$$

Les géodésiques s'obtiennent en écrivant que $\frac{d^2 m}{dt^2}$ est orthogonal à la fois à F'_θ et à F'_t. On obtient :

$$(2\rho\rho'\theta' + \rho^2\theta'' = 0) \wedge (\rho'\rho'' + z'z'' - \rho\rho'\theta'^2) = 0$$

La première de ces équations s'écrit : $\frac{d}{dt}(\rho^2\theta') = 0$.

La seconde peut être remplacée (compte tenu de la première) par :

$$\rho'\rho'' + z'z'' - \rho\rho'\theta'^2 + \theta'(2\rho\rho'\theta' + \rho^2\theta'') = 0$$

---

[1] Sous forme différentielle : $\rho^2 \, d\theta^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha (d\rho^2 + dz^2)$.

qui s'écrit : $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho'^2 + z'^2 + \rho^2\theta'^2) = 0,$$

ce qui est toujours vérifié.

Les géodésiques sont donc données par le système d'intégrales premières :

$$\left[\rho^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = C\right] \wedge \left[\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 = a^2\right]$$

avec, en outre, la condition : (ρ', z') ***ne prend pas la valeur*** $(0, 0)$, qui exprime la nécessaire régularité de la demi-méridienne γ (C et a sont des constantes).

Du point de vue de la cinématique, on constate que l'on a écrit qu'il s'agit d'un mouvement uniforme, qui respecte la *loi des aires* (celle-ci traduisant le fait que le « vecteur accélération est dans le plan méridien »).

On constate que l'on obtient, en particulier, les mouvements uniformes sur les demi-méridiennes.

– Achevons le calcul dans le cas où $\mathscr{S}$ est la partie $z > 0$ du cône de révolution d'axe $O + \mathbb{R}\mathbf{k}$ et de demi-angle au sommet α, $(0 < \alpha < \pi/2)$, i.e. dans le cas où : $z = \rho \operatorname{cotg} \alpha$.

Les fonctions $\theta(t)$ et $\rho(t)$ sont données par le système différentiel

$$\left[\rho^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = C\right] \wedge \left[\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = a^2\right] \tag{5}$$

avec la condition : $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$ ne prend pas la valeur 0.

On obtient les projections des géodésiques (autres que les génératrices rectilignes) sur le plan xOy, sous la forme $\rho = \varphi(\theta)$ en éliminant formellement $\mathrm{d}t$ entre les équations (5) soit :

$$\frac{1}{\rho^4 \sin^2\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} = \frac{a^2}{C^2}$$

ce qui s'écrit : $$\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}(1/\rho)}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + (1/\rho)^2 = \frac{a^2}{C^2}$$

et fournit les solutions :

$$\rho = \frac{C}{a}\,\frac{1}{\cos((\theta - \theta_0)\sin\alpha)}, \qquad \theta_0 \in \mathbb{R}.$$

A une similitude près, il s'agit de l'arc : $\rho = 1/\cos(\theta \sin\alpha)$, que le lecteur est invité à construire. Il vérifiera d'autre part que (quitte à faire intervenir des sous-arcs) la condition concernant $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$ n'est pas gênante.

Remarques. — *a*) En fait nous avons raisonné localement au voisinage d'un point où $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \neq 0$, quitte à regarder ensuite si des raccords avec des génératrices rectilignes étaient possibles (ce n'est pas le cas).

b) On constate que dans un développement de Σ sur un plan, les géodésiques se transforment en des droites. Ceci s'explique par le fait qu'il existe entre Σ et son développement une bijection qui conserve la longueur des arcs et que les équations différentielles des géodésiques ne dépendent que de la première forme fondamentale.

4.2. AIRE D'UNE SURFACE. INTÉGRALE DE SURFACE

Le programme des C.P. mentionne l'étude d'exemples de calcul d'une aire et de calcul d'une intégrale de surface.
($\mathscr{E}$, E) est un espace affine euclidien orienté de dimension 3; nous ne considérons que des repères orthonormaux directs.
k est un élément de $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Position du problème

Au sous-chapitre *2.1* nous avons étudié les arcs paramétrés rectifiables de $\mathscr{E}$, et vu que, dans le cas d'un arc de Jordan dont le support est inclus dans une droite affine, cette notion généralisait celle de longueur d'un intervalle de $\mathbb{R}$ (**2.1**.*1* 1°, exemple *b*).

En IV.**6**.5.*3* nous avons étudié les parties cubables de $\mathbb{R}^p$ ce qui, dans le cas de $\mathbb{R}^2$, a conduit aux parties quarrables et à la notion d'aire (plane) dont nous avons donné des méthodes de calcul en IV. **7**.3.*1*. Nous allons généraliser ces dernières notions dans le cadre des surfaces (au sens des sous-variétés) d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ de dimension 3, qui, pour des raisons de commodité, sera supposé orienté bien que les résultats soient indépendants de l'orientation choisie.

Comme dans le cas des arcs paramétrés on pourrait envisager de définir l'aire d'une surface par un procédé géométrique (borne supérieure des aires des polyèdres inscrits dans cette surface, « limite » des aires des polyèdres inscrits lorsque la borne supérieure des diamètres de ces polyèdres tend vers zéro...); ceci n'est malheureusement pas possible et le lecteur consultera l'exercice **4**.38, où il constatera que dans le cas d'une partie de cylindre, cette borne supérieure est $+\infty$. Nous allons donc adopter une définition analytique.

4.2.*1*. Aire d'une surface. Intégrale de surface

1°*Notations.* — Aux 4.2.*1* et **4.2.*2***, $\mathscr{S}$ est une surface de $\mathscr{E}$ (au sens des sous-variétés) donnée, plongée et de classe C^k. Σ désigne l'ensemble des paramétrisations ici globales de $\mathscr{S}$ (définies sur des domaines).

Mais l'étude reste valable lorsque $\mathscr{S}$ est le support d'une C^k-nappe géométrique Σ donnée, *régulière et simple.*

Pour $(D, F) \in \Sigma$ et $(D_1, F_1) \in \Sigma$, on sait qu'il existe $\theta \in \mathrm{Diff}^k(D_1, D)$ tel que $F_1 = F \circ \theta$; on a $\theta = (\overline{F})^{-1} \circ \overline{F}_1$, où $\overline{F}$ et $\overline{F}_1$ sont les bijections de D et D_1 sur $\mathscr{S}$ induites par F et F_1; le jacobien $D(J_\theta)$ est de classe C^{k-1} (et donc continu), de signe fixe 1 ou -1.

On reprend les applications C^{k-1} de D et D_1 dans $\mathbb{R}$:

$$H = \|F'_u \wedge F'_v\|; \qquad H_1 = \|(F_1)'_{u_1} \wedge (F_1)'_{v_1}\|$$

qui sont liées par :

$$H_1 = |D(J_\theta)| H \circ \theta \tag{1}$$

A toute partie $\mathscr{X}$ de $\mathscr{S}$ on associe les parties $X = (\overline{F})^{-1}(\mathscr{X})$ de D et $X_1 = (\overline{F}_1)^{-1}(\mathscr{X})$ de D_1, liées par $X = \theta(X_1)$.

REMARQUES. — *a) Si X est compact, alors $X_1 = \theta^{-1}(X)$ et $\mathcal{X} = F(X)$ sont compacts* (III.2.5.1, 5°).

b) Si X est compact et quarrable, alors X_1 est compact et quarrable (corollaire du IV.6.5.3, 6°); *en outre les applications continues H et H_1 sont intégrables sur X et X_1 respectivement* (corollaire du IV.6.5.4, 2°).

c) Si H et H_1 sont intégrables sur X et X_1 respectivement (ce qui implique que l'on suppose que X et X_1 sont des parties bornées de $\mathbb{R}^2$), *alors les deux intégrales sont égales* (IV.7.2.2, 1°, compte tenu de (1)).

2° *Notion de partie quarrable de $\mathcal{S}$.* En utilisant le 1°, on obtient immédiatement les résultats suivants :

THÉORÈME FONDAMENTAL. — **Soit $\mathcal{X}$ une partie de $\mathcal{S}$** (qui pourra être $\mathcal{S}$ elle-même). **S'il existe $\boxed{\text{une}}$ $(D, F) \in \Sigma$ telle que H soit intégrable sur X, alors, pour $\boxed{\text{toute}}$ $(D_1, F_1) \in \Sigma$:**

— ou bien H_1 n'est pas intégrable sur X_1;

— ou bien H_1 est intégrable sur X_1 et les intégrales de H sur X et de H_1 sur X_1 sont égales.

REMARQUE. — Pour ne pas avoir à distinguer deux cas dans ce théorème, il faudrait utiliser l'intégrale de Lebesgue, celle de Riemann se prêtant mal à l'étude qui nous occupe ici.

Le théorème permet de poser, sans risque de contradictions :

DÉFINITION. — **On dit que $\mathcal{X} \subset \mathcal{S}$ est quarrable si et seulement s'il existe $\boxed{\text{une}}$ $(D, F) \in \Sigma$ telle que H soit intégrable sur X. Si cette condition est remplie, on dit que l'intégrable double :**

$$\iint_X \mathrm{d}A \quad \text{où } \mathrm{d}A \text{ désigne le symbole } \|F'_u(u, v) \wedge F'_v(u, v)\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

est *l'aire* **de $\mathcal{X}$ — que l'on note $a(\mathcal{X})$ — et que $\mathrm{d}A$ est** *l'élément d'aire.*

REMARQUE. — Le fait que $\mathcal{X}$ est quarrable ou ne l'est pas ne dépend que de la structure affine sous-jacente de $\mathcal{E}$; l'aire de $\mathcal{X}$ (si elle existe) dépend en outre (comme la fonction H) de la structure euclidienne de $\mathcal{E}$, mais non de l'orientation de $\mathcal{E}$.

• *Une classe importante de parties quarrables de $\mathcal{S}$.* — PROPOSITION I. — **Soit $\mathcal{X} \subset \mathcal{S}$. Si pour une (et alors pour toute) $(D, F) \in \Sigma$, X est une partie compacte et quarrable de D, alors $\mathcal{X}$ est une partie compacte et quarrable de $\mathcal{S}$.**

• Voici maintenant une classe de parties quarrables de $\mathcal{S}$ qui contient la précédente.

PROPOSITION II. — **Soit $\mathcal{X} \subset \mathcal{S}$. Si pour une $(D, F) \in \Sigma$, X est quarrable et vérifie $\overline{X} \subset D$** (où $\overline{X}$ est l'adhérence de X dans $\mathbb{R}^2$), **alors $\mathcal{X}$ est quarrable et :**

$$a(\mathcal{X}) = \iint_{\overline{X}} \mathrm{d}A$$

La fonction continue H est intégrable sur le compact quarrable $\overline{X}$. On utilise alors le corollaire II du IV.6.5.4 1°. □

3° *Propriétés des parties quarrables de $\mathscr{S}$*

a) ***Cas où $\mathscr{S}$ est incluse dans un plan affine $\mathscr{P}$.*** — Soit $\mathscr{K} \subset \mathscr{S} \subset \mathscr{P}$. Moyennant le choix d'un « bon » repère, on se ramène au cas où $\mathscr{E}$ est $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ et où $\mathscr{P}$ est $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. On note $\mathscr{S} = S \times \{0\}$ et $\mathscr{K} = K \times \{0\}$.

PROPOSITION III. — **Avec ces notations, si K est un compact quarrable de $\mathbb{R}^2$ d'aire $m(K)$, alors $\mathscr{K}$ est un compact quarrable de $\mathscr{S}$ d'aire $m(K)$**, (ce qui est satisfaisant).

Choisissons $(D, F) \in \Sigma$; on a $F = (f_1, f_2, (0))$; l'application $f = (f_1, f_2)$ de D dans $\mathbb{R}^2$ est C^k, injective, de rang 2 et donc (III.8.5.5, 3°) $f(D) = S$ est un domaine de $\mathbb{R}^2$ tel que f induise un C^k-difféomorphisme ϖ de D sur S.

(S, F_1), où $F_1 = F \circ \varpi^{-1}$ appartient donc à Σ. On a :

$$\forall (x, y) \in S \quad F_1(x, y) = (x, y, 0)$$

et donc :

$$H_1(x, y) = \|(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0)\| = 1$$

Image par F_1 d'un compact quarrable K, $\mathscr{K}$ est un compact quarrable et son aire (calculée à partir de (S, F_1) est

$$\iint_K H_1(x, y)\, dx\, dy = m(K) \qquad \square$$

b) ***Conservation des aires par isométrie.*** — PROPOSITION IV. — **Soient $\mathscr{K} \subset \mathscr{S}$, quarrable, d'aire a, et f une isométrie (resp. une homothétie) de $\mathscr{E}$ de partie linéaire φ. Alors $f(\mathscr{K})$ est une partie quarrable de $f(\mathscr{S})$, d'aire $\alpha^2 a$, où** $\alpha = \det \varphi$.

Rapportons $\mathscr{S}$ au repère $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ orthonormal direct et $f(\mathscr{S})$ au repère $(f(O); \alpha^{-1}\varphi(\mathbf{i}), \alpha^{-1}\varphi(\mathbf{j}), \alpha^{-1}\varphi(\mathbf{k}))$ lui aussi orthonormal direct.

Nous pouvons ainsi identifier $\mathscr{S}$ [resp. $f(\mathscr{S})$] au support d'une nappe paramétrée (D, F)[resp. $(D, \alpha F)$] de $\mathbb{R}^3$ orienté. Comme F, αF est une immersion et une injection. Les applications de D dans $\mathbb{R}$:

$$\|F'_u \wedge F'_v\| = H \quad \text{et} \quad \|(\alpha F)'_u \wedge (\alpha F)'_v\| = \alpha^2 H$$

sont soit non intégrables sur D, soit intégrables sur D et d'intégrales dans le rapport α^2. $\square$

c) ***Parties $\mathscr{R}$-négligeables de $\mathscr{S}$.*** — DÉFINITION. — **On dit qu'une partie de $\mathscr{S}$ est *Riemann-négligeable* (en abrégé *$\mathscr{R}$-négligeable*) si et seulement si elle est quarrable et d'aire nulle.**

Soient $\mathscr{K} \subset \mathscr{S}$ et $X = (\overline{F})^{-1}(\mathscr{K})$, où $(D, F) \in \Sigma$ est arbitrairement choisie. On a :

PROPOSITION V. — **Si X est un compact $\mathscr{R}$-négligeable de $\mathbb{R}^2$, alors $\mathscr{K} = F(X)$ est un compact $\mathscr{R}$-négligeable de $\mathscr{S}$.**

En effet $\mathscr{K}$ est alors un compact quarrable de $\mathscr{S}$, et, μ désignant la borne sur X de la fonction H (intégrable et donc bornée), on a (IV. 6.5.4, 1°) :

$$a(\mathscr{K}) \leqslant \mu \,.\, m(X) \quad \text{avec} \quad m(X) = 0 \qquad \square$$

EXEMPLE. — *Si $X \subset D$ est le support d'un C^1-arc paramétré compact (I, f) de $\mathbb{R}^2$, alors $\mathscr{K} = F(X)$ est un compact $\mathscr{R}$-négligeable de $\mathscr{S}$.*

L'intervalle compact I de $\mathbb{R}$ en est une partie $\mathscr{R}$ négligeable, et f est M-lipschitzienne avec $M = \sup_{t \in I} \|f'(t)\|$; d'après IV. 6. 5. 3, 6°, $X = f(I)$ est un compact $\mathscr{R}$-négligeable de $\mathbb{R}^2$. Reste à utiliser la proposition V. $\square$

En d'autres termes : *un C^1-arc paramétré compact tracé sur $\mathscr{S}$ en est une partie $\mathscr{R}$-négligeable.* Ceci justifie :

d) ***Additivité de l'aire.*** **Soient $\mathscr{K}_1$ et $\mathscr{K}_2$ deux compacts quarrables de $\mathscr{S}$, tels que $\mathscr{K}_1 \cap \mathscr{K}_2$ soit $\mathscr{R}$-négligeable; alors $\mathscr{K}_1 \cup \mathscr{K}_2$ est un compact de $\mathscr{S}$ que l'on** *convient* **de qualifier de** *quarrable*, **d'aire** $a(\mathscr{K}_1) + a(\mathscr{K}_2)$.

4° ***Notion d'intégrale de surface.*** — Nous reprenons les notations du 1°, en adjoignant à $\mathscr{S}$ une application $f : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$, continue.

En reprenant le 2°, en remplaçant $H : D \to \mathbb{R}$ par $(f \circ F) \times H : D \to \mathbb{R}$, qui est continue, on constate que l'on peut poser, sans risque de contradiction :

DÉFINITION. — **Soit $\mathscr{K}$ une partie de $\mathscr{S}$** (qui pourra être $\mathscr{S}$ elle-même). **On dit que l'application f est intégrable sur $\mathscr{K}$ si et seulement s'il existe une** $(D, F) \in \Sigma$ **telle que l'application** $(f \circ F) \times H$ **soit intégrable sur** $X = (\overline{F})^{-1}(\mathscr{K})$.

Si cette condition est remplie, on dit que l'intégrale double :

$$\iint_X f(F(u, v))\, \mathrm{d}A \quad \text{où} \quad \mathrm{d}A = \|F'_u(u, v) \wedge F'_v(u, v)\|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$

est l'*intégrale de f sur $\mathscr{K}$.*

C'est ainsi que l'aire de $\mathscr{K}$ est, lorsqu'elle existe l'intégrale sur $\mathscr{K}$ de l'application $f : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ qui associe 1 à tout élément de $\mathscr{S}$.

CAS PARTICULIER. — *Si $\mathscr{K}$ est une partie compacte et quarrable de $\mathscr{S}$* (cf. proposition I du 2°) *alors l'intégrale de f sur $\mathscr{K}$* existe et l'une quelconque des paramétrisations de $\mathscr{S}$ *permet de la calculer.*

4.2.2. Pratique du calcul de l'aire d'une surface

On utilise un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

1° ***Cas d'une surface cartésienne.*** — Soit $\mathscr{S} = \operatorname{supp}(D, F)$ avec

$$F(x, y) = O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$$

où $f : D + \mathbb{R}$ est de classe C^k.

Dans la mesure où nous savons que $\mathscr{S}$ est ici une surface cartésienne et donc plongée, nous sommes dans un cas favorable.

Nous avons calculé au **4.1.1**, 2°

$$H = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \quad \text{avec} \quad p = f'_x, \qquad q = f'_y.$$

EXEMPLE. — D est $\mathbb{R}^2$ et $f(x, y) = axy$, $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Ici $\mathscr{S}$ est un *paraboloïque hyperbolique.* Étudions la partie $\mathscr{K} = F(X)$, avec :

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

X est un ouvert quarrable de $\mathbb{R}^2$ et vérifie $\overline{X} \subset D$.

D'après la proposition II du **4.2.1**, 2°, $\mathscr{K}$ est quarrable, d'aire :

$$a(\mathscr{K}) = \iint_{\overline{X}} \sqrt{1 + a^2(x^2 + y^2)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Un calcul en coordonnées polaires donne $a(\mathscr{K}) = \dfrac{2\pi}{3a^2}((1 + a^2)^{3/2} - 1)$.

2° ***Cas général.*** — Ici $\mathscr{E} = \text{supp}\,(D, F)$ avec :

$$F(u, v) = O + X(u, v)\mathbf{i} + Y(u, v)\mathbf{j} + Z(u, v)\mathbf{k} \qquad (1)$$

L'élément d'aire s'écrit :

$$\mathrm{d}A = H(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \qquad H = \sqrt{EG - F^2},$$

où : $$E = \|F'_u\|^2, \qquad F = (F'_u|F'_v), \qquad G = \|F'_v\|^2$$

s'explicitent à l'aide de (1).

Il y a naturellement lieu de s'assurer que la nappe paramétrée (D, F) est *régulière* (i.e. que H ne prend pas la valeur 0) et *simple*.

3° ***Un cas de simplification.*** — Revenons à la notation du 2°, dans le cas où les lignes coordonnées G_u et C_v, respectivement caractérisées par u = Cte et v = Cte, constituent deux familles orthogonales, ce qui signifie que l'application $(F'_u|F'_v)$ est nulle et entraîne $H = \|F'_u\| \cdot \|F'_v\|$. On peut utiliser :

$$\|F'_u\| = \left|\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}u}\right|, \qquad \|F'_v\| = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v}\right|$$

où s et σ sont des abscisses curvilignes sur les arcs G_u et C_v orientés.

EXEMPLE. — *Vis à filet carré.*
$\mathscr{S}$ est la spire d'*hélicoïde droit* support de (D, F) avec

$$D =]0, 2\pi[\times \mathbb{R}^*$$

et :

$$F(u, v) = O + av\cos u\mathbf{i} + av\sin u\mathbf{j} + bu\mathbf{k},$$
$$(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*.$$

Nous avons vu que les familles des G_u (génératrices rectilignes) et des C_v (hélices circulaires d'axe Oz) sont orthogonales. On calcule :

$$\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v}\right| = a; \qquad \left|\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}u}\right| = \sqrt{a^2v^2 + b^2}; \qquad H(u, v) = a\sqrt{a^2v^2 + b^2}$$

Nous constatons que la nappe (D, F) est régulière et simple.

Soit $\mathscr{K} = F(X)$, où $X =]0, \omega[\times]0, 1[$ avec $0 < \omega \leqslant 2\pi$; X est un ouvert quarrable de $\mathbb{R}^2$ sur lequel H est continue, bornée et donc intégrable; $\mathscr{K}$ est ainsi quarrable.

L'intégrale de H sur X est égale à celle du prolongement borné $\hat{H} : (u, v) \mapsto a\sqrt{a^2v^2 + b^2}$ de H à $\overline{X}$. L'aire de $\mathscr{K}$ est donc :

$$\int_0^\omega a\,\mathrm{d}u \int_0^1 \sqrt{a^2v^2 + b^2}\,\mathrm{d}v = \frac{\omega}{2}b^2\left(\operatorname{Arg\,sh}\frac{a}{b} + \frac{a}{b}\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}\right)$$

(Sur la figure 53, on a pris $\omega = \pi/2$: quart de spire.)

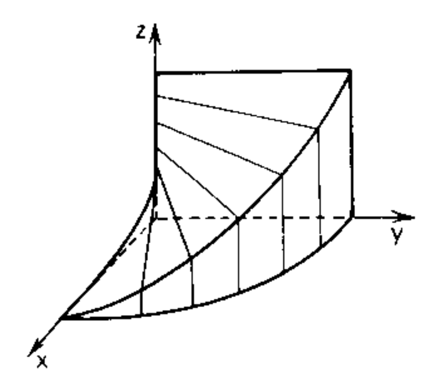


FIG. 53.

4.2.3. Aire d'une surface décomposable

1° DÉFINITION. — **Une partie $\mathscr{S}$ de $\mathscr{E}$ est dite** *surface décomposable* **de classe C^k si, et seulement s'il existe une famille finie $(\mathscr{S}_i)_{i\in I}$ de surfaces plongées**(1) **de classe C^k vérifiant les conditions :**

i) Pour tout $i \in I$, $\mathscr{S}_i$ est inclus dans $\mathscr{S}$;

ii) Pour tout $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $\mathscr{S}_i \cap \mathscr{S}_j = \varnothing$;

iii) $\mathscr{S} \backslash \bigcup_{i\in I} \mathscr{S}_i$ est une réunion finie de supports de C^1-arcs paramétrés compacts.

On dit alors que $(\mathscr{S}_i)_{i\in I}$ est une *décomposition* **de $\mathscr{S}$.**

Dans le cas où $\mathscr{S}$ est une surface (au sens de 3.3.1) cette définition n'appelle aucune observation : *décomposable* est alors un adjectif qui traduit l'existence d'une famille de paramétrisations locales vérifiant des conditions imposées.

Mais — bien que chacun des $\mathscr{S}_i$ qui intervient dans la définition soit une surface — ce que nous venons d'appeler *surface décomposable* n'est pas nécessairement une *surface* (exemple : la frontière d'un pavé de $\mathscr{E}$).

DEUX EXEMPLES DE SURFACES DÉCOMPOSABLES. — *a*) Une surface $\mathscr{S}$ plongée est une surface décomposable qui admet la décomposition $(\mathscr{S})$.

b) Soient $\mathscr{S}$ une surface plongée de représentant (U, F), et X un compact de U tel que $X \backslash \mathring{X}$ soit, dans $\mathbb{R}^2$, une réunion finie de supports de C^1-arcs paramétrés compacts. Sous réserve que $\mathring{X}$ soit un domaine (ou une réunion finie de domaines disjoints), $\mathscr{X} = F(X)$ est une surface décomposable.

2° Nous admettrons sans démonstration :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soit $\mathscr{S}$ une surface décomposable de classe C^k. S'il existe une décomposition de $\mathscr{S}$, $(\mathscr{S}_i)_{i\in I}$, pour laquelle chaque $\mathscr{S}_i$ est quarrable,**

(1) L'étude s'étend au cas où les $\mathscr{S}_i$ sont les supports de C^k-nappes paramétrées régulières et simples.

alors la somme $\sum_{i \in I} a(\mathscr{S}_i)$ est commune à toutes les décompositions de ce type, et on dit que $\mathscr{S}$ est quarrable, d'aire :

$$a(\mathscr{S}) = \sum_{i \in I} a(\mathscr{S}_i).$$

REMARQUE. — Sans qu'il soit question de démonstration, ce théorème s'explique par le fait que le support d'un C^1-arc paramétré compact de $\mathscr{E}$ est une partie $\mathscr{R}$-négligeable de toute surface qui le contient (cf. **4.2.1**, 3°, *c*)).

EXEMPLE I. — *Aire d'une sphère $\mathscr{S}$ de rayon $R > 0$.*

Nous savons que $\mathscr{S}$ est une surface compacte et donc non plongée. Nous pouvons utiliser un repère de façon qu'elle admette l'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

a) Soit $\mathscr{S}_1 = \text{supp}\,(U, F)$, où U est le domaine :

$$U = \{(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 | (-\pi < \varphi < \pi) \wedge (0 < \theta < \pi)\}$$

et où :

$$F(\varphi, \theta) = O + R \sin\theta \cos\varphi \mathbf{i} + R \sin\theta \sin\varphi \mathbf{j} + R \cos\theta \mathbf{k}$$

$(\mathscr{S}_1)$ est une décomposition de $\mathscr{S}$. En effet :

— $\mathscr{S}_1$ est une C^∞-surface plongée et $\mathscr{S}_1$ est incluse dans $\mathscr{S}$;

— $\mathscr{S} \backslash \mathscr{S}_1$ est le support de l'arc paramétré compact $([0, \pi], f)$, avec :

$$f(t) = O - R \sin t \mathbf{i} + R \cos t \mathbf{k}.$$

• Comme U est un ouvert quarrable de $\mathbb{R}^2$ et comme :

$$H : (\varphi, \theta) \longmapsto \|F'_\varphi(\varphi, \theta) \wedge F'_\theta(\varphi, \theta)\| = \|F'_\varphi(\varphi, \theta)\| \, \|F'_\theta(\varphi, \theta)\| = R^2 \sin\theta$$

est bornée sur U, on constate (**4.2.1**, 2°) que $\mathscr{S}_1$ est quarrable d'aire :

$$\iint_U R^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = 4\pi R^2.$$

Il résulte du théorème précédent que $\mathscr{S}$ est une surface quarrable, d'aire $4\pi R^2$.

b) Montrons maintenant que $(\mathscr{S}_i = \text{supp}\,(U, F_i))_{i \in \{1,2\}}$, où U est le domaine :

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < R^2\}$$

et où :

$$F_i(x, y) = O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \varepsilon_i \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\mathbf{k}, \quad (\varepsilon_1 = 1, \; \varepsilon_2 = -1),$$

est une seconde décomposition de $\mathscr{S}$. En effet :

— Pour tout $i \in \{1, 2\}$, $\mathscr{S}_i$ est une surface cartésienne et donc plongée, incluse dans $\mathscr{S}$; on a $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2 = \varnothing$;

— $\mathscr{S} \backslash \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2$ est le support du C^∞-arc paramétré compact $([0, 2\pi], f)$ avec

$$f(t) = O + R \cos t \mathbf{i} + R \sin t \mathbf{j}.$$

• Ici U est encore un ouvert quarrable de $\mathbb{R}^2$, mais les $H_i(x, y)$, qui s'écrivent l'une et l'autre $(x, y) \longmapsto R/\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ sont non bornées, et donc non intégrables. On constate cependant que l'on dispose de l'intégrale double impropre (que l'on calcule en coordonnées polaires) :

$$\iint_U \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy = 2\pi R^2.$$

EXEMPLE II. — *Aire de la partie $\mathscr{S}$ de $\mathscr{E}$ définie par :*

$$(x^2 + y^2 + z^2 = 1) \wedge (x^2 + (y - 1/2)^2 \leqslant 1/4).$$

$\mathscr{S}$ est la partie de la sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ incluse dans « l'intérieur » du cylindre de révolution d'équation : $x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$.

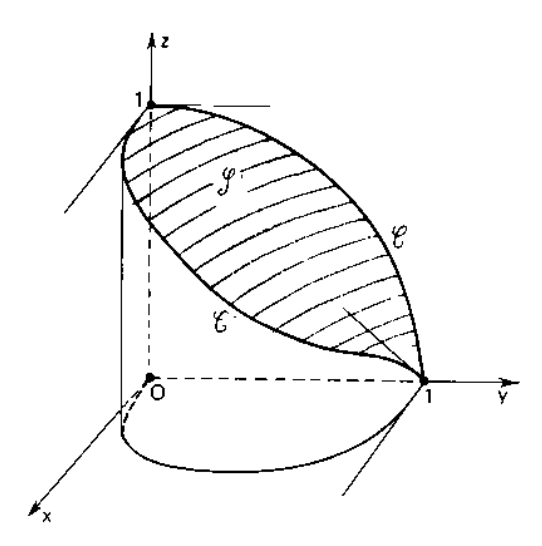


FIG. 54.

Utilisant des propriétés de symétrie, nous nous ramènerons (1) au calcul de l'aire de la partie $\mathscr{S}'$ de $\mathscr{S}$ incluse dans le « premier octant », quitte à multiplier par 4 l'aire de $\mathscr{S}'$ (si elle existe).

L'étude de l'exemple I *a*) permet de montrer que $\mathscr{S}'$ est une *surface décomposable*. Elle s'applique intégralement à cela près qu'ici :

$$U = \{(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid (0 < \varphi < \pi/2) \wedge (0 < \theta < \varphi)\}$$

et que $\mathscr{S}' \backslash \mathscr{S}_1 = \mathscr{C} \cup \mathscr{C}'$ (cf. figure 54). Il en résulte que $\mathscr{S}'$ est quarrable. Finalement :

$$a(\mathscr{S}) = 4 \iint_U \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi - 4.$$

3° ***Angle solide.*** — Soient S la sphère de centre O et de rayon 1 et $\mathscr{T}$ une surface décomposable incluse dans S. La partie $C = \bigcup_{m \in \mathscr{T}} \Delta_m$ de $\mathscr{E}$, où Δ_m désigne la demi-droite d'origine O qui contient m, est dite *solide conique* associé à $\mathscr{T}$. Dans le cas où la surface décomposable $\mathscr{T}$ est quarrable, son aire est dite *angle solide* du solide conique C.

On utilise alors des paramétrisations locales de S de la forme $(I \times]\alpha, \beta[, F)$, où I est un intervalle d'amplitude inférieure à 2π, où $0 < \alpha < \beta < \pi$ et où :

$$F(\varphi, \theta) = O + \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{j} + \cos\theta\,\mathbf{k} \qquad (1)$$

(1) En utilisant implicitement le fait que le demi-cercle :

$$(y^2 + z^2 = 1) \wedge (x = 0) \wedge (y \geqslant 0)$$

est le support d'un C^1-arc paramétré compact.

On est ramené au calcul d'intégrales de la forme : $\iint_\Delta \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$. Des compléments seront donnés au **5.6.** *6*, 2°, à propos du *flux*.

EXEMPLE. — Étant donné $\gamma \in]0, \pi/2[$, C est l'ensemble des demi-droites d'origine O qui font avec $O + \mathbb{R}_+ \mathbf{k}$ un angle au plus égal à γ. Ici $\mathscr{C}$ est la calotte sphérique qui admet la décomposition $((\Delta, F))$, avec $\Delta =]0,2\pi[\times]0, \gamma[$ et F donnée par (1). On dispose de l'angle solide de C :

$$a(\mathscr{C}) = \iint_\Delta \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = 2\pi(1 - \cos\gamma).$$

4.2.*4***. Aire d'une « surface de révolution »**

On utilise un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O ; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble de révolution d'axe Oz (au sens de II.7.3. *6*) dont la demi-méridienne $\mathscr{C}$ dans le demi-plan $\mathscr{P}$ d'équation $(y = 0) \wedge (x \geqslant 0)$ est le support d'un C^k-arc paramétré (I, f), simple et régulier, avec :

$$f(t) = O + P(t)\mathbf{i} + z(t)\mathbf{k}, \; P(t) > 0 \quad \text{pour tout } t \in I.$$

L'étude de $\mathscr{S}$ a été amorcée au **4.1.***4* : il s'agit du support de la nappe paramétrée de révolution $(I \times \mathbb{R}, F)$ avec :

$$F(t, \theta) = O + \rho(t)\mathbf{u}_\theta + z(t)\mathbf{k}.$$

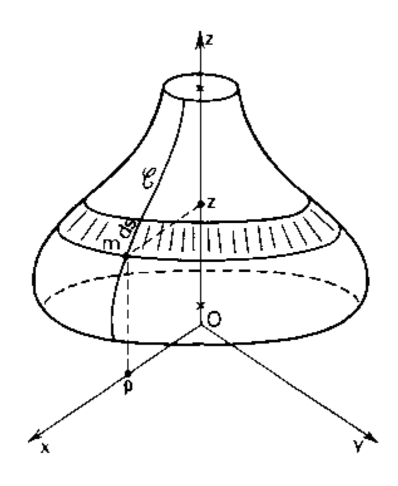


FIG. 55.

Le calcul du **4.1.***4* (en fait l'orthogonalité des méridiens et des parallèles) fournit :

$$H(t, \theta) = \rho(t)\sqrt{\rho'^2(t) + z'^2(t)}$$

ce qui nous apprend qu'ici la nappe est régulière.

• Nous étudions le cas où I est un intervalle compact $[a, b]$, $a < b$. Notons $U =]a, b[\times]0, 2\pi[$, et observons que :

— $(U, F \mid U)$ est une C^k-nappe paramétrée de support $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}$, *régulière et simple*, et même *plongée* dans le cas où l'arc (I, f) est plongé;

$\mathscr{S}/\mathscr{S}_1$ est la réunion de $\mathscr{C}$ et des parallèles des points $f(a)$ et $f(b)$ et donc la réunion des supports de trois C^{-1}-arcs paramétrés compacts.

Nous avons ainsi établi que $\mathscr{S}$ admet la décomposition ($\mathscr{S}_1$), au sens propre si l'arc (I, f) est plongé, et sinon au sens de l'extension de la notion de surface décomposable qui figure au **4.2**.*3*, 1°). Comme U est un ouvert quarrable de $\mathbb{R}^2$ sur lequel H est bornée (puisque continue sur $\overline{U}$),

$\mathscr{S}$ est quarrable, d'aire $\iint_U H(t, \theta)\,dt\,d\theta$. On calcule :

$$a(\mathscr{S}) = 2\pi \int_a^b \rho(t)\sqrt{\rho'^2(t) + z'^2(t)}\,dt$$

En particulier, si le paramètre est une abscisse curviligne, alors :

$$a(\mathscr{S}) = 2\pi \int_{s_1}^{s_2} \rho(s)\,ds$$

Mnémotechniquement, on retient dans tous les cas : $a(\mathscr{S}) = 2\pi \int_{\mathscr{C}} \rho\,ds$.

- L'étude vaut si (I,f) est un arc fermé simple régulier ($\mathscr{S}\backslash\mathscr{S}_1$ est ici la réunion de $\mathscr{C}$ et du parallèle de $f(a) = f(b)$.
- L'étude s'étend par fractionnement au cas où f' s'annule un nombre fini de fois et au cas où ρ prend un nombre fini de fois la valeur 0 .

En revanche dans le cas où l'arc (I,f) n'est pas simple, il faut prendre des précautions.

EXEMPLE I. — *Ellipsoïde de révolution.*

On adopte ici :

$$I = [-\pi/2,\ \pi/2] \qquad \text{et} \qquad f(t) = O + a\cos t\,\mathbf{i} + b\sin t\,\mathbf{k}$$

$\mathscr{C}$ est le support d'un C^∞-arc simple et régulier : on a $\rho(t) > 0$, sauf aux extrémités de l'arc, en lesquelles $\rho(t) = 0$. L'étude s'applique, $\mathscr{S}$ est quarrable d'aire :

$$2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt$$

— Si $a > b$, c'est-à-dire si Oz est axe non focal de $\mathscr{C}$ (ellipsoïde aplati) on pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ et on obtient l'aire :

$$\mathscr{A}(a, b) = 4\pi a \int_0^{+1} \sqrt{b^2 + c^2u^2}\,du = 2\pi\left[a^2 + \frac{ab^2}{c}\operatorname{Log}\left(\frac{a+c}{b}\right)\right].$$

— Si $a < b$ (ellipsoïde allongé) on pose $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ et on obtient :

$$\mathscr{A}'(a, b) = 4\pi a \int_0^{+1} \sqrt{b^2 - c^2u^2}\,du = 2\pi\left[a^2 + \frac{ab^2}{c}\operatorname{Arc\,sin}\frac{c}{b}\right],$$

— Si $a = b$, on retrouve l'aire $4\pi a^2$ de la sphère de rayon a.

EXEMPLE II. — *Tore à collier (éventuellement nul).*

Le lecteur reverra la définition et la figure du II.7.3.6, 5°. Ici

$$I = [0, 2\pi] \quad \text{et} \quad f(t) = O + (a + R\cos t)\mathbf{i} + R\sin t\,\mathbf{k} \quad (0 < R \leqslant a)$$

$\mathscr{C}$ est le support d'un C^∞-arc simple fermé régulier ; on a $\rho(t) > 0$ (sauf en un point si $R = a$). L'étude s'applique. $\mathscr{S}$ est quarrable d'aire :

$$2\pi \int_0^{2\pi} (a + R\cos t)R\,dt = 4\pi^2 aR$$

EXERCICES

On se place dans un espace affine euclidien orienté $\mathscr{E}$; lorsque l'on considère un repère, on suppose qu'il est orthonormal direct.

4.01. — Nappes parallèles. — Soit Σ une C^k-nappe géométrique simple et régulière, définie par un représentant (D, F). Pour $a \in \mathbb{R}^*$ donné, on note Σ_a la C^{k-1} nappe géométrique représentée par :

$$\left(D, (u, v) \longmapsto F(u, v) + a\,\frac{F'_u \wedge F'_v}{\|F'_u \wedge F'_v\|}(u, v)\right)$$

Montrer que les normales à Σ et Σ_a aux points de même paramètre (u, v) sont confondues. A la classe près, on parle de nappes parallèles.

4.02. — Ruban de Möbius. — A partir d'un rectangle $a_0b_0c_0d_0$ (avec $\|\overrightarrow{a_0b_0}\| = 2l$, $\|\overrightarrow{a_0d_0}\| = 2\pi R$ et $0 < l < R$), on a « tordu » (une fois) et « uni » a_0 à c_0 et b_0 et d_0, de façon à obtenir le support $\mathscr{S}$ de la nappe paramétrée :

$$\sigma = \left(]-l, l[\times \mathbb{R},\ (t, \theta) \longmapsto O + \left(R + t\sin\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{u}_\theta + t\cos\frac{\theta}{2}\,\mathbf{k}\right).$$

a) Montrer que la nappe σ est régulière et qu'au point de paramètre (t, θ) elle admet le vecteur unitaire normal $\mathbf{N}(t, \theta)$ tel que :

$$\mathbf{N}(0, \theta) = -\cos\frac{\theta}{2}\,\mathbf{u}_\theta + \sin\frac{\theta}{2}\,\mathbf{k}.$$

b) Montrer que $\mathscr{S}$ est une surface (au sens des sous-variétés) et que cette surface n'est pas orientable : on pourra étudier la variation de $\mathbf{N}(t, \theta)$, lorsque (t, θ) parcourt $\{0\} \times [\alpha, \alpha + 2\pi]$.

c) Déterminer les deux formes quadratiques fondamentales en un point de $\mathscr{S}$.

4.03. — Les notations étant celles du 4.1.*1*, 2°, montrer que la matrice de l'endomorphisme de Weingarten de Σ au point M, dans la base $\mathscr{B}_{u,v}$ est :

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$$

4.04. — Soient Σ une C^k-nappe géométrique simple et régulière ($k \geqslant 2$), et (D, F) un *représentant canonique*, i.e. tel que les arcs coordonnés soient des lignes de courbure (on admet sans démonstration l'existence de tels représentants).

a) Les fonctions courbures principales sont notées σ_u et σ_v, de façon que

$$\mathbf{N}'_u = -\sigma_u \mathbf{F}'_u \qquad \text{et} \qquad \mathbf{N}'_v = -\sigma_v F'_v.$$

Montrer qu'en tout point de Σ qui n'est pas un ombilic on a :

$$L(u, v) = \sigma_u(u, v) E(u, v); \qquad N(u, v) = \sigma_v(u, v) G(u, v).$$

b) On suppose en outre que $k \geqslant 3$ et qu'aucun point de Σ n'est un ombilic. Établir :

$$F''_{u^2} = \frac{E'_u}{2E} F'_u - \frac{E'_v}{2G} F'_v + L\mathbf{N}$$

et deux égalités analogues. En déduire les égalités :

$$4LN = -2(E''_{v^2} + G''_{u^2}) + G'_u \frac{\partial}{\partial u} \operatorname{Log}(EG) + E'_v \frac{\partial}{\partial v} \operatorname{Log}(EG)$$

$$2L'_v = \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right) E'_v; \qquad 2N'_u = \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right) G'_u$$

$$\frac{\partial \sigma_u}{\partial v} = \frac{E'_v}{2E}(\sigma_v - \sigma_u); \qquad \frac{\partial \sigma_v}{\partial u} = \frac{G'_u}{2G}(\sigma_u - \sigma_v)$$

c) On suppose en outre qu'en un point (u_0, v_0) de U tel que $\sigma_u(u_0, v_0) > \sigma_v(u_0, v_0)$, la fonction σ_u atteint un maximum et la fonction σ_v atteint un minimum. Montrer que la courbure totale de Σ au point de paramètre (u_0, v_0) s'écrit :

$$-\frac{E''_{v^2} + G''_{u^2}}{2EG}(u_0, v_0)$$

et qu'elle est négative (au sens large).

4.05. — Courbure moyenne en un point de la nappe définie par :

$$x = \operatorname{sh} v \cos u, \qquad y = \operatorname{sh} v \sin u, \qquad z = u.$$

4.06. — On cherche les nappes de révolution qui sont des surfaces minima (i.e. des nappes à courbure moyenne nulle).

a) Montrer qu'une solution est la nappe (*caténoïde*) représentée par :

$$(\mathbb{R}^2, (t, \theta) \longmapsto O + \operatorname{ch} t\, \mathbf{u}_\theta + t\,\mathbf{k}).$$

b) Montrer qu'inversement toute solution est une sous-nappe de caténoïde.

4.07. — On cherche les nappes de révolution en tous points desquelles la courbure totale est égale à -1.

a) Montrer qu'une solution est la nappe (*pseudosphère*) représentée par :

$$(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, (t, \theta) \longmapsto O + \frac{1}{\operatorname{ch} t} \mathbf{u}_\theta + (t - \operatorname{th} t)\mathbf{k}).$$

b) Étudier la réciproque.

c) Trouver les géodésiques d'une pseudosphère.

4.08. — Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation :

$$x(x^2 - y^2 + z^2) + ayz = 0.$$

Le plan d'équation $y = mx$, $m \in \mathbb{R}^*$, coupe $\mathscr{S}$ suivant la réunion de Oz et d'une courbe $\mathscr{C}_m$. Étudier comment varie, avec m, le centre de courbure en O à $\mathscr{C}_m$.

4.09. — Lieu des centres de courbure principaux de l'ellipsoïde $\mathscr{S}$ d'équation

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1 = 0$$

en un point qui décrit la section de $\mathscr{S}$ par le plan d'équation $z = 0$.

4.10. — Asymptotiques de la surface engendrée par une parabole tournant autour de sa directrice.

4.11. — Asymptotiques d'un tore à collier nul.

4.12. — *a*) Asymptotiques et lignes de courbure de la nappe paramétrée définie par :

$$x = a(\cos v + u \sin v), \qquad y = a(\sin v - u \cos v), \qquad z = b(u + v),$$
$$(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2.$$

b) Même question pour la surface d'équation $z = \operatorname{Log}\cos x - \operatorname{Log}\cos y$; on vérifiera en outre qu'il s'agit d'une surface minima.

4.13. — Asymptotiques des nappes paramétrées définies par :

$$x = u - v, \qquad y = u^2 + v^2, \qquad z = u^2 - v^2 ;$$
$$x = u \cos v, \qquad y = u \sin v, \qquad z = a \cos 2v ;$$
$$x = (1 + u)\operatorname{ch} v, \qquad y = (1 - u)\operatorname{sh} v, \qquad z = u ;$$
$$x = \cos u - v \sin u, \qquad y = \sin u + v \sin u, \qquad z = e^{u+v} ;$$
$$x = \sin u \cos v, \qquad y = \sin u \sin v, \qquad z = \cos u + \operatorname{Log}(\operatorname{tg} u/2) ;$$
$$x = (1 + u) \cos v, \qquad y = (1 - u) \cos v, \qquad z = u(1 + \cos u \cos v).$$

4.14. — Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation : $2x^3 - 3xy + z = 0$.

a) Contour apparent pour la direction $\mathbb{R}\mathbf{k}$; *b*) Asymptotiques.

4.15. — Asymptotiques de la nappe engendrée par une droite qui coupe Oz sous l'angle $\pi/4$, et rencontre la « courbe » d'équation :

$$(z = 0) \wedge (y^2(x^2 + y^2) - x^2 = 0)$$

4.16. — Asymptotiques des surfaces d'équations :

$$z = x^\alpha y^\beta ; \qquad z = \operatorname{Log}(x^2 + y^2) ; \qquad x^\alpha + y^\beta + z^\gamma = 1$$
$$z(x^2 + y^2) = a^3 ; \qquad z^2(x^2 + y^2) = a^4$$

4.17. — Soit Σ une C^k-nappe géométrique régulière orientée et M un point de Σ par lequel passent deux asymptotiques. Calculer leurs torsions en M, en fonction de la courbure totale.

4.18. — On donne deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$, deux applications $\mathbf{U} : I \to E$ et

$\mathbf{V} : J \to E$ de classe C^2, et un point $(u_0, v_0) \in I \times J$. Pour $i \in \mathbb{N}_2$, on note Σ_i la nappe géométrique représentée par $(I \times J, m_i)$, où $m_1(u, v)$ s'écrit :

$$O + \mathbf{U}(u) \wedge \mathbf{V}(v) + \int_{v_0}^{v} \mathbf{V}(t) \wedge \mathbf{V}'(t)\,dt - \int_{u_0}^{u} \mathbf{U}(t) \wedge \mathbf{U}'(t)\,dt$$

et où

$$m_2(u, v) = m_1(u, v) - 2\mathbf{U}(u) \wedge \mathbf{V}(v).$$

a) Déterminer la normale à Σ_i au point $m_i(u, v)$.

b) Déterminer les asymptotiques de Σ_i.

c) Vérifier que, pour tout $(u, v) \in I \times J$, la droite $\mathrm{Aff}(m_1(u, v), m_2(u, v))$, notée $\Delta(u, v)$, est tangente à Σ_1 et Σ_2. Montrer que, lorsque les champs vectoriels **U** et **V** sont unitaires et de classe C^∞, les $\Delta(u, v)$ sont les normales d'une famille de surfaces parallèles (cf. exercices **4**.01).

4.19. — On considère la nappe paramétrée définie par :

$$x = u \cos v, \qquad y = u \sin v, \qquad z = av + \sqrt{b^2 - u^2} - b \operatorname{Log} \frac{b + \sqrt{b^2 - u^2}}{u}$$

a) Montrer que les arcs C_v, $v = C^{te}$, sont plans et que leurs plans coupent la nappe sous des angles constants.

b) Déterminer les lignes de courbure et les rayons de courbure principaux.

c) Déterminer les asymptotiques, leur courbure et leur torsion.

4.20. — Soit $\mathcal{S}$ l'hélicoïde droit d'équation : $y \cos z - x \sin z = 0$.

a) Déterminer les formes quadratiques fondamentales et montrer que les rayons de courbure principaux au point de coordonnées (x, y, z) sont égaux à $\pm (x^2 + y^2 + 1)$.

b) Déterminer les lignes de courbure.

4.21. — Soit Γ un C^2-arc plan régulier tracé sur une C^2-nappe régulière Σ. Si la normale à Σ le long de Γ fait un angle constant avec le plan de Γ, alors Γ est une ligne de courbure de Σ.

4.22. — Trouver les arcs réguliers tracés sur le paraboloïde hyperbolique $\mathcal{S}$ d'équation $xy = az$, tels qu'en chaque point la tangente soit une bissectrice des deux génératrices de $\mathcal{S}$ qui contiennent le point.

En déduire les lignes de courbure de $\mathcal{S}$.

4.23. — Lignes de courbure de la surface d'équation :

a) $z = \operatorname{Log}(\cos x \cos y)$; *b*) $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1, \quad (ABC \neq 0)$

4.24. — Soit $f : I \to \mathbb{R}$, de classe C^1 (I est un intervalle de $\mathbb{R}$). Déterminer les asymptotiques et les lignes de courbure de la nappe paramétrée de révolution

$$\sigma = (I \times \mathbb{R}, (t, \theta) \longmapsto O + \rho(t)\mathbf{u}_\theta + z(t)\mathbf{k})$$

où :

$$\rho(t) = f'(t) \sin t - f(t) \sin t\,; \qquad z(t) = f'(t) \cos t + f(t) \sin t$$

Déterminer f pour que par tout point de σ passent deux asymptotiques orthogonales.

4.25. — Déterminer les géodésiques de la nappe définie par :

a) $x = \cos u \cos v, \qquad y = \cos u \sin v, \qquad z = 4\left(\sin\frac{u}{2} - \cos\frac{u}{2}\right)$

(Ce sont des arcs fermés ; les rectifier) ;

b) $x = v \cos u\,; \qquad y = v \sin u\,; \qquad z = au\,;$

c) $x^2 + y^2 - 2pz = 0.$

4.26. — Soit Σ une C^k-nappe géométrique régulière orientée ($k \geqslant 2$).

a) Un arc de Σ qui en est à la fois ligne de courbure et géodésique est plan.

b) Un arc bi-régulier plan de Σ qui en est une géodésique en est aussi une ligne de courbure.

4.27. — Soient Σ une nappe conique de sommet O, et Γ une géodésique de Σ autre qu'une génératrice.

a) Montrer que la projection de O sur les tangentes à Γ sont équidistantes de O, et qu'elles engendrent une développante de Γ.

b) Montrer que, sur Γ, γ/c, rapport des fonctions torsion et courbure, est une fonction affine de l'abscisse curviligne.

4.28. — Courbure moyenne, courbure totale et géodésique de la nappe définie par :

$$x = \operatorname{th} u \cos v, \qquad y = \operatorname{th} u \sin v, \qquad z = \frac{1}{\operatorname{ch} u} + \operatorname{Log}(\operatorname{th} u/2)$$

4.29. — Soit $\mathscr{S}$ le tore à collier engendré par la rotation autour de Oz du cercle d'équation :

$$(y = 0) \wedge ((x - a)^2 + z^2 = R^2), \qquad R = a \sin \alpha, \qquad \alpha \in \left]0, \pi/2\right[$$

a) Trouver les courbes de $\mathscr{S}$ qui coupent les parallèles sous l'angle donné β.

b) Montrer que, pour $\beta = \alpha$, on obtient des cercles qui se projettent orthogonalement sur le plan $z = 0$ suivant des ellipses de foyer O (cercles de Villarceau).

c) Montrer que, pour $\operatorname{tg} \beta / \operatorname{tg} \alpha$ entier, on obtient des arcs fermés simples. En déduire que sur tout tore à collier existent des arcs fermés simples sur lesquels la torsion ne s'annule pas.

4.30. — Loxodromies d'un paraboloïde de révolution.

4.31. — Déterminer une nappe de révolution d'axe Oz dont les loxodromies se projettent orthogonalement sur xOy suivant des paraboles de foyer O.

4.32. — Montrer que l'arc paramétré $(\mathbb{R}, f)$, où

$$f(t) = O + \frac{a}{\operatorname{ch} t}(\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + \operatorname{sh} t\,\mathbf{k}),$$

est une loxodromie de nappe de révolution.

4.33. — Hélices relatives à la direction $\mathbb{R}\mathbf{k}$ tracées sur :

a) un paraboloïde de révolution d'axe Oz;

b) une sphère de centre O;

c) le cylindre d'équation $z^2 = 2py$;

d) une nappe de révolution $z = f(\rho)$ que l'on déterminera de façon que les hélices se projettent orthogonalement sur xOy suivant les développantes d'un cercle de centre O;

e) le cylindre de section droite $(z = 0) \wedge (\rho = ae^{m\theta})$; étudier, dans ce cas le lieu des centres de courbure à l'une des hélices trouvées.

• *Les quatre exercices suivants font intervenir des surfaces, au sens de sous-variétés de dimension* 2 de $\mathscr{E}_3$.

4.34. — *a*) Soient $\mathscr{S}$ une surface connexe de classe $C^k (k \geqslant 2)$, et $\mathscr{S}'$ une surface fermée non vide de classe C^k, incluse dans $\mathscr{S}$. Montrer $\mathscr{S}' = \mathscr{S}$.

b) Soit $\mathscr{S}$ une surface orientée, compacte et connexe, de classe $C^k (k \geqslant 3)$, dont tous les points sont des ombilics. Montrer que $\mathscr{S}$ est une sphère.

4.35. — Soit $\mathscr{S}$ une surface compacte orientée, de classe $C^k (k \geqslant 2)$. Montrer que $\mathscr{S}$ admet au moins un point elliptique.

On considérera un point fixe b de $\mathscr{E}$ et on montrera que la fonction $m \longmapsto \|bm\|^2$ admet un maximum sur $\mathscr{S}$, atteint en un point a tel que b appartienne à la normale en a à $\mathscr{S}$; on étudiera les centres de courbure principaux en a.

4.36. — Soit $\mathscr{S}$ une surface orientée, compacte et connexe, de classe $C^k (k \geqslant 4)$ à courbure totale constante.

a) En utilisant l'exercice **4.35**, montrer que la courbure totale est strictement positive.

b) En utilisant l'exercice **4.04**, montrer que tous les points de $\mathscr{S}$ sont des ombilics et en déduire que $\mathscr{S}$ est une sphère (cf. exercice **4.34**).

4.37. — Soit $\mathscr{S}$ une surface orientée, compacte et connexe, de classe $C^k (k \geqslant 4)$, à courbure moyenne constante et à courbure totale strictement positive. Montrer que $\mathscr{S}$ est une sphère.

CALCUL D'AIRES.

4.38. — Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure affine canonique, on considère la partie de cylindre de révolution $\mathscr{C}$ d'équation :

$$(x^2 + y^2 = R^2) \wedge (0 \leqslant z \leqslant a), \qquad (a, R) \in (\mathbb{R}_+^*)^2.$$

A tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ on associe la famille de triangles « inscrits dans $\mathscr{S}$ » par le procédé suivant (le lecteur fera une figure en projection sur xOy) : on partage le cylindre en n morceaux de hauteur commune a/n en le coupant par des plans de cotes ka/n, $k \in \mathbb{N}_n$. Pour chacun des morceaux, on note C et C' les cercles qui le limitent et C'' le cercle médian.

— Dans C on inscrit un polygône régulier de $2p$ côtés, de sommets consécutifs $a_1, \ldots, a_{2p}$ (on note $a_{2p+1} = a_1$). On en déduit un polygône régulier $b_1, \ldots, b_{2p}$ inscrit

dans C'' par rotation d'angle $\pi/2p$ autour de Oz, suivie de translation $\alpha/2n\mathbf{k}$. On dispose ainsi des $2p$ triangles $a_i a_{i+1} b_i$ et des $2p$ triangles $b_i b_{i+1} a_i$; on obtient $4p$ nouveaux triangles par symétrie par rapport au plan de C''.

a) Montrer que la somme des aires des $8np$ triangles ainsi inscrits dans $\mathscr{S}$ est :

$$\mathscr{A}(n, p) = 8npR \sin \frac{\pi}{2p} \sqrt{\frac{a^2}{4n^2} + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{4p}}$$

b) Calculer : $\lim\limits_{p \to +\infty} \mathscr{A}(p, p)$ et $\lim\limits_{p \to +\infty} \mathscr{A}(p^2, p)$.

c) Calculer l'aire de $\mathscr{C}$ au sens du **4**.2.4.

4.39. – Soient $\mathscr{S}$ une surface plongée de $\mathscr{E}_3$ euclidien, O un point de $\mathscr{S}$, et $\mathscr{T}$ le plan tangent en O à $\mathscr{S}$; π désigne la projection orthogonale de $\mathscr{E}_3$ sur $\mathscr{T}$.

A tout compact quarrable $\mathscr{K}$ de $\mathscr{S}$ qui contient O, on associe son aire $a(\mathscr{K})$, supposée non nulle, et son diamètre $\delta(\mathscr{K})$.

a) Montrer que, pour $\delta(\mathscr{K})$ assez petit, π induit une bijection de $\mathscr{K}$ sur $\pi(\mathscr{K})$ et que celui-ci est un compact quarrable de $\mathscr{T}$ dont on désigne l'aire par $m(\pi(\mathscr{K}))$.

b) Montrer que :

$$\lim_{\delta(\mathscr{K}) \to 0} \frac{a(\mathscr{K})}{m(\pi(\mathscr{K}))} = 1.$$

4.40. – Soit $\mathscr{S}$ une sphère de rayon 1.

a) On considère un « fuseau » de $\mathscr{S}$, i.e. la partie comprise entre deux demi-plans limités par un même diamètre de $\mathscr{S}$; on note $\alpha \in [0, \pi]$ l'angle de ces deux demi-plans. Montrer que le fuseau est quarrable, d'aire 2α.

b) On considère trois points a, b, c de $\mathscr{S}$ tel que $(\overrightarrow{Oa}, \overrightarrow{Oc}, \overrightarrow{Oc})$ soit un système libre et on définit le « triangle sphérique », ensemble $\mathscr{T}$ des points $m \in \mathscr{S}$ tels que la demi-droite Om soit intérieure au trièdre défini par les demi-droites Oa, Ob, Oc.

Désignant par α, β, γ les « angles » de $\mathscr{T}$, i.e. en chaque sommet l'angle des demi-tangentes aux « côtés », montrer que $\mathscr{T}$ est quarrable, d'aire $\alpha + \beta + \gamma - \pi$.

4.41. – Calculer les aires des parties de surface ainsi définies :

– Surface conique de sommet O, de directrice d'équation :

$$(z = p) \wedge (y^2 - 2px = 0)$$

limitée par la directrice et deux génératrices ;

– Partie d'un tore de collier nul engendré par un cercle de rayon a tangent en O à Oz, qui se projette orthogonalement sur xOy en l'intérieur de la cardioïde d'équation $\rho = a(1 + \cos\theta)$;

– Surface engendrée par un cercle tangent en O à Oz, s'appuyant sur la demi-lemniscate

$$(z = 0) \wedge (\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}), \qquad \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right];$$

– Surface engendrée par une arche de cycloïde en tournant autour de sa base ;

– Partie de la surface d'équation $\sqrt{2}(x + y)^3 - 3z = 0$ qui se projette orthogonalement sur xOy en $(x > 0) \wedge (y > 0) \wedge (x + y < 3)$.

– Surface de révolution engendrée par un arc de développante de cercle en tournant autour d'une tangente de rebroussement,

– Surface de révolution engendrée par la rotation autour de Oz de la nappe paramétrée définie par :

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad z = a\cos 2t\,;$$

– Surface de révolution engendrée par la rotation autour de Ox de la boucle de la courbe d'équation :

$$(z = 0) \wedge (z^2 - a(x^2 - y^2) = 0)\,;$$

4.42. – Déterminer, par sa demi-méridienne $\mathscr{C}$ dans le demi-plan $(y = 0) \wedge (x \geqslant 0)$, une surface de révolution $\mathscr{S}$ d'axe Oz telle que, pour tout $(m, m') \in \mathscr{C}^2$ l'aire de la zone engendrée par l'arc mm' soit proportionnelle :

a) Au volume du « solide » limité par $\mathscr{S}$ et les parallèles de m et m' ;

b) à la longueur de la projection du segment $[m, m']$ sur Oz.

5
INTÉGRALE D'UNE FORME DIFFÉRENTIELLE

Ce chapitre **5** *et, en particulier, le sous-chapitre* **5**.6 *consacré à l'analyse vectorielle, traitent essentiellement de l'application des mathématiques à la physiqu. Les programmes de mathématiques des* C.P. *ne prévoient que l'étude des sous-chapitres* **5**.2 *et* **5**.3 *qui n'exige que les connaissances sur les formes différentielles de degré* 1 *déjà acquises aux* III.**8**.1.*1, 10°*, III.**8**.1.*5, 4° et* IV.**4**.3.*1*.

5.1. FORMES DIFFÉRENTIELLES

5.1.*1*. Formes différentielles de degré p

1° ***Rappels.*** – Étant donnés un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$ et un entier $p \geqslant 1$, nous disposons de $\mathscr{A}_p(E)$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes p-linéaires alternées sur E (I.**10**.4); l'étude faite alors, étude à laquelle le lecteur est prié de se reporter, nous a montré que $\mathscr{A}_p(E)$ est de dimension finie. Ainsi, tout comme E, $\mathscr{A}_p(E)$ a une unique structure topologique d'e.v.n., et dans toute la suite du chapitre E et $\mathscr{A}_p(E)$ sont munis de cette topologie.

2° Définition. – **Soient U un ouvert de E et k un entier naturel; on appelle** *forme différentielle de degré p*, **définie sur U, de classe C^k, toute application de classe C^k, de U dans $\mathscr{A}_p(E)$. En abrégé, on parlera de C^k-forme différentielle de degré p définie sur U et on notera $\Omega_p^k(U)$ l'ensemble des telles formes.**

Rappelons que pour $p = 1$, $\mathscr{A}_p(E)$ est le dual de E, que pour $p > n$, $\mathscr{A}_p(E)$ est réduit à zéro; ce dernier cas ne présente donc que peu d'intérêt.

Convention. – *Nous introduisons pour $p = 0$, $\mathscr{A}_0(E) = \mathbb{R}$; ainsi $\Omega_0^k(U)$ est l'ensemble des applications de classe C^k de U dans* $\mathbb{R}$.

Proposition. – **$\Omega_p^k(U)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.**

Il est trivial de vérifier que $\Omega_p^k(U)$ est un sous-espace de $\mathscr{A}_p(E)^U$. □

3° ***Produit extérieur de deux C^k-formes différentielles.*** – Soient α et β deux éléments respectivement de $\Omega_p^k(U)$ et $\Omega_q^k(U)$. D'après I.**10**.4 nous disposons d'une application de $\mathscr{A}_p(E) \times \mathscr{A}_q(E)$ dans $\mathscr{A}_{p+q}(E)$, le produit extérieur d'une forme p-linéaire alternée par une forme q-linéaire alternée, qui est bilinéaire continue donc de classe C^∞ (tous les espaces sont de

dimensions finies). Pour tout $\mathbf{x} \in U$ nous disposons ainsi de l'élément $\alpha(\mathbf{x}) \wedge \beta(\mathbf{x})$ de $\mathscr{A}_{p+q}(E)$, et, par composition, il est évident que $\mathbf{x} \longmapsto \alpha(\mathbf{x}) \wedge \beta(\mathbf{x})$ est une application de classe C^k ; nous pouvons ainsi poser :

DÉFINITION. — **On appelle** *produit extérieur* **des formes α et β, et on note $\alpha \wedge \beta$ la C^k-forme différentielle de degré** $p + q$:

$$\mathbf{x} \longmapsto (\alpha \wedge \beta)(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) \wedge \beta(\mathbf{x})$$

REMARQUE. — En toute rigueur, conformément à I.**10**.4, dans ce qui précède p et q sont au moins égaux à 1. En réalité il est bien évident que la convention faite permet de définir le produit extérieur des formes dans les cas $p = 0$ ou $q = 0$; on remarque d'ailleurs qu'alors l'application utilisée de $\mathscr{A}_0(E) \times \mathscr{A}_q(E)$ dans $\mathscr{A}_q(E)$ est tout simplement la multiplication de l'élément de $\mathscr{A}_q(E)$ par le réel de $\mathscr{A}_0(E)$ si bien que lorsque $f : U \to \mathbb{R}$ est une application de classe C^k on notera $f.\,\beta$ *au lieu de* $f \wedge \beta$ la C^k forme différentielle de degré q, $\mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x})$.

Propriétés. — Utilisant I.**10**.4 le lecteur établira sans difficulté :

- l'*application* $(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha \wedge \beta$ *de* $\Omega_p^k(U) \times \Omega_q^k(U)$ *dans* $\Omega_{p+q}^k(U)$ *est bilinéaire.*
- *Pour tout* (α, β) *de* $\Omega_p^k(U) \times \Omega_q^k(U)$: $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq}\beta \wedge \alpha$.
- *Pour tout* (α, β, γ) *de* $\Omega_p^k(U) \times \Omega_q^k(U) \times \Omega_r^k(U)$:

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

4° ***Décomposition dans une base.*** — Nous éliminons les cas $p = 0$ et $p > n$ (où $\mathscr{A}_p(E)$ est soit $\mathbb{R}$, soit réduit à $\{0\}$) et nous supposons $1 \leqslant p \leqslant n$. Si E est muni d'une base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ nous disposons d'une part de $\mathbf{e}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$, base de E^* duale de $\mathbf{e}$, d'autre part d'une base de $\mathscr{A}_p(E)$ constituée des C_n^p éléments $(d_\varphi)_{\varphi \in \mathscr{P}}$, avec $d_\varphi = e_{\varphi(1)}^* \wedge \cdots \wedge e_{\varphi(p)}^*$, où $\mathscr{P}$ est l'ensemble des applications strictement croissantes de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$.

L'étude des e.v.n. de dimension finie nous apprend que la donnée de $\alpha \in \Omega_p^k(U)$ équivaut alors à la donnée de C_n^p applications, $(\alpha_\varphi)_{\varphi \in \mathscr{P}}$, de U dans $\mathbb{R}$, de classe C^k, vérifiant :

$$\forall \mathbf{x} \in U \qquad \alpha(\mathbf{x}) = \sum_{\varphi \in \mathscr{P}} \alpha_\varphi(\mathbf{x}) e_{\varphi(1)}^* \wedge \cdots \wedge e_{\varphi(p)}^* \qquad (1)$$

Remarquons alors que pour tout φ nous disposons de l'application de E dans $\mathscr{A}_p(E)$, $\mathbf{x} \longmapsto e_{\varphi(1)}^* \wedge \cdots \wedge e_{\varphi(p)}^*$, qui en tant qu'application constante est de classe C^∞ donc de classe C^k pour tout k. Si, par abus de langage, nous notons cette application $e_{\varphi(1)}^* \wedge \cdots \wedge e_{\varphi(p)}^*$ et si nous en prenons la restriction à U (ceci quel que soit l'ouvert U), nous pouvons considérer $e_{\varphi(1)}^* \wedge \cdots \wedge e_{\varphi(p)}^*$ comme un élément de $\Omega_p^k(U)$, et (1) peut alors s'écrire :

$$\alpha = \sum_{\varphi \in \mathscr{P}} \alpha_\varphi e_{\varphi(1)}^* \wedge \cdots \wedge e_{\varphi(p)}^*$$

décomposition de α comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{R}^U$ des éléments $(e_{\varphi(1)}^* \wedge \cdots \wedge e_{\varphi(p)}^*)_{\varphi \in \mathscr{P}}$ de $\Omega_p^k(U)$

REMARQUE. — En termes algébriques nous venons d'exprimer que $\Omega_p^k(U)$ est un module sur l'anneau $\mathbb{R}^U$, admettant pour base la famille $(e^*_{\varphi(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\varphi(p)})_{\varphi \in \mathscr{P}}$.

EXEMPLES. — *a*) Prenons $\mathbb{R}^3$ et les notations classiques x, y, z.
Une forme différentielle de degré un s'écrit :

$$\alpha = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z$$

Une forme différentielle de degré deux s'écrit :

$$\alpha = f\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + g\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + h\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

(le lecteur notera que l'on utilise $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$ au lieu de $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$ et que l'on ordonne la base par $(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$).
Une forme différentielle de degré 3 s'écrit :

$$\alpha = f\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

où f (resp. g, resp. h) sont des applications de classe C^k de U dans $\mathbb{R}$.
b) Sur $\mathbb{R}^n$, une forme différentielle de degré n s'écrit :

$$\alpha = f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$$

avec $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^k.

Sous la forme décomposée $\alpha = \sum_{\varphi \in \mathscr{P}} \alpha_\varphi\, d_\varphi$, les opérations d'addition et de produit par un réel dans $\Omega_p^k(U)$ sont évidentes. Il en est de même du produit $f\alpha$, pour $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^k, qui s'écrit $f\alpha = \sum_{\varphi \in \mathscr{P}} (f\alpha_\varphi)\, d_\varphi$. En ce qui concerne le produit extérieur $\alpha \wedge \beta$, si l'élément α de $\Omega_p^k(U)$ est décomposé, si l'élément β de $\Omega_q^k(U)$ est décomposé (pour $1 \leqslant p \leqslant n$ et $1 \leqslant q \leqslant n$), la bilinéarité nous conduit au produit extérieur :

$$e^*_{\varphi(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\varphi(p)} \wedge e^*_{\psi(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\psi(q)}$$

où φ (resp. ψ) est une application strictement croissante de $\mathbb{N}_p$ (resp. $\mathbb{N}_q$) dans $\mathbb{N}_n$.

Cet élément de $\mathscr{A}_{p+q}(E)$ est nul dès que les $p + q$ entiers de $\mathbb{N}_n$, $\varphi(1), \ldots, \varphi(p), \psi(1), \ldots, \psi(q)$ ne sont pas tous distincts. Dans le cas contraire, une permutation σ les ramène à un ordre strictement croissant et, les notant alors $\sigma(1) < \cdots < \sigma(p + q)$, on a :

$$e^*_{\varphi(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\varphi(p)} \wedge e^*_{\psi(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\psi(q)} = \varepsilon_\sigma e^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(p+q)}$$

et $e^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(p+q)}$ est un élément de la base canonique de $\mathscr{A}_{p+q}(E)$. On obtient ainsi facilement la décomposition de $\alpha \wedge \beta$.

EXEMPLES. — *a*) Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et f (resp. g) une application de classe C^{k+1} de U dans $\mathbb{R}$. On dispose déjà des deux C^k-formes différentielles de degré un :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}g = \frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial g}{\partial z}\mathrm{d}z$$

On a la C^k-forme différentielle de degré deux :

$$df \wedge dg = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial z}\right)dz \wedge dx + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}\right)dx \wedge dy$$

b) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et f, g, h trois applications de classe C^{k+1} de U dans $\mathbb{R}$. On a la C^k-forme différentielle de degré 3 :

$$df \wedge dg \wedge dh = \frac{D(f, g, h)}{D(x, y, z)} dx \wedge dy \wedge dz$$

5° ***La différentielle extérieure.*** — U étant un ouvert de E nous utilisons l'ensemble des C^k-formes différentielles sur U constitué par la réunion des espaces $\Omega_p^k(U)$ lorsque p décrit $\mathbb{N}$.

Théorème et définition. — **Étant donnés un ouvert U de E et un entier $k \geqslant 1$, il existe une unique application** d **de l'ensemble des C^k-formes différentielles sur U dans l'ensemble des C^{k-1}-formes différentielles sur U vérifiant les conditions suivantes :**

i) la restriction de d **à $\Omega_p^k(U)$ est une application linéaire de $\Omega_p^k(U)$ dans $\Omega_{p+1}^{k-1}(U)$;**

ii) pour $\alpha \in \Omega_p^k(U)$ et $\beta \in \Omega_q^k(U)$:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta\,;$$

iii) si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^k ($f \in \Omega_0^k(U)$), df est la différentielle de f;

iv) si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^{k+1}($f \in \Omega_0^{k+1}(U)$), $d(df) = 0$.

Cette application d **est appelée** *différentiation extérieure.*

Unicité. — Soit d une application satisfaisant aux hypothèses; $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ étant une base de E, d'après 4° nous disposons de la décomposition :

$$\alpha = \sum_{\varphi \in \mathcal{P}} \alpha_\varphi e^*_{\varphi(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\varphi(p)}$$

$\alpha_\varphi : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^k, et d'après iii), $d\alpha_\varphi$ est la différentielle de α_φ. L'utilisation de i) et ii) entraîne :

$$d\alpha = \sum_{\varphi \in \mathcal{P}} d(\alpha_\varphi e^*_{\varphi(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\varphi(p)})$$

avec:

$$d(\alpha_\varphi e^*_{\varphi(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\varphi(p)}) = d\alpha_\varphi \wedge e^*_{\varphi(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\varphi(p)} + \alpha_\varphi d(e^*_{\varphi(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\varphi(p)})$$

(ici nous utilisons le fait que $e^*_{\varphi(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\varphi(p)}$ est considéré comme élément de $\Omega_p^k(U)$). Or pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, e_i^* est l'élément de $\Omega_1^k(U)$, $\mathbf{x} \longmapsto e_i^*$ qui est la différentielle de l'application de U dans $\mathbb{R}$; $\mathbf{x} \longmapsto x_i$ (application i-ème

composante); cette dernière application, qui est de classe C^∞, est en particulier de classe C^{k+1} et d'après iv) $\mathrm{d}(e_i^*) = 0$. Par récurrence on déduit :

$$\mathrm{d}(e^*_{\varphi(1)} \wedge \cdots . e^*_{\varphi(p)}) = 0$$

et donc nécessairement :

$$\mathrm{d}\alpha = \sum_{\varphi \in \mathscr{P}} \mathrm{d}\alpha_\varphi \wedge e^*_{\varphi(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\varphi(p)} \qquad (1)$$

□

Existence. — E étant toujours muni de la base $\mathbf{e}$; nous définissons d par la formule (1); nous constatons déjà que si $\alpha \in \Omega_p^k(U)$, $\mathrm{d}\alpha \in \Omega_{p+1}^{k-1}(U)$.

i) et ii) se vérifient facilement et le calcul est laissé au lecteur.

iii) résulte de la définition de $\mathrm{d}\alpha$.

Quant à iv), comme f est de classe C^{k+1} avec $k + 1 \geqslant 2$, elle résulte de l'égalité :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{(théorème de Schwarz).}$$

Ainsi (1) définit bien une application de l'ensemble des C^k-formes différentielles sur U dans l'ensemble des C^{k-1}-formes différentielles sur U vérifiant i), ii), iii) et iv). Notons que l'unicité assure le caractère intrinsèque de d bien que sa construction ait été effectuée grâce à un choix de base de E. □

REMARQUES. — *a*) En toute rigueur (1) ne définit d que pour $1 \leqslant p \leqslant n$, conformément aux décompositions du 4°. En réalité pour $p = 0$, *la définition de* d est assurée par iii); pour $p > n$, $\Omega_p^k(U) = \{0\}$ et donc la restriction de d à $\Omega_p^k(U)$ est nulle.

b) Le lecteur pourra vérifier que l'on peut obtenir d par le procédé intrinsèque suivant : pour $\alpha \in \Omega_p^k(U)$, α en tant qu'application de U dans $\mathscr{A}_p(E)$ est différentiable (car $k \geqslant 1$), et notant ici sa différentielle α', on dispose de $\alpha' : U \to \mathscr{L}(E, \mathscr{A}_p(E))$.

Pour tout $\mathbf{x} \in U$, pour tout $(\mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_p)$ de E^{p+1} on pose :

$$\mathrm{d}\alpha(\mathbf{x}).(\mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (\alpha'(\mathbf{x}).\mathbf{y}_i).(\mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{y}_{i+1}, \ldots, \mathbf{y}_p)$$

Ce procédé conduit malheureusement à des calculs compliqués pour vérifier i), ii), iii) et iv).

Les propriétés essentielles de l'application d sont contenues dans la définition même de d. Notons en outre une relation importante, conséquence de ii) :

$$\forall f \in \Omega_0^k(U) \qquad \forall \alpha \in \Omega_p^k(U) \qquad \mathrm{d}(f\alpha) = \mathrm{d}f \wedge \alpha + f.\mathrm{d}\alpha$$

En pratique, pour $\alpha \in \Omega_p^k(U)$, le calcul de $\mathrm{d}\alpha$ se conduit grâce à la décomposition de α, en utilisant la formule (1) et évidemment chaque élément de $\Omega_{p+1}^{k-1}(U)$, $\mathrm{d}\alpha_\varphi \wedge e^*_{\varphi(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\varphi(p)}$ est alors à réexprimer dans la base de $\Omega_{p+1}^{k-1}(U)$.

EXEMPLES. — *a*) Dans $\mathbb{R}^2$, avec les notations classiques, si $\alpha = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ est un élément de $\Omega_1^k(U)$, P et Q étant deux applications de classe C^k de U dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\mathrm{d}\alpha = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \wedge \mathrm{d}y$$

et donc :

$$d\alpha = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

b) Dans $\mathbb{R}^3$, si $\alpha = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ est un élément de $\Omega_1^k(U)$, P, Q et R étant trois applications de classe C^k de U dans $\mathbb{R}$, alors :

$$d\alpha = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

— Si $\alpha = f\,dy \wedge dz + g\,dz \wedge dx + h\,dx \wedge dy$ appartient à $\Omega_2^k(U)$ alors :

$$d\alpha = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

5.1.2. Image réciproque d'une forme différentielle par une application

1° Théorème et définition. — **Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, U un ouvert de E, V un ouvert de F, $\varphi : U \to V$ une application [1] de classe C^{k+1} et α un élément de $\Omega_p^k(V)$. Pour tout $\mathbf{x} \in U$ on note $\varphi^*(\alpha)(\mathbf{x})$ l'application de E^p dans $\mathbb{R}$ définie par :**

$$(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p) \longmapsto \alpha[\varphi(\mathbf{x})].(d\varphi(\mathbf{x}).\mathbf{x}_1, \ldots, d\varphi(\mathbf{x}).\mathbf{x}_p);$$

cette application est une forme p-linéaire alternée.

L'application $\varphi^*(\alpha) : \mathbf{x} \longmapsto \varphi^*(\alpha)(\mathbf{x})$ est un élément de $\Omega_p^k(U)$ qui est appelé *image réciproque de la forme différentielle α par l'application φ.*

— Notons d'abord que, pour $\mathbf{x} \in U$ donné, l'application

$$(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p) \longmapsto (d\varphi(\mathbf{x}).\mathbf{x}_1, \ldots, d\varphi(\mathbf{x}).\mathbf{x}_p)$$

de E^p dans F^p est linéaire. Il en résulte par composition, que l'application $\varphi^*(\alpha)(\mathbf{x})$ est p-linéaire ; elle est manifestement alternée. D'où $\varphi^*(\alpha)(\mathbf{x}) \in \mathscr{A}_p(E)$.

— Ceci acquis, il résulte trivialement des hypothèses sur φ et α que l'application $\varphi^*(\alpha) : U \to \mathscr{A}_p(E)$ est de classe C^k. □

Remarques. — *a*) Si $f : V \to \mathbb{R}$ est un élément de $\Omega_0^k(V)$, alors $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$.

b) Si $\alpha : V \to F^*$ est un élément de $\Omega_1^k(V)$, alors :

$$\forall \mathbf{x} \in E \qquad \varphi^*(\alpha)(\mathbf{x}) = \alpha[\varphi(\mathbf{x})] \circ d\varphi(\mathbf{x}).$$

c) Pour $\alpha \in \Omega_p^k(V)$ et $\varphi : U \to V$ de classe $C^{k'}$, $k' \geqslant 1$, on peut utiliser cette définition ; alors $\varphi^*(\alpha) \in \Omega_p^{k''}(U)$, où $k'' = \min(k, k' - 1)$.

---

(1) En fait φ est une application de U dans F, à image dans V.

2° ***Propriétés.*** — Les notations de 1° étant conservées, on établit sans difficulté les propriétés suivantes :

a) $\alpha \longmapsto \varphi^*(\alpha)$ *est une application linéaire de* $\Omega_p^k(V)$ *dans* $\Omega_p^k(U)$;

b) *Pour tout* $(\alpha, \beta) \in \Omega_p^k(V) \times \Omega_q^k(V)$, $\quad \varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(\beta)$;

c) *Si* $f : V \to \mathbb{R}$ *est de classe* C^k, *pour* $\alpha \in \Omega_p^k(U)$:

$$\varphi^*(f\alpha) = (f \circ \varphi)\varphi^*(\alpha);$$

d) *Si E, F, G sont trois espaces de dimensions finies, U, V, W des ouverts de E, F, G et* $\varphi : U \to V$, $\psi : V \to W$ *des applications de classe* C^{k+1} *alors pour tout* α *de* $\Omega_p^k(W)$:
$$(\psi \circ \varphi)^*(\alpha) = \varphi^*[\psi^*(\alpha)].$$

3° ***Calculs pratiques.*** — En pratique E et F sont munis de bases respectives $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$; φ, application de classe C^{k+1} de U dans V, est donnée par ses m applications composantes :

$$\mathbf{x} \longmapsto \varphi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(\mathbf{x})f_j,$$

où les φ_j sont des applications de U dans $\mathbb{R}$ de classe C^{k+1}. Pour $j \in \mathbb{N}_m$ fixé, nous pouvons déjà considérer le cas où α est $f_j^* \in \Omega_1^k(V)$. Par définition :

$$\forall(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times E \qquad \varphi^*(f_j^*)(\mathbf{x}).\mathbf{y} = \langle f_j^*, \mathrm{d}\varphi(\mathbf{x}).\mathbf{y}\rangle = \mathrm{d}\varphi_j(\mathbf{x}).\mathbf{y}$$

Ainsi : $\varphi^*(f_j^*) = \mathrm{d}\varphi_j$. En utilisant *b)* et une récurrence on déduit :

$$\varphi^*(f_{\psi(1)}^* \wedge \cdots \wedge f_{\psi(p)}^*) = \mathrm{d}\varphi_{\psi(1)} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\varphi_{\psi(p)}$$

et donc, si Q désigne l'ensemble des applications strictement croissantes de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_m$, pour $\alpha = \sum_{\psi \in Q} \alpha_\psi f_{\psi(1)}^* \wedge \ldots \wedge f_{\psi(p)}^*$ par utilisation de *c)* :

$$\varphi^*(\alpha) = \sum_{\psi \in Q} (\alpha_\psi \circ \varphi)\, \mathrm{d}\varphi_{\psi(1)} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\varphi_{\psi(p)}$$

ce qui ramène le calcul de $\varphi^*(\alpha)$ à des calculs de différentielles et à des produits extérieurs.

EXEMPLES. — Sur chaque ligne est donnée la forme α et son image réciproque $\varphi^*(\alpha)$.

a) Par utilisation de $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \longmapsto (x, y)$ *avec* $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$:

$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \ldots (\cos\theta.(P \circ \varphi) + \sin\theta.(Q \circ \varphi))\,\mathrm{d}r + (-r\sin\theta.(P \circ \varphi) + r\cos\theta.(Q \circ \varphi))\,\mathrm{d}\theta$

$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y \ldots r\,\mathrm{d}r$

$x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x \ldots r^2\,\mathrm{d}\theta$

$P\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \ldots (P \circ \varphi).r\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$

b) Par utilisation de $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(r, \theta, z) \longmapsto (x, y, z)$ *avec* $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$:

$P\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \ldots (P \circ \varphi)r\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}z$

c) Par utilisation de $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(r, \theta, \varphi) \longmapsto (x, y, z)$
avec $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$ *et* $z = r\cos\theta$:

$P\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \ldots (P \circ \varphi)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi$

4° THÉORÈME. — **Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies, U un ouvert de E, V un ouvert de F, $\varphi : U \to V$ une application de classe C^{k+1} $(k \geqslant 1)$, alors pour tout $\alpha \in \Omega_p^k(V)$ on a :**

$$d(\varphi^*(\alpha)) = \varphi^*(d\alpha).$$

On choisit une base $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$, et avec les notations de 3° on a :

$$\alpha = \sum_{\psi \in Q} \alpha_\psi f^*_{\psi(1)} \wedge \cdots \wedge f^*_{\psi(p)}$$

et donc :

$$d\alpha = \sum_{\psi \in Q} d\alpha_\psi \wedge f^*_{\psi(1)} \wedge \cdots \wedge f^*_{\psi(p)}.$$

Alors :

$$\varphi^*(d\alpha) = \sum_{\psi \in Q} \varphi^*(d\alpha_\psi) \wedge d\varphi_{\psi(1)} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{\psi(p)}.$$

Or pour $f : V \to \mathbb{R}$ de classe C^k, $\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi) = d(\varphi^*(f))$. En outre pour tout $\psi \in Q$:

$$\varphi^*(df) \wedge d\varphi_{\psi(1)} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{\psi(p)} = d(\varphi^*(f) \wedge d\varphi_{\psi(1)} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{\psi(p)})$$

puisque $d(d\varphi_{\psi(i)}) = 0$.

Il en résulte : $$\varphi^*(d\alpha) = d[\varphi^*(\alpha)]$$ □

5.1.3. Formes fermées, formes exactes

1° DÉFINITION I. — **La forme différentielle $\alpha \in \Omega_p^k(U)$ avec $k \geqslant 1$ est dite** *fermée* **si, et seulement si $d\alpha = 0$.**

DÉFINITION II. — **La forme différentielle $\alpha \in \Omega_p^k(U)$ avec $p \geqslant 1$ est dite** *exacte* **si, et seulement s'il existe $A \in \Omega_{p-1}^{k+1}(U)$ telle que $dA = \alpha$.**

EXEMPLES. — *a*) Prenons un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et α une C^k-forme différentielle de degré 1 ; α s'écrit : $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, dx_i$ où $\alpha_i : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^k.

$$d\alpha = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}\right) dx_i \wedge dx_j$$

et α est fermée si, et seulement si, pour tout $i \neq j$, $\dfrac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}$.

b) Le lecteur se reportera à IV.4.3.*1*.

2° THÉORÈME I. — **Pour que $\alpha \in \Omega_p^k(U)$ avec $p \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$ soit exacte, il faut que α soit fermée.**

Résulte du fait que $d(dA) = 0$. □

THÉORÈME II (POINCARÉ). — **Si α est une C^k-forme différentielle de degré p définie sur l'ouvert U de E, avec $p \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$ et si U est étoilé par rapport à l'un de ses points, une condition nécessaire et suffisante pour que α soit exacte est que α soit fermée.**

Ce théorème, qui est admis dans le cas général, a été établi pour $p = 1$ en IV.**4**.3.*1*, auquel le lecteur est prié de se référer.

L'exercice **5**.13 établit le théorème pour p quelconque. □

5.1.*4*. Généralisations

1° Dans la théorie qui précède, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $\mathscr{A}_p(E)$ est l'espace des formes p-linéaires alternées sur E. Le lecteur vérifiera que l'on peut remplacer $\mathscr{A}_p(E)$ par l'espace des applications p-linéaires alternées sur E, à valeurs complexes. En fait, en pratique, si $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, (qui est toujours **un $\mathbb{R}$-espace vectoriel**), celà revient à considérer des éléments de $\Omega_p^k(U)$ de la forme :

$$\alpha = \sum_{\varphi \in \mathscr{P}} \alpha_\varphi e^*_{\varphi(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\varphi(p)}$$

où α_φ est une application de classe C^k de U dans $\mathbb{C}$.

2° $\mathscr{E}$ étant un espace affine de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, il est bien évident que l'on peut étendre la théorie au cas des applications de classe C^k d'un ouvert U de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{A}_p(E)$. Ce cas se ramène immédiatement au cas traité ici en utilisant un vectorialisé $\mathscr{E}_O$ de $\mathscr{E}$.

5.2. INTÉGRALES CURVILIGNES

($\mathscr{E}$, E) est un espace affine de dimension finie $n \geqslant 1$, k est un élément de $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

5.2.*1*. Intégrale curviligne le long d'un arc paramétré

1° DÉFINITION. — **Soient $\gamma = (I, f)$ avec $I = [a, b]$, $a < b$, un C^k-arc paramétré compact de $\mathscr{E}$, et α une forme différentielle de degré un continue sur un ouvert U de $\mathscr{E}$ contenant** $\operatorname{supp}\gamma$. **Par définition, l'intégrale de Riemann :**

$$\int_a^b \alpha(f(t)).f'(t)\,\mathrm{d}t$$

est appelée intégrale curviligne de α le long de γ, et noté $\int_\gamma \alpha$.

Justification. – L'application $(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) \longmapsto \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle$ de $E^* \times E$ dans $\mathbb{R}$ est bilinéaire, et donc ici de classe C^∞. Par composition, $t \longmapsto \alpha(f(t)).f'(t)$ est continue, et donc intégrable.

2° ***Propriétés.*** – *a)* $\gamma = (I, f)$, *avec* $I = [a, b]$ *et* $a < b$, *étant un* C^k*-arc paramétré,* U *étant un ouvert de* $\mathscr{E}$ *contenant* supp γ, *l'application* $\alpha \longmapsto \int_\gamma \alpha$ *est une forme linéaire sur* $\Omega_1^0(U)$.

Vérification immédiate. □

b) Aux hypothèses de la définition précédente on adjoint : $c \in]a, b[$. *Alors :*

$$\int_\gamma \alpha = \int_{\gamma_{a,c}} \alpha + \int_{\gamma_{c,b}} \alpha$$

Vérification immédiate. □

c) Aux hypothèses de la définition précédente on adjoint : E *est normé et* $\|\cdot\|_{E^*}$ *désigne la norme induite sur* E^* *par la norme de* E (**III.3.1.2**). *Alors :*

$$\left| \int_\gamma \alpha \right| \leqslant \sup_{t \in [a,b]} \|\alpha(f(t))\|_{E^*} \cdot \int_a^b \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t$$

Par définition de $\|\cdot\|_{E^*}$, on a en effet :

$$\forall (\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) \in E^* \times E \qquad |\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle| \leqslant \|\mathbf{x}^*\|_{E^*} \|\mathbf{x}\|_E. \qquad □$$

d) Soient $\mathscr{E}$ *et* $\mathscr{F}$ *deux espaces affines,* φ *une application de classe* C^1 *d'un ouvert* U *de* $\mathscr{E}$ *dans un ouvert* V *de* $\mathscr{F}$, α *une forme différentielle de degré un, continue sur* V, *et* $\gamma = (I, f)$ *un* C^k*-arc de* $\mathscr{E}$ *tel que* supp $\gamma \subset U$. Si le C^1*-arc* $(I, \varphi \circ f)$ *de* $\mathscr{F}$ *est noté* $\varphi(\gamma)$, *alors :*

$$\int_{\varphi(\gamma)} \alpha = \int_\gamma \varphi^*(\alpha).$$

En effet si $I = [a, b]$ on a :

$$\int_{\varphi(\gamma)} \alpha = \int_a^b \alpha[(\varphi \circ f)(t)].(\varphi \circ f)'(t) \, \mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \alpha[\varphi(f(t))] \cdot (\mathrm{d}\varphi(f(t)).f'(t)) \, \mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \varphi^*(\alpha)(f(t)).f'(t) \, \mathrm{d}t = \int_\gamma \varphi^*(\alpha) \qquad □$$

3° ***Calculs pratiques.*** – On suppose $\mathscr{E}$ muni d'un repère $(O; e_1, \ldots, e_n)$; l'arc γ est alors donné par :

$$t \longmapsto f(t) = O + \sum_{i=1}^n x_i(t) e_i$$

avec $x_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^k.

On sait :

$$\forall t \in [a, b] \quad f'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) e_i$$

$\mathscr{A}_1(E)$, qui est E^*, est alors muni de la base duale et α est supposée décomposée dans cette base sous la forme :

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mathrm{d}x_i$$

avec $\alpha_i : U \to \mathbb{R}$ continue.

Par définition $\mathrm{d}x_i$ est la forme linéaire sur U, i-ième composante et il en résulte :

$$\forall t \in [a, b] \qquad \alpha(f(t)).f'(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(f(t)) x_i'(t)$$

Ainsi :
$$\int_\gamma \alpha = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \alpha_i(f(t)) x_i'(t) \, \mathrm{d}t.$$

Exemple. — On prend $\mathscr{E} = \mathbb{R}^2$, γ l'arc $t \longmapsto (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (son support est le cercle de centre O de rayon 1), α la forme différentielle de degré un :

$$\alpha = \frac{x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x}{x^2 + y^2}.$$

On constate tout d'abord que γ est un arc de classe C^∞ dont le support est contenu dans l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; α est une forme différentielle de classe C^∞ sur U ce qui assure l'existence de $\int_\gamma \alpha$.

1er *procédé*. — On utilise la paramétrisation de γ. Il vient :

$$\int_\gamma \alpha = \int_0^{2\pi} \frac{(\cos t)(\cos t) - (\sin t)(-\sin t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} \, \mathrm{d}t = 2\pi$$

2e *procédé*. — On envisage l'application φ de $U_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, dans U, $(r, \theta) \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$; elle est de classe C^∞. Si l'on prend l'arc paramétré γ_1, $\theta \longmapsto (1, \theta)$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$, son image est contenue dans U_1 (il s'agit d'un segment) et γ est l'arc $\varphi(\gamma_1)$.

Ainsi :

$$\int_\gamma \alpha = \int_{\varphi(\gamma_1)} \alpha = \int_{\gamma_1} \varphi^*(\alpha)$$

Le calcul conduit à :

$$\varphi^*(\alpha) = \mathrm{d}\theta,$$

et donc à :
$$\int_\gamma \alpha = 2\pi.$$

Bien qu'il soit ici de peu d'intérêt, ce second procédé conduit parfois à des calculs très simples, à condition de choisir judicieusement φ.

4° *Arcs C^1 par morceaux.* — DÉFINITION. — **Un arc paramétré compact $\gamma = (I, f)$ avec $I = [a, b]$, $a < b$, est dit C^1 *par morceaux* (resp. C^1 *par morceaux et régulier*) si, et seulement s'il existe une subdivision $\sigma = (t_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$ de $[a, b]$ telle que chacun des sous-arcs $\gamma_{t_{i-1}t_i}$, $i \in \mathbb{N}_m$, soit de classe C^1 (resp. de classe C^1 et régulier) ; une telle subdivision est dite *adaptée à l'arc*.**

REMARQUES. — *a*) La restriction de f à chaque $[t_{i-1}, t_i]$, $i \in \mathbb{N}_m$, étant continue, f est elle-même continue, et γ est bien un arc paramétré au sens de **1**.2.*1*, 1°.

b) Toute subdivision plus fine qu'une subdivision adaptée est elle-même adaptée.

c) Pour un arc paramétré C^1 par morceaux et régulier, les points de paramètres distincts des t_i sont réguliers ; les autres peuvent être réguliers ou « anguleux ».

• THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soient $\gamma = (I, f)$ un arc paramétré de classe C^1 par morceaux avec $I = [a, b]$, $a < b$, $\sigma = (t_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$ une subdivision adaptée à γ et α une forme différentielle de degré un continue sur un ouvert U contenant le support de γ ; alors la somme $\sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} \alpha$ est indépendante de la subdivision adaptée choisie ; on l'appelle l'*intégrale curviligne de α le long de γ* et elle est notée $\int_\gamma \alpha$.**

Comme γ_i est de classe C^1 l'existence de $\int_{\gamma_i} \alpha$ est assurée par 1°.

La vérification de la propriété est triviale : comme en III.**6**.1.*3*, 1° on constate que si c est un réel de $[a, b]$, la valeur de cette somme est la même pour σ et pour la subdivision dont l'image est obtenue en adjoignant à l'image de σ, le point c.

Ceci permet de se ramener, pour deux subdivisions quelconques σ *et* σ', à $\sigma \vee \sigma'$. □

Le lecteur étendra sans difficulté les propriétés de l'intégrale curviligne vues en 2° au cas des intégrales curvilignes le long d'un arc C^1 par morceaux ; en ce qui concerne le calcul pratique d'une telle intégrale, par le choix d'une subdivision adaptée il se ramènera à des calculs d'intégrales curvilignes le long d'arcs de classe C^1

5° *Cas des formes exactes.* — THÉORÈME. — **Soit $\gamma = (I, f)$ un arc paramétré C^1 par morceaux avec $I = [a, b]$, $a < b$, et α une forme différentielle de degré un continue sur un ouvert U de $\mathscr{E}$ contenant le support de γ ; si α est exacte et si l'on désigne par $A : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que $\mathrm{d}A = \alpha$ alors :**

$$\int_\gamma \alpha = A[f(b)] - A[f(a)].$$

En effet si $\sigma = (t_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$ est une subdivision adaptée à γ, par définition :

$$\int_\gamma \alpha = \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} \alpha \quad \text{(notations de 4°)}.$$

Or le sous-arc γ_i est de classe C^1 et pour tout t de $[t_{i-1}, t_i]$ l'on a (en notant encore f la restriction de f) :

$$\alpha(f(t)).f'(t) = \mathrm{d}A(f(t)).f'(t) = (A(f(t)))'$$

Il en résulte :

$$\int_{\gamma_i} \alpha = A[f(t_i)] - A[f(t_{i-1})]$$

d'où :
$$\int_{\gamma} \alpha = A[f(b)] - A[f(a)].$$ □

Ainsi, pour une forme exacte l'intégrale curviligne le long d'un arc ne dépend que des extrémités de l'arc.

COROLLAIRE. — **Si α est exacte sur U alors $\int_\gamma \alpha = 0$ pour tout arc fermé de classe C^1 par morceaux dont le support est contenu dans U.**

REMARQUE. — En IV.**4.3**.*1*, 3° exemples, nous avons constaté que la forme $\dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$ est fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mais qu'elle n'est pas exacte. Ce résultat est retrouvé ici par le fait que $\int_\gamma \alpha = 2\pi$, où γ est l'arc fermé $t \longmapsto (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

• Nous allons maintenant, grâce aux intégrales curvilignes, compléter l'étude faite en IV.**4.3**.*1*, 3° et reprise en **5.1**.*3*, 2°.

PROPOSITION. — **Soit U un ouvert connexe de $\mathscr{E}$, α une forme différentielle de degré un continue sur U, les assertions suivantes sont équivalentes :**

i) α est exacte;

ii) pour tout arc fermé γ, C^1 par morceaux dont le support est contenu dans U, $\int_\gamma \alpha = 0$.

Preuve de i) ⇒ ii). — Il s'agit du corollaire précédent. □

Preuve de ii) ⇒ i). — U est un ouvert connexe de $\mathscr{E}$ et, d'après III **3.1**.*2*, 6°, est donc connexe par arcs; dans cette démonstration on peut même se limiter soit aux arcs C^1 par morceaux dont le support est contenu dans U, et même (et c'est ce qui a été fait) à des lignes polygonales (qui sont des supports d'arcs C^1 par morceaux). On suppose que l'assertion ii) est vraie.

— Considérons alors deux points x_1 et x_2 quelconques de U, et soient $\gamma_1 = ([a_1, b_1], f_1)$ et $\gamma_2 = ([a_2, b_2], f_2)$ deux arcs C^1 par morceaux, dont les supports sont contenus dans U et qui ont chacun pour origine (resp. pour extrémité) x_1 (resp. x_2).

Introduisons le segment $[a_1, b_3]$ avec $b_3 = b_1 + (b_2 - a_2)$ et $f : [a_1, b_3] \to \mathscr{E}$ définie par :

$$\begin{cases} \forall t \in [a_1, b_1] & f(t) = f_1(t) \\ \forall t \in]b_1, b_3] & f(t) = f_2(b_1 + b_2 - t). \end{cases}$$

On constate facilement, en utilisant $f_1(b_1) = f_2(b_2)$, que $\gamma = ([a_1, b_3], f)$ est un arc C^1 par morceaux, dont le support est inclus dans U, qui est fermé car $f_1(a_1) = f_2(a_2)$.

D'après ii), on a donc :

$$\int_\gamma \alpha = 0.$$

Or on a :
$$\int_\gamma \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha - \int_{\gamma_2} \alpha,$$

d'après :

$$\int_{b_1}^{b_3} \alpha[f(t)].f'(t)\,\mathrm{d}t \quad = - \int_{b_1}^{b_1 + b_2 - a_2} \alpha[f_2(b_1 + b_2 - t)].f_2'(b_1 + b_2 - t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi :

$$\int_{\gamma_1} \alpha = \int_{\gamma_2} \alpha.$$

– Le point $x_0 \in U$ ayant été arbitrairement choisi, soit $x \in U$; l'intégrale $\int_\gamma \alpha$, où γ est un arc C^1 par morceaux à support inclus dans U, d'origine x_0 et d'extrémité x, est donc indépendant du choix de γ, ce qui permet de la noter $A(x)$. On dispose ainsi de $A : U \to \mathbb{R}$. On va montrer que A est de classe C^1 et que $\mathrm{d}A = \alpha$, ce qui prouvera que i) est vraie.

Puisque $\alpha : U \to E^*$ est continue par hypothèse, il suffit de prouver qu'en tout $x \in U$, A admet la différentielle $\mathrm{d}A(x) = \alpha(x)$.

– Fixons donc $x \in U$. Une norme étant choisie sur E, il existe une boule ouverte $B_0(x, r)$, $r > 0$, incluse dans U. Soit γ un arc C^1 par morceaux d'origine x_0 et d'extrémité x, à support inclus dans U ; en lui « adjoignant » le segment de droite $[x, x + \mathbf{h}]$, où $\mathbf{h} \in E$ vérifie $\|\mathbf{h}\| < r$, on obtient un arc γ', C^1 par morceaux, d'origine x_0 et d'extrémité $x + \mathbf{h}$, et on constate que :

$$A(x + \mathbf{h}) = A(x) + \int_0^1 \alpha(x + t\mathbf{h}).\mathbf{h}\,\mathrm{d}t$$

D'où :

$$A(x + \mathbf{h}) - A(x) - \alpha(x).\mathbf{h} = \int_0^1 [(\alpha(x + t\mathbf{h}) - \alpha(x)).\mathbf{h}]\,\mathrm{d}t$$

La continuité de α au point x associe à tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ un $\eta \in]0, r[$ tel que :

$$\forall y \in \mathscr{E} \qquad \|y - x\| \leqslant \eta \Rightarrow \|\alpha(y) - \alpha(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

Pour tout $\mathbf{h} \in E$ tel que $\|\mathbf{h}\| \leqslant \eta$, on a :

$$\forall t \in [0, 1] \qquad \|(\alpha(x + t\mathbf{h}) - \alpha(x)).\mathbf{h}\| \leqslant \varepsilon\,\|\mathbf{h}\|$$

et donc :

$$\|A(x + \mathbf{h}) - A(x) - \alpha(x).\mathbf{h}\| \leqslant \varepsilon\|\mathbf{h}\|. \qquad \square$$

REMARQUE. — Si, dans le contexte des arcs paramétrés, on appelle segment tout arc $t \longmapsto a + t(b - a)$, $t \in [0, 1]$ (pour $(a, b) \in \mathscr{E}^2$) et ligne polygonale tout arc paramétré qui est une « réunion » finie de segments au sens de III 3.1.*1*, 6° (en d'autres termes pour un segment ou une ligne polygonale qui sont en réalité des supports on n'envisage *que* leurs paramétrisations qui sont affines), le lecteur vérifiera sans peine que l'on peut remplacer ii) par :

ii') Pour toute ligne polygonale fermée γ, incluse dans U, $\int_\gamma \alpha = 0$. Si en outre U est étoilé par rapport à x_0, il vérifiera que l'on peut même remplacer ii) par :

ii'') Pour tout contour γ d'un triangle de sommet x_0, $\gamma \subset U$, $\int_\gamma \alpha = 0$.

5.2.*2*. Intégrale curviligne le long d'un arc géométrique orienté

1° LEMME. — **Soient $\gamma = (I, f)$ avec $I = [a, b]$, $a < b$, $\gamma' = (J, g)$ avec $J = [c, d]$, $c < d$, deux arcs paramétrés C^k-équivalents et $\theta \in \mathrm{Diff}^k(J, I)$ vérifiant $g = f \circ \theta$; si α est une forme différentielle de degré un continue sur un ouvert U de $\mathscr{E}$ contenant le support commun de γ et γ', alors deux cas et deux seulement sont possibles :**

i) $\displaystyle\int_\gamma \alpha = \int_{\gamma'} \alpha$ **si** $\theta \in \mathrm{Diff}_+^k(J, I)$;

ii) $\displaystyle\int_\gamma \alpha = -\int_{\gamma'} \alpha$ **si** $\theta \in \mathrm{Diff}_-^k(J, I)$.

En effet par définition :

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \alpha[f(t)].f'(t)\,\mathrm{d}t$$

$t \longmapsto \alpha[f(t)].f'(t)$ est continue et $u \longmapsto \theta(u)$ établit un C^k-difféomorphisme de $[c, d]$ *sur* $[a, b]$. Appliquant III **6**.7.*2*, 2° il vient :

$$\int_a^b \alpha[f(t)].f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\theta^{-1}(a)}^{\theta^{-1}(b)} \alpha[f(\theta(u))].f'(\theta(u))\theta'(u)\,\mathrm{d}u$$

Or pour tout u :

$$\begin{aligned}\alpha[f(\theta(u))].f'(\theta(u))\theta'(u) &= \alpha[f(\theta(u))].(\theta'(u)f'(\theta(u)))\\ &= \alpha(g(u)).g'(u)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int_\gamma \alpha = \int_{\theta^{-1}(a)}^{\theta^{-1}(b)} \alpha(g(u)).g'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Suivant que θ est strictement croissant ou décroissant, on a $\theta^{-1}(a) = c$ et $\theta^{-1}(b) = d$, ou $\theta^{-1}(a) = d$ et $\theta^{-1}(b) = c$. D'où le résultat. □

2° On déduit immédiatement du lemme :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soient Γ_+ un C^k-arc géométrique orienté, et α une forme différentielle de degré un continue sur un ouvert U de $\mathscr{E}$ contenant supp Γ_+. Alors $\int_\gamma \alpha$ ne dépend pas du choix du représentant γ de Γ_+ ; on l'appelle** *intégrale curviligne de α le long de Γ_+* **; on la note $\int_{\Gamma_+} \alpha$.**

Résulte immédiatement de la définition d'un arc géométrique orienté. □

L'introduction de l'intégrale curviligne le long d'un arc géométrique orienté est, encore ici, un simple procédé d'exposition, destiné à rappeler que l'on travaille sur un arc paramétré que l'on ne s'autorise à remplacer que par un arc positivement équivalent.

Ce qui est fondamental c'est le lemme du **1°**.

5.3. THÉORÈME DE GREEN-RIEMANN

L'espace envisagé dans ce sous-chapitre est $\mathbb{R}^2$ orienté canoniquement.

5.3.*1*. Bord orienté d'un compact à bord dans $\mathbb{R}^2$

1° ***Notion de compact à bord.*** — Rappelons que les arcs-paramétrés C^1 par morceaux et réguliers ont été définis au **5.2.*1*, 4°** et posons

DÉFINITION. — **Un compact K de $\mathbb{R}^2$ est dit** *compact à bord* **si, et seulement si sa frontière ∂K — alors appelée bord de K — possède les deux propriétés suivantes :**

i) Il existe une famille finie $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}_p}$ d'arcs paramétrés fermés simples, C^1 par morceaux et réguliers, telle que ∂K soit la réunion *disjointe* **des supports $\mathscr{C}_i$ de ces arcs (ce qui signifie que $\mathscr{C}_i \cap \mathscr{C}_j = \varnothing$ pour $i \neq j$) ;**

ii) Pour tout point régulier d'un arc γ_i, il existe un pavé P centré en ce point, tel que $P \setminus \partial K$ ait deux composantes connexes, l'une constituée de points de l'intérieur de K, l'autre de points n'appartenant pas à K.

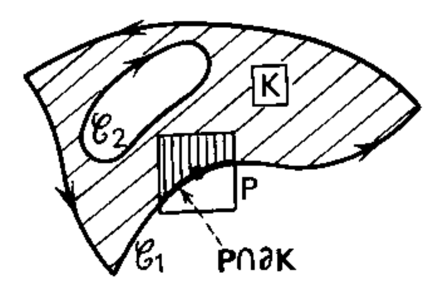


FIG. 56.

REMARQUES. — *a*) D'un point de vue intuitif, la seconde condition signifie qu'au voisinage de tout point régulier de la frontière, les points de K sont situés « d'un même côté » du bord ∂K.

b) Notre définition d'un compact à bord n'est pas la plus générale, mais elle suffit dans les cas qui nous intéressent.

Orientation du bord du compact à bord K. — Les notations sont celles de la définition précédente. Considérons un point régulier, de paramètre t, de l'un des arcs $\gamma_i = (I_i, f_i)$, et un pavé P de centre $f_i(t)$ vérifiant ii). Prenons un repère direct $\mathscr{R}$ d'origine $f_i(t)$, de premier vecteur de base $f_i'(t)$. On montre aisément que (quitte à restreindre P) on peut d'une part restreindre $P \cap \partial K$ à $P \cap \mathscr{C}_i$, et, d'autre part, trouver pour le sous-arc correspondant de γ_i une paramétrisation cartésienne C^1-équivalente, de la forme $x \longmapsto (x, \varphi(x))$.

Les deux composantes connexes de $P \setminus \partial K$ se caractérisent ainsi, au moyen de $\mathscr{R}$, respectivement par $y > \varphi(x)$ et $y < \varphi(x)$. Dans ces conditions, on dit que le *vecteur* $f_i'(t)$ *est cohérent avec* K si, et seulement si la composante connexe caractérisée par $y > \varphi(x)$ est celle qui est constituée de points de l'intérieur de K (intuitivement : au voisinage du point $f_i(t)$, les points de K sont « à gauche » de ∂K). Le lecteur constatera que la propriété : « le vecteur $f_i'(t)$ est cohérent avec K » ne dépend pas du choix du deuxième vecteur de base de $\mathscr{R}$; en particulier, si $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique, on pourra choisir un repère $\mathscr{R}$ orthogonal.

Nous admettons que (quitte à remplacer γ_i par l'arc « opposé », obtenu par le changement de paramètre $t \longmapsto -t$), il est possible de faire en sorte que le vecteur-dérivée première soit cohérent avec K en tout point régulier de γ_i.

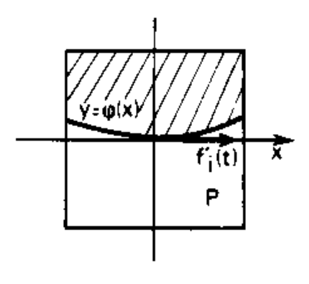


FIG. 57.

Lorsqu'il en est ainsi pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, on dit que la réunion des arcs orientés Γ_i représentés par les γ_i constitue le *bord orienté*, noté ∂K_+ du compact K.

En résumé d'un point de vue intuitif on est en présence d'un compact K dont la frontière est une réunion finie, disjointe de supports d'arcs géométriques orientés, fermés, simples, C^1 par morceaux et réguliers, tels qu'en parcourant cette frontière dans le sens de l'orientation on ait K constamment à sa gauche.

REMARQUE. — Pour donner une méthode d'orientation du bord ∂K qui soit la même dans les trois cas que nous envisageons dans ce chapitre (Green-Riemann, Ostrogradski, Stokes), il

vaudrait mieux associer au point considéré $f_i(t)$ un *vecteur sortant* de K, i.e. un vecteur $z \notin \mathbb{R} f_i'(t)$ auquel on puisse associer un C^1-arc $([u_0, u_1[, g)$ de $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

i) $\forall u \in [u_0, u_1[\quad g(u) \in K$

ii) $g(u_0) = f_i(t)$; $\quad g'(u_0) = -z$.

Le vecteur $f_i'(t)$ sera alors dit cohérent avec K si, et seulement si, pour *tout* vecteur sortant z (et l'on constate que cette propriété ne dépend pas du choix de ce vecteur), la base $(z, f_i'(t))$ est une base directe de $\mathbb{R}^2$.

2° *Quelques cas particuliers.*

1er CAS. — Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et φ_1 et φ_2 deux applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in]a, b[, \ \varphi_1(t) < \varphi_2(t).$$

D'après III.7.3.*1* nous disposons du compact quarrable :

$$K = \{(x, y) | (a \leqslant x \leqslant b) \wedge (\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x))\}$$

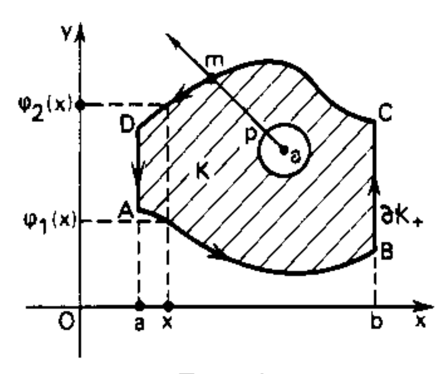


FIG. 58.

La frontière de K est constituée par la réunion de quatre graphes et elle est le support de l'arc paramétré, ainsi défini : on pose $a_0 = a$, $a_1 = b$,

$$a_2 = b + \varphi_2(b) - \varphi_1(b), \qquad a_3 = 2b + \varphi_2(b) - \varphi_1(b) - a$$
$$a_4 = 2b + \varphi_2(a) + \varphi_2(b) - \varphi_1(a) - \varphi_1(b) - a$$

Il s'agit de l'arc $t \longmapsto f(t)$ défini par :

Pour $a_0 \leqslant t \leqslant a_1$: $f(t) = (t, \varphi_1(t))$
Pour $a_1 \leqslant t \leqslant a_2$: $f(t) = (b, t + \varphi_1(b) - b)$
Pour $a_2 \leqslant t \leqslant a_3$: $f(t) = (2b + \varphi_2(b) - \varphi_1(b) - t, \ \varphi_2(2b + \varphi_2(b) - \varphi_1(b) - t))$
Pour $a_3 \leqslant t \leqslant a_4$: $f(t) = (a, 2b + \varphi_2(a) + \varphi_2(b) - \varphi_1(b) - a - t)$

D'un point de vue mnémotechnique il s'agit d'une part du graphe de $x \longmapsto \varphi_1(x)$, paramétré par le choix du paramètre x (on dit qu'il est parcouru suivant les abscisses croissantes), du segment $[B, C]$ paramétré par $y \longmapsto (b, y)$ (on dit qu'il est parcouru suivant les ordonnées croissantes), du graphe de $x \longmapsto \varphi_2(x)$ paramétré par $-x$ (on dit qu'il est parcouru suivant les abscisses décroissantes) et enfin du segment $[D, A]$ paramétré par $y \longmapsto (a, -y)$ (on dit qu'il est parcouru suivant les ordonnées décroissantes) ; on a mis « bout à bout » ces quatre arcs en définissant une paramétrisation continue de $[a_0, a_4]$ dans $\mathbb{R}^2$. On obtient ainsi un arc fermé, simple, donc orientable.

Si l'on suppose alors en outre que φ_1 et φ_2 sont dérivables cet arc est C^1 par morceaux et régulier et il est facile de constater que l'arc géométrique orienté Γ, ayant pour représentant γ est

précisément le bord orienté ∂K_+ de K qui, ici n'est constitué que d'un seul arc. On peut alors prouver que l'orientation cohérente est ici caractérisée par la propriété suivante : prenant un point a intérieur à K et un cercle centré en a contenu dans l'intérieur de K, lorsque $t \longmapsto f(t) = m$ décrit ∂K_+, l'unique point p d'intersection de la demi-droite d'origine a contenant m et du cercle, décrit le cercle une fois, dans le sens direct.

REMARQUE. — Il est bien évident que l'on inclut ici le cas où $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$ (resp. $\varphi_2(b) = \varphi_1(b)$), le sous-arc $[D, A]$ (resp. $[B, C]$) étant alors réduit à un point.

2e CAS. — Soit $[c, d]$, $c < d$, un segment de $\mathbb{R}$ et ψ_1 et ψ_2 deux applications continues de $[c, d]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in]c, d[, \quad \psi_1(t) < \psi_2(t)$$

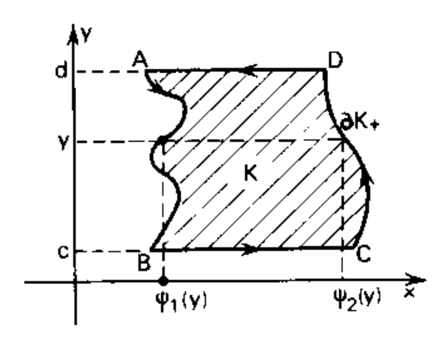


FIG. 59.

Posant ici $K = \{(x, y) | (c \leqslant y \leqslant d) \wedge (\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y))\}$, K est un compact quarrable de $\mathbb{R}^2$ et sa frontière est le support d'un arc-paramétré γ, obtenu en mettant « bout à bout » le graphe de $y \longmapsto x = \psi_1(y)$ parcouru suivant les ordonnées décroissantes, le segment $[B, C]$ parcouru suivant les abscisses croissantes, le graphe de $y \longmapsto \psi_2(y)$ parcouru suivant les ordonnées croissantes et le segment $[D, A]$ parcouru suivant les abscisses décroissantes.

Si l'on suppose en outre ψ_1 et ψ_2 dérivables, l'arc géométrique orienté Γ ayant pour représentant γ est le bord orienté ∂K_+ de K qui, ici encore, n'est constitué que d'un seul arc. On constaterait que l'orientation cohérente est, ici aussi, caractérisée par la propriété citée dans le 1er cas.

3e CAS. — On envisage ici un arc paramétré $\gamma = ([a, b], f)$, $t \longmapsto (x(t), y(t))$ fermé simple, C^1 par morceaux et régulier, vérifiant les deux conditions :

i) Si α (resp. β) désigne la borne inférieure (resp. supérieure) de $t \longmapsto x(t)$ sur $[a, b]$, il existe deux applications continues φ_1 et φ_2 de $[\alpha, \beta]$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in]\alpha, \beta[\qquad \varphi_1(x) < \varphi_2(x),$$

et que, si l'on introduit l'arc-paramétré γ_1 construit avec φ_1 et φ_2 comme cela a été fait au 1er cas, les supports de γ et γ_1 soient les mêmes.

ii) Si δ (resp. ε) désigne la borne inférieure (resp. supérieure) de $t \longmapsto y(t)$ sur $[a, b]$, il existe deux applications continues ψ_1 et ψ_2 de $[\delta, \varepsilon]$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall y \in]\delta, \varepsilon[\qquad \psi_1(y) < \psi_2(y)$$

et que, si l'on introduit l'arc paramétré γ_2 construit avec ψ_1 et ψ_2 comme cela a été fait au 2e cas, les supports de γ et γ_2 soient les mêmes;

D'un point de vue intuitif, γ est coupé en deux points au plus par une parallèle à l'axe des ordonnées (resp. des abscisses) et lorsque l'intersection avec une telle parallèle est non vide, on peut exprimer de manière continue les ordonnées (resp. les abscisses) des points d'intersection.

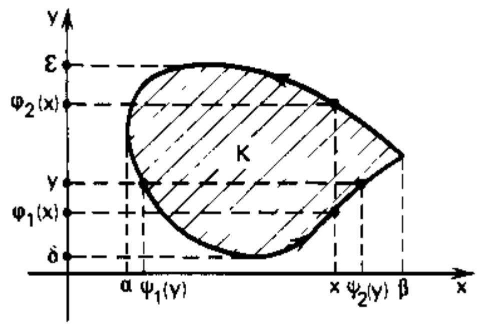


FIG. 60.

Du fait que l'on dispose d'arcs fermés simples ayant le même support, on déduit aisément que γ, γ_1 et γ_2 sont C^0-équivalents et définissent donc le même C^0-arc géométrique. Il est facile de constater que γ_1 et γ_2 appartiennent à la même classe d'équivalence positive et (quitte à remplacer γ par $([-b, -a], t \longmapsto f(-t))$, nous pouvons supposer que γ, γ_1 et γ_2 définissent un même arc géométrique orienté Γ.

Reprenant les constructions faites aux 1° et 2°, on constate qu'elles conduisent au même compact K de $\mathbb{R}^2$ et que Γ (considéré comme de classe C^1 par morceaux et régulier grâce au représentant γ) est le bord orienté ∂K_+ de K.

En réalité nous venons de rencontrer trois cas particuliers du théorème suivant, qui est admis :

THÉORÈME DE JORDAN. — **Si $\mathscr{C}$ est le support d'un arc géométrique fermé simple Γ de $\mathbb{R}^2$, alors $\mathbb{R}^2 \backslash \mathscr{C}$ a exactement deux composantes connexes ; $\mathscr{C}$ est leur frontière commune.**

Une et une seule d'entre elles est bornée ; elle est dite *intérieur de $\mathscr{C}$* et notée $\mathscr{C}_{\text{int}}$; son adhérence K est un compact, et, si, en outre, Γ est C^1 par morceaux et régulier, alors l'une des orientations de Γ est le bord orienté de K (ce bord est constitué d'un seul arc).

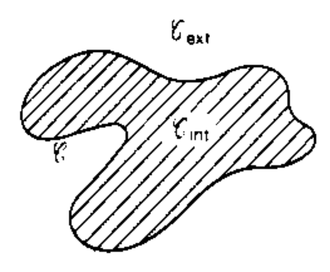


FIG. 61.

5.3.2. Théorème de Green-Riemann

1° Nous admettons, sous sa forme générale, le théorème suivant :

THÉORÈME DE GREEN-RIEMANN. — **Soient K un compact à bord de $\mathbb{R}^2$, de bord orienté ∂K_+, et $\alpha = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ une forme différentielle de degré un, de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ contenant K. Alors on a :**

$$\int_{\partial K_+} \alpha = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (1)$$

Il va de soi que $\int_{\partial K_+}$ est la somme (finie) des intégrales curvilignes le long des différents arcs géométriques orientés de classe C^1 qui constituent ∂K_+ (nous sommes pour chacun d'eux, dans les

hypothèses du 5.2.2). D'autre part la frontière de K, réunion finie de parties $\mathscr{R}$-négligeables de $\mathbb{R}^2$ (supports d'arcs compacts, C^1 par morceaux), est $\mathscr{R}$-négligeable ; K est ainsi un compact quarrable, et la continuité de $(x, y) \longmapsto \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$ assure l'existence de l'intégrale double.

• Nous allons cependant démontrer le théorème dans quelques cas particuliers qui — ainsi que le lecteur le constatera — s'étendent aux cas usuels d'application.

a) On se place dans le 1er *cas particulier du* 5.3.*1*, 2°.

Par application de IV.7.1.2, 1°, on obtient :

$$- \iint_K \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b (P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x)))\,\mathrm{d}x \qquad (2)$$

Le second membre de (2) est $\int_{\partial K_+} P\,\mathrm{d}x$, puisque les intégrales curvilignes correspondant aux paramétrages des segments $[B, C]$ et $[D, A]$ sont nulles. Nous avons donc établi, dans ce cas particulier l'égalité :

$$\int_{\partial K_+} P\,\mathrm{d}x = - \iint_K \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (3)$$

b) On se place dans le 2e *cas particulier du* 5.3.*1*, 2°.

Par le même procédé, on établit, dans ce cas particulier, l'égalité :

$$\int_{\partial K_+} Q\,\mathrm{d}y = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (4)$$

c) On se place dans le 3e *cas particulier du* 5.3.*1*, 2°. — Comme en *a*) :

$$- \iint_K \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta (P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x)))\,\mathrm{d}x \qquad (5)$$

Par le changement de variable $t \longmapsto x(t)$, le second membre de (5) s'écrit $\int_{\partial K_+} P\,\mathrm{d}x$, ce qui montre que l'on a encore l'égalité (3).

L'égalité (4) s'étend de la même façon et, par simple addition à partir de (3) et de (4), on obtient (1).

• Dans des cas plus généraux, on cherche à se ramener au cas qui précède en utilisant des droites parallèles aux axes de coordonnées, de façon à fractionner le compact K en sous-compacts, quitte à introduire des intégrales curvilignes le long de segments parcourus chacun deux fois, en sens inverse.

Les figures 62 et 63 illustrent cette méthode : les segments ajoutés (parcourus deux fois) sont représentés par un trait pointillé; dans le second cas ∂K est constitué de deux arcs.

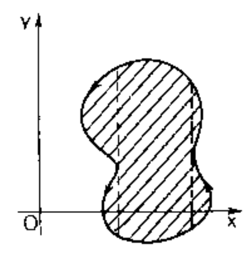


FIG. 62.

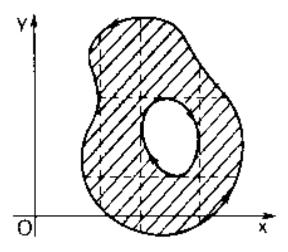


FIG. 63.

2° ***Liaison avec l'aire d'un compact quarrable.*** — Utilisant les applications

$$(x, y) \longmapsto P(x, y) = -y \qquad \text{et} \qquad (x, y) \longmapsto Q(x, y) = x$$

qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, on obtient qu'un compact à bord, que l'on sait déjà être quarrable, a une aire donnée par l'une des trois expressions :

$$\int_{\partial K_+} x \, \mathrm{d}y = \int_{\partial K_+} - y \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{\partial K_+} (x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x)$$

Ces dernières formules, qui généralisent IV.7.3.*1*, 1°, sont en particulier très utiles pour calculer l'aire d'un compact plan « intérieur à une courbe fermée simple ».

5.4. INTÉGRALE D'UNE FORME DIFFÉRENTIELLE DE DEGRÉ DEUX

$(\mathscr{E}, E)$ est un espace affine de dimension 3 ; k est un élément de $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

5.4.*1*. Intégrale d'une forme différentielle de degré 2 sur une nappe paramétrée

1° Soient $\sigma = (D, F)$ une C^k-nappe paramétrée de $\mathscr{E}$, et α une forme différentielle de degré 2, continue sur le support $\mathscr{S}$ de σ. Nous disposons de la forme différentielle de degré 2, $F^*(\alpha)$, continue sur le domaine D de $\mathbb{R}^2$ (**5**.1.2).

Comme dim $\mathbb{R}^2 = 2$, si nous notons (u, v) l'élément générique de $\mathbb{R}^2$, nous disposons de la base canonique de $\Omega_2^0(D)$ constituée par la forme différentielle de degré deux $\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$; d'où l'existence d'une application continue $f : D \to \mathbb{R}$ telle que $F^*(\alpha) = f \, \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$.

Avec ces notations, posons :

DÉFINITION. — **Soient T une partie bornée de D, et τ le morceau [1] $(T, F \mid T)$ de σ. La forme différentielle α est dite intégrable sur τ si, et seulement si f est intégrable sur T. S'il en est ainsi $\iint_T f(u, v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$ est dite intégrale de α sur τ, et noté $\int_\tau \alpha$.**

---

(1) T n'étant pas nécessairement un domaine, le couple $(T, F|T)$, que nous appelons *morceau de nappe paramétrée*, n'est pas nécessairement une nappe paramétrée.

Dans le cas où D est borné, on dit, en particulier, que α est intégrable sur σ si, et seulement si f est intégrable sur D. On constate d'autre part :

PROPOSITION. — **Chacune des conditions suivantes est suffisante pour que α soit intégrable sur τ :**

i) T est un compact quarrable de $\mathbb{R}^2$ (on dit alors que τ est un morceau compact quarrable de σ) ;

ii) T est une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ et f est bornée sur T.

2° ***Propriétés.*** — *a) Soit τ un morceau d'une nappe σ. Si α et β sont des formes différentielles de degré 2 intégrables sur τ, alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la forme $\lambda\alpha + \mu\beta$ est intégrable sur τ et on a :*

$$\int_\tau (\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda \int_\tau \alpha + \mu \int_\tau \beta$$

En particulier si $\tau = (T, F|T)$ est tel que T soit un compact quarrable, l'application de $\Omega_2^0(\mathscr{S})$ dans $\mathbb{R}$, $\alpha \longmapsto \int_\tau \alpha$ est une forme linéaire.

Vérification immédiate sur la définition et les propriétés de $F^*(\alpha)$. □

b) DÉFINITION. — **Le morceau τ de σ est dit $\mathscr{R}$-négligeable par rapport à α, si, et seulement s'il vérifie les deux conditions :**

i) T est une partie $\mathscr{R}$-négligeable de $\mathbb{R}^2$;

ii) f est bornée sur T.

Notons qu'il en est ainsi lorsque T est un compact $\mathscr{R}$-négligeable de $\mathbb{R}^2$, et en particulier, lorsque τ est un C^1-arc compact tracé sur σ.

Nous constatons que : *si τ est $\mathscr{R}$-négligeable par rapport à α, alors α est intégrable sur τ, d'intégrale nulle.* Nous disposons ainsi de la propriété :

Si la forme différentielle α de degré 2 est intégrable sur les morceaux τ_1 et τ_2 de la nappe σ, et si $\tau_1 \cap \tau_2$ est $\mathscr{R}$-négligeable par rapport à α, alors α est intégrable sur $\tau_1 \cup \tau_2$ et :

$$\int_{\tau_1 \cup \tau_2} \alpha = \int_{\tau_1} \alpha + \int_{\tau_2} \alpha$$

Il va de soi que $\tau_1 \cap \tau_2$ (resp. $\tau_1 \cup \tau_2$) désigne le morceau de σ défini par la restriction de F à $T_1 \cap T_2$ (resp. $T_1 \cup T_2$). On utilise IV.6.5.4, 1°. □

c) Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines de dimension 3, φ une application de classe C^1 d'un ouvert U de $\mathscr{E}$ dans un ouvert V de $\mathscr{F}$, α une forme-différentielle de degré 2 continue sur V et $\sigma = (D, F)$ une nappe de classe C^k de $\mathscr{E}$ dont le support est contenu dans U; on note $\varphi(\sigma)$ la nappe $(D, \varphi \circ F)$ de $\mathscr{F}$. Alors si $\tau = (T, F|T)$ est un morceau de σ, et sous réserve que $\varphi^*(\alpha)$ soit intégrable sur τ (ou que α soit intégrable sur $\varphi(\tau)$), on dispose de l'égalité :

$$\int_{\varphi(\tau)} \alpha = \int_\tau \varphi^*(\alpha)$$

Par utilisation de $F^*(\varphi^*(\alpha)) = (\varphi \circ F)^*(\alpha)$, ces deux intégrales conduisent toutes deux à la même intégrale double. □

3° ***Calculs pratiques.*** — $\mathscr{E}$ est muni d'un repère $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ et la nappe $\tau = (D, F)$ est donnée par :

$$(u, v) \longmapsto F(u, v) = O + X(u, v)\mathbf{i} + Y(u, v)\mathbf{j} + Z(u, v)\mathbf{k}$$

où X (resp. Y, resp. Z) sont des applications de classe C^k de D dans $\mathbb{R}$. Comme E est muni de la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, on sait que pour toute partie $\mathscr{S}$ de $\mathscr{E}$ les formes différentielles de degré 2, continues sur $\mathscr{S}$, se décomposent de manière canonique sous la forme :

$$\alpha = P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

où P, Q, R sont trois applications continues de $\mathscr{S}$ dans $\mathbb{R}$.

$F^*(\alpha)$ est alors la forme différentielle de degré deux, sur D :

$$F^*(\alpha) = (P \circ F)\,\mathrm{d}Y \wedge \mathrm{d}Z + (Q \circ F)\,\mathrm{d}Z \wedge \mathrm{d}X + (R \circ F)\,\mathrm{d}X \wedge \mathrm{d}Y$$

Un calcul facile conduit à :

$$\begin{aligned} F^*(\alpha) &= \{(P \circ F)(Y'_u Z'_v - Y'_v Z'_u) + (Q \circ F)(Z'_u X'_v - Z'_v X'_u) \\ &\qquad + (R \circ F)(X'_u Y'_v - X'_v Y'_u)\}\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v \\ &= \left(P \circ F \cdot \frac{D(Y, Z)}{D(u, v)} + Q \circ F \cdot \frac{D(Z, X)}{D(u, v)} + R \circ F \cdot \frac{D(X, Y)}{D(u, v)}\right)\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v \end{aligned}$$

Ainsi f est l'application de D dans $\mathbb{R}$,

$$f = P \circ F \cdot \frac{D(Y, Z)}{D(u, v)} + Q \circ F \cdot \frac{D(Z, X)}{D(u, v)} + R \circ F . \frac{D(X, Y)}{D(u, v)}$$

Un cas particulier. — $\sigma = (D, F)$ est donnée par :

$$(x, y) \longmapsto F(x, y) = O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + Z(x, y)\mathbf{k}$$

Le calcul qui précède conduit à $f : D \to \mathbb{R}$:

$$f = -P \circ F . Z'_x - Q \circ F . Z'_y + R \circ F$$

Exemple. — *Dans $\mathbb{R}^3$ on considère la forme différentielle de degré 2 :*

$$\alpha = x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

et la nappe $\sigma = (D, F)$ *où* $D = \left\{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \wedge (0 < \varphi < 2\pi)\right\}$

et $F : \ (\theta, \varphi) \longmapsto (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$

(le support de σ est une demi-sphère ouverte privée d'un quart de grand cercle).

Existence et calcul de $\int_\sigma \alpha$.

On détermine $F^*(\alpha)$:

$$\begin{aligned} F^*(\alpha) &= \sin\theta\cos\varphi.(\cos\theta\sin\varphi\, d\theta + \sin\theta\cos\varphi\, d\varphi) \wedge (-\sin\theta\, d\theta) \\ &+ \sin\theta\sin\varphi\,(-\sin\theta\, d\theta) \wedge (\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - \sin\theta\sin\varphi\, d\varphi) \\ &+ \cos\theta\,(\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - \sin\theta\sin\varphi\, d\varphi) \wedge (\cos\theta\sin\varphi\, d\theta + \sin\theta\cos\varphi\, d\varphi) \\ &= \sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi \end{aligned}$$

D est un ouvert quarrable de $\mathbb{R}^2$ et $(\theta, \varphi) \longmapsto \sin\theta$ est bornée sur D ce qui assure l'existence de $\iint_D \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$.

Il en résulte :

$$\int_\sigma \alpha = 2\pi.$$

5.4.2. Intégrale d'une forme différentielle de degré 2 sur une nappe géométrique orientée

1° Lemme. — **Soient $\sigma = (D, F)$ et $\sigma' = (\Delta, G)$ deux nappes paramétrées C^k-équivalentes et $\theta \in \mathrm{Diff}^k(\Delta, D)$ tel que $G = F \circ \theta$. On considère une forme différentielle α de degré 2 continue sur le support commun $\mathscr{S}$ de σ et σ', et une partie bornée T de D telle que la partie $T' = \theta^{-1}(T)$ de Δ soit également bornée. Alors, sous réserve que α soit intégrable sur chacun des morceaux de nappes $\tau = (T, F|T)$ et $\tau' = (T', G|T')$, on a :**

$$\int_\tau \alpha = \varepsilon \int_{\tau'} \alpha$$

où $\varepsilon = 1$ si $\theta \in \mathrm{Diff}^k_+(\Delta, D)$, et $\varepsilon = -1$ si $\theta \in \mathrm{Diff}^k_-(\Delta, D)$.

En effet d'après 5.1.2 :

$$G^*(\alpha) = (F \circ \theta)^*(\alpha) = \theta^*(F^*(\alpha))$$

Il en résulte que si $F^*(\alpha) = f\, du \wedge dv$ avec $f : D \to \mathbb{R}$ continue on a :

$$G^*(\alpha) = (f \circ \theta)\mathrm{D}(J_\theta).d\lambda \wedge d\mu$$

Ainsi, puisque par hypothèse α est à la fois intégrable sur τ et τ' :

$$\int_\tau \alpha = \iint_T f(u, v)\, du\, dv$$

$$\int_{\tau'} \alpha = \iint_{\theta^{-1}(T)} (f \circ \theta)(\lambda, \mu)\, \mathrm{D}(J_\theta)(\lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu$$

Comme les deux intégrales doubles existent, par IV.7.2.2, 1° on dispose de l'égalité :

$$\iint_T f(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_{\theta^{-1}(T)} (f \circ \theta)(\lambda, \mu) . |\mathrm{D}(J_\theta)(\lambda, \mu)|\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu$$

Or sgn $\mathrm{D}(J_\theta)$ est la constante $(\lambda, \mu) \longmapsto \varepsilon$. □

REMARQUE. — Si l'on utilise un morceau compact quarrable de σ, il est bien évident que puisque T est un compact quarrable de D, T' est un compact quarrable de Δ, et α est à la fois intégrable sur τ et τ', si bien que le lemme s'applique sans aucune réserve. Par contre si l'on utilise d'autres morceaux de σ, il se peut que α soit intégrable sur τ sans l'être sur τ' ; nous retrouvons le fait, déjà signalé, que l'intégrale de Riemann est mal adaptée à ce genre de problèmes.

2° La notion d'intégrale d'une forme différentielle de degré 2 sur un morceau de nappe géométrique orientée, que l'on pourrait déduire du lemme, ne présente que peu d'intérêt. L'essentiel est le lemme du **1°**.

5.4.*3*. Intégrale d'une forme différentielle de degré 2 sur une surface décomposable orientée

1° ***Cas particulier.*** — Soit Σ une C^k-nappe géométrique plongée. On sait que $\mathscr{S} = \operatorname{supp} \Sigma$ est un surface plongée (au sens des sous-variétés). Fixons une orientation $\mathscr{S}_+$ de $\mathscr{S}$, ce qui équivaut à fixer une orientation Σ_+ de Σ (par le choix d'un représentant).

Soit en outre α une forme différentielle de degré 2 continue sur $\mathscr{S}$.

En utilisant le lemme du **5.4.***2*, 1°, on obtient :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **On suppose qu'il existe un $\sigma \in \Sigma_+$ tel que α soit intégrable sur E. Alors, pour tout $\sigma' \in \Sigma_+$:**

- **ou bien α n'est pas intégrable sur σ';**
- **ou bien α est intégrable sur σ' et les intégrales de α sur σ et σ' sont égales.**

On est en droit de dire qu'alors α est intégrable sur $\mathscr{S}_+$, de définir l'intégrale de α sur $\mathscr{S}_+$ comme étant l'intégrale de α sur σ, et de la noter $\int_{\mathscr{S}_+} \alpha$.

2° ***Cas d'une surface décomposable orientée.*** — DÉFINITION. — **Une surface décomposable $\mathscr{S}$ de $\mathscr{E}$** (cf. 4.2.*3*, 2°) **est dite** *orientable* **si, et seulement si elle est incluse dans une surface orientable $\mathscr{S}'$ de $\mathscr{E}$ (au sens des sous-variétés).**

Le lecteur notera que cette définition est assez restrictive (elle exclut, par exemple, la frontière d'un pavé); mais elle n'implique pas que $\mathscr{S}$ soit nécessairement une surface, ainsi que le montre, dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure affine canonique, le cas de la surface décomposable : $\mathscr{S} = \{(x, y, z) | (x^2 + y^2 + z^2 = 1) \wedge (z \geqslant 0)\}$, incluse dans la surface orientable $\mathscr{S}' = \{(x, y, z) | \, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

A une orientation $\mathscr{S}'_+$ de $\mathscr{S}'$ correspond alors « l'orientation » $\mathscr{S}_+$ de $\mathscr{S}$ telle qu'en tout point m de $\mathscr{S}_+$ le plan tangent orienté en m à $\mathscr{S}_+$ (s'il existe) coïncide avec le plan tangent orienté en m à $\mathscr{S}'_+$ (qui, lui, existe toujours). On appelle *décomposition de* $\mathscr{S}_+$, toute décomposition (supp (U_i, F_i)) de $\mathscr{S}$ telle que, pour tout $i \in I$, (U_i, F_i) soit une paramétrisation de $\mathscr{S}'_+$, i.e. représente une sous-variété $\mathscr{S}_{i+}$ orientée en concordance avec $\mathscr{S}'_+$.

(Le lecteur constatera qu'à partir de toute décomposition de $\mathscr{S}$, on peut construire une décomposition de $\mathscr{S}_+$.)

Nous admettrons sans démonstration :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soient $\mathscr{S}_+$ une surface décomposable orientée et α une forme différentielle de degré 2 continue sur $\mathscr{S}_+$. S'il existe une décomposition de $\mathscr{S}_+$ telle que (avec les notations précédentes) α soit intégrable sur chaque $\mathscr{S}_{i+}$, alors la somme $\sum_{i \in I} \int_{\mathscr{S}_{i+}} \alpha$ est commune à toutes les décompositions de $\mathscr{S}_+$ vérifiant la même condition; on dit alors que α est intégrable sur $\mathscr{S}_+$, d'intégrale :**

$$\int_{\mathscr{S}_+} \alpha = \sum_{i \in I} \int_{\mathscr{S}_{i+}} \alpha.$$

Sans qu'il soit question de démonstration, ce théorème s'explique par le fait que — ainsi que nous l'avons vu au **5.4.***1*, 2° — pour toute nappe τ qui le contient et pour toute forme α, un C^1-arc paramétré compact est $\mathscr{R}$-négligeable par rapport à α.

EXEMPLE. — *Dans* $\mathbb{R}^3$ *muni de sa structure euclidienne canonique, la sphère* $\mathscr{S}$ *d'équation* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *est orientable* (**3.3.***4*, 2°). *Soit* $\mathscr{S}_+$ *la sphère orientée obtenue en orientant en chaque point* m *la normale par* $\overrightarrow{Om}$. *On propose de calculer :*

$$\int_{\mathscr{S}_+} x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy.$$

Nous avons vu (exemple I du **4.2.***3*, 2°) que nous disposons de la décomposition ($\mathscr{S}_1$ = supp (U, F)) avec :

$$U = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 | (0 < \theta < \pi) \wedge (-\pi < \varphi < \pi)\}$$

et

$$F(\theta, \varphi) \doteq (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$

La surface orientée $\mathscr{S}_{1+}$ représentée par (U, F), et la surface orientée $\mathscr{S}_+$ ont la même normale orientée, de vecteur unitaire $(0, 1, 0)$ au point $(0, 1, 0)$.

De la définition on déduit :

$$\int_{\mathscr{S}_+} \alpha = \iint_U \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 4\pi$$

• A titre d'exercice le lecteur reprendra le calcul en utilisant la seconde décomposition de $\mathscr{S}$ utilisée au **4.2.***3*, 1°. Ici encore, il aura alors à utiliser des intégrales impropres.

5.5. THÉORÈME DE STOKES; THÉORÈME D'OSTROGRADSKI

5.5.*1*. Théorème d'Ostrogradski.

§ *L'espace envisagé est* $\mathbb{R}^3$ *orienté canoniquement.* §

1° ***Notion de compact à bord dans*** $\mathbb{R}^3$. — DÉFINITION. — **Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^3$; on dit que K est à bord si, et seulement si sa frontière ∂K vérifie les hypothèses suivantes :**

a) **∂K est une surface nécessairement compacte;**

b) **Pour tout point $m \in \partial K$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ contenant m, un pavé ouvert V de $\mathbb{R}^3$, et un C^1-difféomorphisme φ de U sur V vérifiant les deux conditions :**

i) $\partial K \cap U = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \{0\} \cap V)$ ce qui ne fait que traduire une partie de *a*) à savoir que ∂K est une surface de classe C^1 (au sens des sous-variétés);

ii) $K \cap U = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_- \cap V)$.

Intuitivement cette deuxième propriété traduit le fait que K est « d'un même côté » de ∂K.

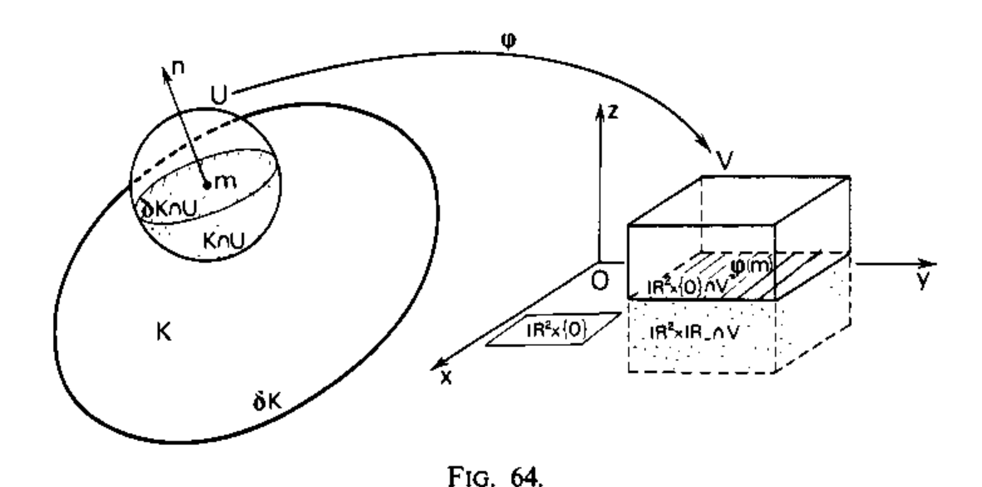


FIG. 64.

Orientation du bord. — Supposons $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. En tout point m de ∂K, nous pouvons orienter la normale à ∂K, d'un point de vue intuitif, en choisissant un vecteur directeur **n** « tourné vers l'extérieur de K », d'un point de vue plus mathématique en constatant que $U \backslash \partial K$ a deux composantes connexes, images par φ^{-1} des deux composantes connexes de $V \backslash \varphi(\partial K \cap U)$ (à savoir $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^* \cap V$ et $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_-^* \cap V$) *et en choisissant un vecteur* **n** de telle sorte que les points $m + \varepsilon \mathbf{n}$ appartiennent à $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^* \cap V)$ (donc n'appartiennent pas à K) pour $\varepsilon > 0$, ε « petit »;

ainsi nous disposons d'une orientation dite canonique de la normale en tout point de ∂K et nous supposons que cette orientation en tout point permet d'en déduire une orientation de la surface ∂K : on dit que le bord du compact K est alors canoniquement orienté, et on le note ∂K_+.

EXEMPLES. — *a*) Toute boule fermée est un compact à bord dont le bord orienté est la sphère-frontière, les normales orientées étant dirigées vers l'extérieur de la boule.

b) Toute boule fermée B_1 privée d'une boule ouverte B_2 dont l'adhérence est incluse dans l'intérieur de B_1 (resp. de plusieurs telles boules), constitue un compact à bord dont le bord orienté est la réunion de deux sphères ; sur la sphère externe, les normales sont dirigées vers l'extérieur de B_1 ; sur la sphère interne, elles sont dirigées vers l'intérieur de B_2.

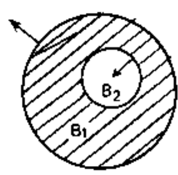


FIG. 65.

REMARQUES. — *a*) Le lecteur notera que le bord de K n'est pas nécessairement connexe.

b) On a écarté ici la possibilité d'avoir des points « anguleux » sur ∂K en se limitant au cas où les bords sont des surfaces ; en réalité on pourrait étendre la théorie au cas où les bords sont des réunions finies de surfaces dont les intersections mutuelles sont des réunions finies de C^1-arcs compacts.

c) L'orientation de $\mathbb{R}^3$ intervient en ce sens qu'elle permet de relier l'orientation de la normale à celle du plan tangent, et donc à celle de ∂K.

d) Pour simplifier la présentation de l'orientation du bord, nous avons muni $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. En fait celle-ci n'intervient pas, ainsi que l'on s'en assure :

— soit en considérant les composantes connexes de $U \backslash \partial K$ relativement à un repère direct de $\mathbb{R}^3$ construit en prenant une base du plan tangent en m (correspondant à une paramétrisation locale de ∂K) ;

— soit en utilisant (comme au **5.3.*1***, 1°) la notion de *vecteur sortant* de K.

2° UN EXEMPLE IMPORTANT. — Soit $\gamma = (I, t \longmapsto (x(t), y(t), 0))$ un C^1-arc paramétré plan de $\mathbb{R}^3$, régulier, fermé simple, de support $\mathscr{C}$. Considéré comme support d'arc géométrique de $\mathbb{R}^2$ (identifié à $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$), $\mathscr{C}$ limite un compact-plan noté $\overline{\mathscr{C}_{\text{int}}}$ ou $\overline{\gamma_{\text{int}}}$. On considère deux applications f_1 et f_2 de $\overline{\gamma_{\text{int}}}$ dans $\mathbb{R}$, continues, vérifiant les hypothèses suivantes :

i) f_1 et f_2 sont continues, et de classe C^1 sur γ_{int} ;

ii) Pour tout $(x, y) \in \gamma_{\text{int}}$, $f_1(x, y) < f_2(x, y)$.

Posons :

$$K = \{(x, y, z) | ((x, y) \in \overline{\gamma_{\text{int}}}) \wedge (f_1(x, y) \leqslant z \leqslant f_2(x, y))\}$$

K est un compact de $\mathbb{R}^3$ dont la frontière est la réunion de :

$$S_i = \{(x, y, z) | ((x, y) \in \overline{\gamma_{\text{int}}}) \wedge (z = f_i(x, y))\}, \quad i \in \mathbb{N}_2$$
$$C = \{(x, y, z) | (x, y) \in \mathscr{C}) \wedge (f_1(x, y) \leqslant z \leqslant f_2(x, y))\}$$

(il s'agit des graphes de f_1 et f_2 et du morceau de cylindre de base $\mathscr{C}$, de génératrices parallèles à Oz, limité par S_1 et S_2).

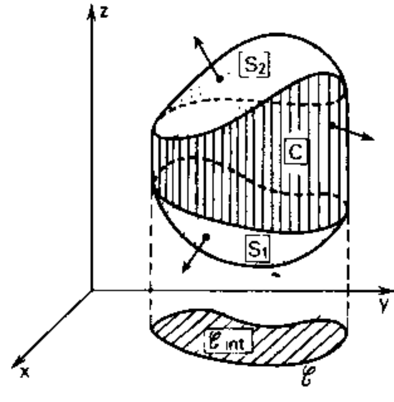


FIG. 66.

Notant $\mathscr{C}_i = \{(x, y, z) | ((x, y) \in \mathscr{C}) \wedge (z = f_i(x, y))\}$ on vérifie facilement que $\partial K \backslash \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$ est une surface, de classe C^1 ; si l'on suppose que ∂K est une surface (intuitivement ceci veut dire que S_1 et S_2 se « raccordent » avec C) alors K est un compact à bord décomposable dont l'orientation a été schématisée sur la figure.

REMARQUE. — Si l'on s'autorise des bords « anguleux » (remarque *b*) du 1°), on peut évidemment supprimer l'hypothèse que ∂K est une surface le long de $\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$ sous réserve de supposer que γ_1 et γ_2 sont de classe C^1 ce qui est par exemple réalisé si f_1 et f_2 sont de classe C^1 sur un ouvert contenant $\overline{\gamma_{int}}$.

3° ***Théorème d'Ostrogradski.*** — THÉORÈME. — **Soit K un compact à bord dans $\mathbb{R}^3$, de bord orienté ∂K_+ et**

$$\alpha = P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy$$

une forme différentielle de degré 2, de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ contenant K ; on a l'égalité :

$$\int_{\partial K_+} \alpha = \iiint_K \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) \right) dx \, dy \, dz$$

Ce théorème est admis mais, comme pour le théorème de Green-Riemann, nous pouvons donner sa justification dans quelques cas particuliers.

a) Cas particulier étudié au **2°**. — Calculons $\int_{\partial K_+} R \, dx \wedge dy$. Les paramétrisations $(x, y) \longmapsto (x, y, f_2(x, y))$ de S_2 et $(x, y) \longmapsto (x, y, f_1(x, y))$ de S_1 sont respectivement cohérente avec l'orientation de ∂K_+ et « opposée » à cette orientation. Par ailleurs la partie de l'intégrale relative à C_+ est nulle car une paramétrisation de C est $(t, u) \longmapsto (x(t), y(t), u)$ avec :

$$\forall t \qquad f_1(x(t), y(t)) \leqslant u \leqslant f_2(x(t), y(t))$$

et, dans le calcul de $\int_{C_+} d\alpha$, le produit extérieur $dx \wedge dy$ conduit à $(x'(t) \, dt) \wedge (y'(t) \, dt)$. On a donc :

$$\int_{\partial K_+} R \, dx \wedge dy = \iint_{\overline{\gamma_{int}}} (R(x, y, f_2(x, y)) - R(x, y, f_1(x, y))) \, dx \, dy$$

(car $\overline{\gamma_{int}}$ est un compact quarrable et, dans l'intégrale double on peut remplacer γ_{int} par $\overline{\gamma_{int}}$).

D'après IV.7.1.2, 1°,

$$\iint_{\overline{\gamma_{\text{int}}}} (R(x, y, f_2(x, y)) - R(x, y, f_1(x, y)))\, dx\, dy = \iiint_K \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

b) On dispose d'un compact à bord K vérifiant simultanément les hypothèses du 2° relativement aux trois plans de coordonnées.

Par simple addition, on obtient :

$$\int_{\partial K_+} \alpha = \iiint_K \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\right) dx\, dy\, dz$$

• Dans un *cas plus général* on cherche à décomposer K en compacts vérifiant l'hypothèse de *b*), quitte à introduire des morceaux de surface tels que les intégrales de α sur ces morceaux, se détruisent deux à deux (méthode analogue à celle de 5.3.2, 1°).

4° ***Liaison avec le volume d'un compact cubable.*** — Utilisant les applications :

$$(x, y, z) \longmapsto P(x, y, z) = x \quad (\text{resp. } Q(x, y, z) = y, \text{ resp. } R(x, y, z) = z)$$

qui sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ on constate que tout compact à bord est cubable, de volume donné par l'une des quatre expressions (qui généralisent IV.7.3.2, 1°)

$$\iint_{\partial K_+} x\, dy \wedge dz = \iint_{\partial K_+} y\, dz \wedge dx = \iint_{\partial K_+} z\, dx \wedge dy$$

$$= \frac{1}{3} \iint_{\partial K_+} x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy$$

Ceci explique le résultat trouvé en 5.4.3, 2°, exemple.

5.5.2. Théorème de Stokes

{ *$(\mathscr{E}, E)$ est un espace affine de dimension* 3. }

1° ***Compact à bord d'une surface.*** — DÉFINITION. — **Soit $\mathscr{S}$ une surface. Un compact K inclus dans $\mathscr{S}$ est dit à bord si :**

i) Il existe un nombre fini d'arcs γ_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, fermés, simples, C^1 par morceaux et réguliers, tels que ∂K, frontière de K dans $\mathscr{S}$, soit la réunion disjointe des supports $\mathscr{C}_i$ de ces arcs.

ii) Pour tout point régulier d'un arc γ_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, il existe un voisinage ouvert V de ce point dans $\mathscr{S}$ tel que $V \backslash \partial K$ ait deux composantes connexes, l'une constituée de points de l'intérieur de K (au sens de la topologie de $\mathscr{S}$), l'autre de points n'appartenant pas à K.

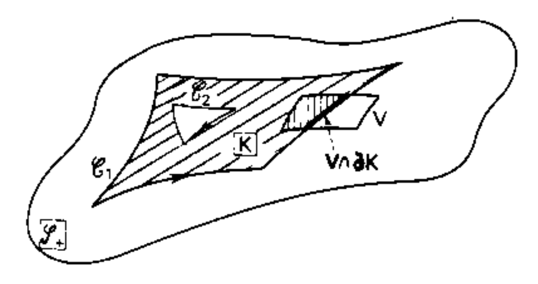


FIG. 67.

D'un point de vue intuitif la seconde condition signifie qu'au voisinage de tout point régulier de la frontière ∂K, les points de K sont situés « d'un même côté » du bord ∂K.

REMARQUES. — *a*) Le lecteur notera que l'on utilise la topologie de $\mathscr{S}$. Il est bien évident que pour celle de $\mathscr{E}$, K est d'intérieur vide.

b) Cette définition généralise celle donnée dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Orientation du bord.— Supposons la surface $\mathscr{S}$ orientée et notons la $\mathscr{S}_+$; en tout point, de paramètre t, régulier d'un arc γ_i nous disposons du vecteur dérivé $f_i'(t)$, vecteur directeur de la tangente à γ_i ; en ce même point, en tant que point de $\mathscr{S}_+$, nous disposons du plan tangent qui est orienté grâce à l'orientation de $\mathscr{S}_+$. Quitte, pour simplifier, à mettre une structure euclidienne sur $\mathscr{E}$ et sans détailler l'axiomatisation (ce que nous pourrions faire en projetant localement K sur le plan tangent) nous dirons que $f_i'(t)$ est cohérent avec K si, la demi-normale directe (déduite de la demi-tangente $f_i(t) + \mathbb{R}_+ f_i'(t)$ par rotation de $+ \pi/2$ dans le plan tangent) est dirigée vers l'intérieur de K. Lorsque $\mathscr{E}$ est orienté, ceci signifie que si $\mathbf{n}$ désigne le vecteur normal à $\mathscr{S}_+$ en ce point, la demi-droite orientée $f_i(t) + \mathbb{R}_+\mathbf{n} \wedge f_i'(t)$ est « dirigée » vers l'intérieur de K.

Nous admettons que (quitte à remplacer γ_i par l'arc opposé), il est possible de faire en sorte que le vecteur dérivée première soit cohérent avec K en tout point régulier de γ_i. Lorsqu'il en est ainsi pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, on dit que la réunion des arcs orientés Γ_i représentés par les γ_i constitue le bord orienté, noté ∂K_+, du compact K.

REMARQUES. — *a*) L'orientation d'un compact à bord sur une surface orientée ne dépend donc que de l'orientation de la surface et elle est changée en son opposée si l'on change l'orientation de la surface.

b) Dans le cas particulier de la formule de Green Riemann, le compact K est contenu dans le plan $\mathbb{R}^2$, canoniquement orienté, qui joue le rôle de $\mathscr{S}_+$.

c) Ici encore la structure euclidienne n'est pas nécessaire, ainsi qu'on le constate en convenant de dire que $f_i'(t)$ est cohérent avec K :

— si pour toute base *directe* $(f_i'(t), \mathbf{v})$ de la direction du plan tangent à $\mathscr{S}$ en $f_i(t)$, la demi-droite $f_i(t) + \mathbb{R}_+\mathbf{v}$ est dirigée vers « l'intérieur de K »,

— ou encore si, pour tout « vecteur sortant » z, la base $(z, f_i'(t))$ du plan tangent est directe.

2° UN EXEMPLE IMPORTANT. — $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère $(O\,; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ et $\mathscr{S}$ est le support d'une C^1-nappe plongée donnée par un représentant cartésien (D, F) avec :

$$F(x, y) = O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$$

On oriente $\mathscr{S}$ par le choix de la paramétrisation (D, F), ce qui en structure euclidienne orientée traduit une orientation de la normale vers les « côtes z positives ». Notons $\mathscr{S}_+$ la nappe orientée ainsi obtenue.

Si, identifiant le plan $O + \mathbb{R}\mathbf{i} + \mathbb{R}\mathbf{j}$ à $\mathbb{R}^2$, nous considérons dans D un compact à bord C, de bord ∂C, comme F est un homéomorphisme de D sur $\mathscr{S}$, nous disposons du compact $K = F(C)$ et de sa frontière dans $\mathscr{S}$, $\partial K = F(\partial C)$. On vérifie sans peine que K est alors un compact à bord dans $\mathscr{S}$ de bord ∂K.

L'orientation de $\mathscr{S}_+$ fait que par projection parallèlement à $\mathbf{k}$ sur Vect $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, toute base directe d'un plan tangent à $\mathscr{S}_+$ a pour image une base de même orientation que $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$. Il en résulte que l'orientation de ∂K est celle correspondant à ∂C ou en terme « imagé » que $\partial K_+ = F(\partial C_+)$.

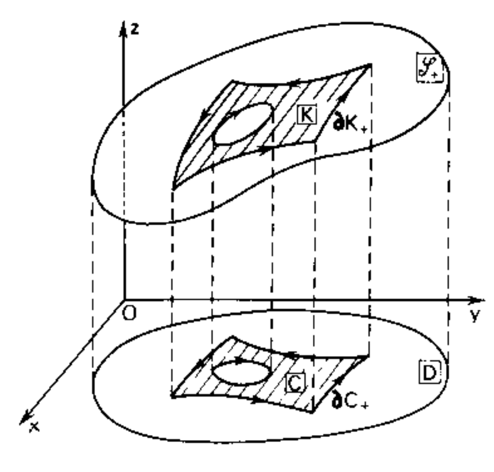


FIG. 68.

3° *Théorème de Stokes.* — THÉORÈME. — **Soient une surface orientée $\mathscr{S}_+$ et un compact à bord K contenu dans $\mathscr{S}_+$, de bord orienté ∂K_+. Si α est une forme différentielle de degré un, de classe C^1 sur un ouvert U contenant K, alors on a :**

$$\int_{\partial K_+} \alpha = \int_{K_+} \mathrm{d}\alpha$$

où K_+ désigne K, orienté par l'orientation de $\mathscr{S}_+$ et où $\int_{K_+} \mathrm{d}\alpha$ est l'intégrale sur K_+ de la forme différentielle de degré deux $\mathrm{d}\alpha$.

Dans le cas particulier où K est un compact de $\mathscr{S}$, de frontière dans $\mathscr{S}$, $\partial K = \varnothing$, dans les mêmes hypothèses $\int_{K_+} \mathrm{d}\alpha = 0$.

Ce théorème de Stokes est admis. Faisons cependant quelques remarques qui le justifient dans quelques cas particuliers.

a) *Cas particulier étudié en* 2°. — Soit $([a, b], f)$ un représentant de l'un des arcs compacts qui constituent le bord orienté ∂C_+ (dans $O + \mathbb{R}\mathbf{i} + \mathbb{R}\mathbf{j}$); $([a, b], F \circ f)$ est un représentant de l'arc correspondant au bord orienté ∂K_+. Ainsi, en opérant sur chacun de ces arcs :

$$\int_{\partial K_+} \alpha = \int_{F(\partial C_+)} \alpha = \int_{\partial C_+} F^*(\alpha)$$

D'autre part, pour déterminer $\int_{K_+} \mathrm{d}\alpha$, nous formons $F^*(\mathrm{d}\alpha)$, et nous savons (d'après le choix de l'orientation de $\mathscr{S}_+$) que, si $F^*(\mathrm{d}\alpha) = g\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, avec $g : C \to \mathbb{R}$, alors :

$$\int_{K_+} \mathrm{d}\alpha = \iint_C g(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Comme $F^*(\mathrm{d}\alpha) = \mathrm{d}(F^*(\alpha))$, comme $O + \mathbb{R}\mathbf{i} + \mathbb{R}\mathbf{j}$ a été identifié à $\mathbb{R}^2$, le théorème résulte du théorème de Green Riemann appliqué au compact C, de bord orienté ∂C_+ et à la forme de degré un $F^*(\alpha)$.

b) Cas particulier d'un compact « sans bord », par exemple une sphère. — La formule est rendue vraisemblable par le fait que l'on peut décomposer cette sphère en huit triangles sphériques dont chacun d'eux est un compact à bord d'un support de nappe plongée du type étudié en 2° et l'on constate, en appliquant le théorème de Stockes à chacun de ces triangles, que les intégrales curvilignes le long des bords se détruisent deux à deux, car chacun d'eux est parcouru deux fois, en sens opposés.

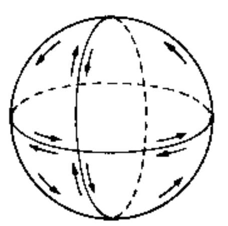


FIG. 69.

5.5.3. Formulation générale des théorèmes de Green-Riemann, Ostrogradski et Stokes

Le lecteur a noté que les trois théorèmes ont des hypothèses similaires (liaison entre une « partie » et son « bord ») et des énoncés similaires, la formation la plus concise étant celle du théorème de Stokes dans laquelle n'intervient que le compact K de la surface orientée $\mathscr{S}_+$, le bord orienté de ce compact ∂K_+, la forme α et sa différentielle extérieure $\mathrm{d}\alpha$. Pour donner un énoncé similaire dans le cadre de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$) pour le théorème d'Ostrogradski (resp. de Green-Riemann), et plus généralement dans le cadre d'un espace affine de dimension 3 (resp. 2) **muni d'une base** $(O ; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ qui permet de l'identifier à $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$), il convient de remplacer les intégrales multiples sur des parties de $\mathbb{R}^3$ (resp. de $\mathbb{R}^2$) par des intégrales de formes différentielles. D'un point de vue général, dans le cadre de la théorie des variétés qu'il est hors de question d'aborder ici, il est possible de définir l'intégrale d'une forme différentielle de degré p sur un morceau de variété de dimension p, orientée, ceci dans un espace affine de dimension n (avec $1 \leqslant p \leqslant n$). Ici dans le cadre de $\mathbb{R}^3$, nous savons déjà que les formes différentielles de degré 3 continues sur une partie X de $\mathbb{R}^3$ constituent un

module de dimension 1 sur l'anneau des applications continues de X dans $\mathbb{R}$, toute forme α s'écrivant de manière canonique :

$$\alpha = f\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \qquad \text{avec} \qquad f : X \to \mathbb{R} \text{ continue}$$

Par définition si X est une partie cubable de $\mathbb{R}^3$ nous pouvons alors poser :

$$\int_X \alpha = \iiint_X f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Ceci d'un point de vue mnémotechnique consiste à remplacer dans la notation intégrale triple $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ par $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ et à procéder comme pour une intégrale triple ; le danger de la notation $\iiint_X f\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ est que cette expression **dépend de l'orientation de l'espace** $\mathbb{R}^3$ (ce qui est cohérent avec la théorie dans le cas des courbes et des surfaces) ; de manière précise si

$$(u, v, w) \longmapsto (x(u, v, w), y(u, v, w),\ z(u, v, w)) \qquad \text{avec} \qquad (u, v, w) \in Y,$$

est une nouvelles paramétrisation de X, sous réserve de vérifications des hypothèses du théorème de changement de variables dans les intégrales multiples, la forme différentielle de degré 3, $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ dans ce changement de paramètre devient

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}w$$

et nous serions conduit au calcul de :

$$\iiint_Y f(x(u, v, w),\ y(u, v, w),\ z(u, v, w))\cdot\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}(u, v, w)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

qui n'est :

$$\iiint_X f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

que lorsque le jacobien est strictement positif.

Se limitant alors à des changements de variable à jacobien positif, on constate qu'avec cette convention l'écriture :

$$\int_{K_+} \mathrm{d}\alpha = \int_{\partial K_+} \alpha$$

rassemble aussi bien le théorème de Stokes que celui de Green-Riemann et d'Ostrogradski, étant entendu que dans le cadre de $\mathbb{R}^3$ ou de $\mathbb{R}^2$, pour une forme de degré 3 ou 2, K_+ désigne K, considéré comme un compact à bord de la sous-variété $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$, orientée par le paramétrage qui est ici l'identité, et donc orientée par l'orientation canonique de $\mathbb{R}^3$ ou de $\mathbb{R}^2$ (ce qui nous a permis d'orienter de manière cohérente ∂K_+).

5.6. ANALYSE VECTORIELLE

5.6.*1*. Quelques isomorphismes

E est un espace vectoriel euclidien (II.**2**.1.*3*). *Dans la plupart des questions E est de dimension* 3.

1° Rappelons tout d'abord quelques résultats vus en II.**2**.1.*3*, 2° auxquels le lecteur est prié de se référer.

Théorème. — **Si E est un espace euclidien l'application $\mathbf{x} \longmapsto (.\,|\,\mathbf{x})$ de E dans E^* est un isomorphisme.**

Cet isomorphisme est canonique en ce sens qu'aucune base de E n'intervient dans sa définition.

Si nous supposons E muni d'une base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ et si E^* est muni de la base duale $\mathbf{e}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$, pour tout élément $\mathbf{x}^*$ de E^* qui se décompose sous la forme :

$$\mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*, \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$\mathbf{x}^*$ est l'image par l'isomorphisme précédent du vecteur $\mathbf{x}$ de E, de composantes covariantes $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ dans $\mathbf{e}$ (à savoir pour tout i, $\alpha_i = (e_i|\mathbf{x})$). En particulier si $\mathbf{e}$ est orthonormale on a aussi :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Remarque. — Si E est muni de la norme euclidienne, et si E^* est normé canoniquement (III.**3**.2.*1*, 3°), cet isomorphisme est une isométrie.

2° On suppose ici E de dimension 3 et orienté. Pour tout $\mathbf{x} \in E$, on dispose de l'application $\omega_{\mathbf{x}}$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, $(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \longmapsto [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$ ($[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$ est le produit mixte de la famille $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, II.**2**.4.*1*) ; $\omega_{\mathbf{x}}$ est manifestement une forme bilinéaire alternée sur E. On a alors :

Théorème. — **L'application $\mathbf{x} \longmapsto \omega_{\mathbf{x}}$ de E dans l'espace $\mathscr{A}_2(E)$ des formes bilinéaires alternées sur E est un isomorphisme.**

Il est tout d'abord évident que cette application est linéaire.

D'autre part pour $\mathbf{x} \in E \backslash \{0\}$, on peut trouver $(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in E^2$ tel que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ soit une base de E, donc tel que $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] \neq 0$. Il en résulte que $\mathbf{x} \longmapsto \omega_{\mathbf{x}}$ est injective.

Enfin E a pour dimension 3, ainsi que $\mathscr{A}_2(E)$ (I.**10**.*4*, 3°). □

Comme au 1°, cet isomorphisme est canonique en ce sens qu'aucune base de E n'intervient dans sa définition ; par contre il dépend de l'orientation de E, et il est changé en son opposé si l'on change l'orientation de E. Si nous supposons E muni d'une base orthonormale positive, $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, nous disposons de la base de $\mathscr{A}_2(E)$, $(\mathbf{j}^* \wedge \mathbf{k}^*, \mathbf{k}^* \wedge \mathbf{i}^*, \mathbf{i}^* \wedge \mathbf{j}^*)$; pour tout élément ω de $\mathscr{A}_2(E)$, se décomposant sous la forme :

$$\omega = \alpha \mathbf{j}^* \wedge \mathbf{k}^* + \beta \mathbf{k}^* \wedge \mathbf{i}^* + \gamma \mathbf{i}^* \wedge \mathbf{j}^*, \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3,$$

ω est l'image par l'isomorphisme qui précède du vecteur $\mathbf{x}$ de E admettant pour décomposition :

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k}$$

En effet :

$$\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{j}, \mathbf{k}) = [\mathbf{x}, \mathbf{j}, \mathbf{k}] = \alpha = \omega(\mathbf{j}, \mathbf{k})$$

et de même :

$$\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{k}, \mathbf{i}) = \omega(\mathbf{k}, \mathbf{i}), \qquad \omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \omega(\mathbf{i}, \mathbf{j}).$$ □

REMARQUES. — *a*) Si E est muni de la norme euclidienne et si $\mathscr{A}_2(E)$ est normé canoniquement (III.3.1.*3*, 2°), cet isomorphisme est une isométrie.

b) Soit $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ une base orthonormale positive de E. Nous disposons des formes linéaires $\mathbf{j}^*$ et $\mathbf{k}^*$ associées canoniquement aux vecteurs $\mathbf{j}$ et $\mathbf{k}$ de E et nous disposons donc de la forme bilinéaire alternée $\mathbf{j}^* \wedge \mathbf{k}^*$ (ici $\wedge$ désigne le produit extérieur). En reprenant le calcul précédent avec $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$, on constate que $\mathbf{j}^* \wedge \mathbf{k}^*$ est associée canoniquement à $\mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}$ (ici $\wedge$ est le produit vectoriel) ; à l'aide des formules analogues pour $\mathbf{k}^* \wedge \mathbf{i}^*$ et $\mathbf{i}^* \wedge \mathbf{j}^*$ et, par bilinéarité, on en déduit que si $\mathbf{x}^*$ est associée à $\mathbf{x}$, si $\mathbf{y}^*$ est associée à $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{y}^*$ est associée à $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$.

3° On suppose encore ici E de dimension 3 est orienté. Nous disposons alors sur E de la forme trilinéaire alternée δ, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \longmapsto [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$. Comme δ n'est pas la forme nulle, elle constitue une base de $\mathscr{A}_3(E)$, espace des formes trilinéaires alternées sur E. On dispose alors trivialement de :

THÉORÈME. — **L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{A}_3(E)$, $\alpha \longmapsto \alpha\delta$ est un isomorphisme.**

Cet isomorphisme est encore ici canonique ; par contre il dépend de l'orientation de E et est changé en son opposé si l'on change celle-ci. Si E est muni d'une base orthonormale positive $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ nous disposons de la base $\mathbf{i}^* \wedge \mathbf{j}^* \wedge \mathbf{k}^*$ de $\mathscr{A}_3(E)$ et comme $\delta(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = 1$ et $(\mathbf{i}^* \wedge \mathbf{j}^* \wedge \mathbf{k}^*)(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = 1$, on a : $\delta = \mathbf{i}^* \wedge \mathbf{j}^* \wedge \mathbf{k}^*$. Ainsi, si l'élément $\omega \in \mathscr{A}_3(E)$ se décompose sous la forme $\omega = \alpha \mathbf{i}^* \wedge \mathbf{j}^* \wedge \mathbf{k}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$, cet élément est l'image de α par l'isomorphisme qui précède.

REMARQUE. — Si E est muni de la norme euclidienne et si $\mathscr{A}_3(E)$ est normé canoniquement $\|\delta\| = 1$, et cet isomorphisme est une isométrie.

5.6.2. Champ de scalaires, champ de vecteurs

1° Ici provisoirement $(\mathscr{E}, E)$ est un $\mathbb{R}$-espace affine.

DÉFINITION I. — **On appelle** *champ de scalaires* **sur** $\mathscr{E}$ **toute fonction** f **de** $\mathscr{E}$ **vers** $\mathbb{R}$; $\mathrm{Def}(f)$ **est l'ensemble de définition du champ de scalaires** f.

DÉFINITION II. — **On appelle** *champ de vecteurs* **sur** $\mathscr{E}$ **toute fonction** F **de** $\mathscr{E}$ **vers** E; $\mathrm{Def}(F)$ **est l'ensemble de définition du champ de vecteurs** F.

Une étude sommaire des champs de vecteurs sur $\mathscr{E}$ a été faite en II.**8**.1.*1*, avec l'étude plus particulière des champs équiprojectifs.

Rappelons quelques résultats :

- L'ensemble des champs de scalaires (resp. de vecteurs) définis sur une partie donnée U de $\mathscr{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel : il s'agit de $\mathbb{R}^U$, (resp. E^U).
- U étant une partie donnée de $\mathscr{E}$, si pour $\varphi \in \mathbb{R}^U$ et pour $f \in \mathbb{R}^U$ (resp. $F \in E^U$) nous définissons $\varphi . f$ (resp. $\varphi . F$) par

$$(\varphi . f)(m) = \varphi(m) . f(m) \quad (\text{resp. } (\varphi . F)(m) = \varphi(m) F(m)),$$

l'ensemble des champs de scalaires (resp. de vecteurs) définis sur U a une structure d'algèbre commutative (resp. de $\mathbb{R}^U$ module).

- Si E est un e.v.n., et en particulier lorsque E est euclidien, nous pouvons parler de continuité, différentiabilité... d'un champ de scalaires (resp. de vecteurs).

2° ***Quelques identifications.*** — Ici $(\mathscr{E}, E)$ est un espace affine euclidien. Comme dans **5**.6.*1*, il sera le plus souvent de dimension 3. Nous utiliserons les résultats et les notations de **5**.1.

a) ***Cas des champs de scalaires.*** — D'après **5**.6.*1*, 3°, nous savons que si E est de dimension 3 et est orienté, nous disposons d'un isomorphisme canonique θ_3 de $\mathbb{R}$ sur $\mathscr{A}_3(E)$; comme en outre, dans le cas E quelconque, nous avons posé $\mathscr{A}_0(E) = \mathbb{R}$, nous disposons aussi de l'identité, notée ici θ_0, de $\mathbb{R}$ sur $\mathscr{A}_0(E)$. Prenant alors un champ de scalaires f défini sur une partie U de $\mathscr{E}$, **dans les conditions qui précèdent,** nous pouvons lui associer la forme différentielle ω de degré 0 ou de degré 3, définie sur U par :

$$m \longmapsto \omega(m) = \theta_i(f(m)).$$

Nous obtenons ainsi une application Θ_i de $\mathbb{R}^U$ dans $(\mathscr{A}_i(E))^U$, $i = 0$ ou $i = 3$. Cette application Θ_i est trivialement un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels; elle vérifie en outre :

$$\forall \varphi \in \mathbb{R}^U \qquad \forall f \in \mathbb{R}^U \qquad \Theta_i(\varphi . f) = \varphi . \Theta_i(f)$$

D'autre part comme pour $i = 0$ ou $i = 3$, θ_i est linéaire, comme les espaces sont de dimensions finies, θ_i est de classe C^∞; donc f et $\Theta_i(f)$ ont les mêmes propriétés de continuité, différentiabilité...

Par un abus de langage classique, nous dirons que nous pouvons identifier (et ici il ne s'agit même pas d'une identification) les champs de scalaires sur $\mathscr{E}$ et les formes différentielles de degré 0, que si E est de dimension 3 et orienté nous pouvons identifier les champs des scalaires sur $\mathscr{E}$ et les formes différentielles de degré 3.

En pratique, en ce qui concerne cette dernière identification, si $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est une base orthonormale positive de E, à $f \in \mathbb{R}^U$ est associée

$$\Theta_3(f) = f \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

b) ***Cas des champs de vecteurs.*** — Utilisant **5.6.*1***, 1° dans l'hypothèse où E est de dimension n quelconque, nous disposons d'un isomorphisme canonique θ_1 de E sur $E^* = \mathscr{A}_1(E)$; d'après **5.6.*1***, 2° lorsque E est de dimension trois et est orienté, nous disposons d'un isomorphisme canonique θ_2 de E sur $\mathscr{A}_2(E)$. Prenant alors un champ de vecteurs F défini sur une partie U de $\mathscr{E}$, **dans les conditions qui précèdent,** nous pouvons lui associer la forme différentielle ω de degré 1 ou de degré 2, définie sur U par

$$m \longmapsto \omega(m) = \theta_i(F(m)), \qquad i = 1 \quad \text{ou} \quad i = 2 ;$$

nous obtenons ainsi une application Θ_i de E^U dans $(\mathscr{A}_i(E))^U$.

Cette application Θ_i est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et elle vérifie en outre :

$$\forall \varphi \in \mathbb{R}^U \qquad \forall F \in E^U \qquad \Theta_i(\varphi . F) = \varphi . \Theta_i(F)$$

Comme ici encore θ_i est linéaire et comme les espaces sont de dimensions finies, θ_i est de classe C^∞, donc F et $\Theta_i(F)$ ont les mêmes propriétés de continuité, différentiabilité...

Par un abus de langage classique nous dirons que, dans l'hypothèse E de dimension n quelconque, nous pouvons identifier champs de vecteurs sur $\mathscr{E}$ et formes différentielles de degré un, dans l'hypothèse E de dimension 3 et orienté, nous pouvons identifier champs de vecteurs sur $\mathscr{E}$ et formes différentielles de degré deux. En pratique, en ce qui concerne la première identification, si $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E, au champ de vecteurs

$$F : U \to E, \qquad m \longmapsto F(m) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(m) e_i$$

est associée la forme différentielle de degré un,

$$\Theta_1(F) : \quad U \to \mathscr{A}_1(E), \qquad m \longmapsto \Theta_1(F)(m) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(m) \, \mathrm{d}x_i.$$

En ce qui concerne la seconde identification, si $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est une base orthonormale positive de E, au champ de vecteurs

$$F : U \to E, \qquad m \longmapsto F(m) = P(m)\mathbf{i} + Q(m)\mathbf{j} + R(m)\mathbf{k}$$

est associé la forme différentielle de degré deux,

$$\Theta_2(F): \quad U \to \mathscr{A}_2(E),$$
$$m \longmapsto \Theta_2(F)(m) = P(m)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q(m)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R(m)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

REMARQUE. — Toutes les identifications qui précèdent sont canoniques en ce sens qu'elles ne dépendent pas du choix d'une base de E.

3° ***Surfaces de niveau, lignes de champ.*** — Ici $\mathscr{E}$ est de dimension 3.

a) ***Surfaces de niveau.*** DÉFINITION. — **Soit $f: U \to \mathbb{R}$ un champ de scalaires défini sur une partie U de $\mathscr{E}$. A tout $\lambda \in f(U)$, on associe :**

$$\mathscr{S}_\lambda = \{m \in U \mid f(m) = \lambda\}$$

On dit que $\mathscr{S}_\lambda$ est une *surface de niveau* **(ou équipotentielle) de f.**

Notons que la condition $\lambda \in f(U)$ assure que $\mathscr{S}_\lambda$ est non vide, que d'autre part, par $m \in U$ donné, passe l'unique surface de niveau $\mathscr{S}_{f(m)}$. Enfin la terminologie est justifiée par le fait que, lorsque U est ouvert et f de classe C^k, si a est un point de $\mathscr{S}_\lambda$ tel que $\mathrm{d}f(a) \neq 0$, alors $\mathscr{S}_\lambda$ est une surface au voisinage de a (corollaire du **3**.3.*1*, 3°).

b) ***Lignes de champ.*** — DÉFINITION. — **Soient U une partie de $\mathscr{E}$ et $F: U \to E$ un champ de vecteurs défini sur U et ne prenant pas la valeur 0. On appelle** *ligne de champ* **de F tout C^1-arc géométrique Γ à support inclus dans U, tel que, pour un représentant (I, f) de Γ on ait :**

$$\forall t \in I \qquad f'(t) = F(f(t))$$

Géométriquement, il s'agit d'un arc Γ à support inclus dans U, tel qu'en tout $m \in \Gamma$ en lequel $F(m) \neq 0$, la tangente soit la droite $m + \mathbb{R}F(m)$.

5.6.3. Gradient

($\mathscr{E}$, E) est un espace affine euclidien de dimension finie n, pas nécessairement orienté.

1° DÉFINITION I. — **Soient U un ouvert de $\mathscr{E}$, et $f: U \to \mathbb{R}$ une application. Si f est différentiable au point $m \in U$, on appelle** *gradient de f au point m,* **et on note grad $f(m)$, l'unique vecteur de E vérifiant :**

$$\forall \mathbf{x} \in E \qquad \mathrm{d}f(m).\mathbf{x} = (\mathbf{x} \mid \operatorname{grad} f(m)).$$

L'existence et l'unicité de ce vecteur résultent de : $\mathrm{d}f(m) \in E^*$ (**5**.6.*1*, 1°).

DÉFINITION II. — **Soient U un ouvert de $\mathscr{E}$, et $f: U \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Le champ de vecteurs défini sur U par $m \longmapsto \operatorname{grad} f(m)$ est appelé** *gradient de f* **et noté grad f.**

On notera qu'à f est alors associée une forme différentielle ω_f de degré 0, différentiable sur U, et que grad f est le champ de vecteurs canoniquement associé à $d\omega_f$.

Propriétés. *— Soit U un ouvert de $\mathscr{E}$.*

a) Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^k, $k \geqslant 1$, alors grad *f est de classe C^{k-1} sur U.*

b) Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^U$ constituée des $f : U \to \mathbb{R}$ différentiables au point $m \in U$ [resp. *sur U*] *en est un sous-espace vectoriel, et l'application $f \longmapsto$* grad $f(m)$ [resp. $f \longmapsto$ grad f] *de cet espace dans E* (resp. E^U) *est linéaire.*

c) Si f_1 et f_2 sont des applications $U \to \mathbb{R}$, différentiables au point $m \in U$ [resp. *sur U*], *alors $f_1 f_2$ est différentiable en m* [resp. sur U) et :

$$\operatorname{grad}(f_1 f_2)(m) = f_2(m).\operatorname{grad} f_1(m) + f_1(m).\operatorname{grad} f_2(m)$$
$$[\text{resp. } \operatorname{grad} f_1 f_2 = f_2.\operatorname{grad} f_1 + f_1.\operatorname{grad} f_2]$$

d) Soient les applications $f : U \to \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$, où I est intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $f(U)$; si f est différentiable au point $m \in U$ [resp. *sur U*] *et si φ est dérivable en $f(m)$* [resp. *sur I*], *alors $\varphi \circ f$ est différentiable en m* [resp. *sur U*] *et :*

$$\operatorname{grad}(\varphi \circ f)(m) = \varphi'(f(m)).\operatorname{grad} f(m)$$
$$[\text{resp. } \operatorname{grad}(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f).\operatorname{grad} f]$$

e) Si l'ouvert U de $\mathscr{E}$ est connexe, alors pour toute application $f : U \to \mathbb{R}$ les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) *f est constante;*

ii) *f est différentiable et* grad *f est l'élément nul de E^U.*

Il s'agit de conséquences immédiates des propriétés mises en évidence en III.**8** et des propriétés de l'application $\mathbf{x} \longmapsto (.\,|\mathbf{x})$. □

2° ***Liaison avec les surfaces de niveau.*** — On suppose ici $\dim \mathscr{E} = 3$.

PROPOSITION. — **Soient U un ouvert de $\mathscr{E}$ et $f : U \to \mathscr{E}$ un champ de scalaires de classe C^1. Alors pour tout $m \in U$ tel que grad $f(m) \neq 0$, la surface de niveau contenant m, $\mathscr{S}_{f(m)}$, est une surface au voisinage de m, et grad $f(m)$ est normal à cette surface en ce point.**

Résultat déjà obtenu au **3**.3.*2*, 3°. □

CONSÉQUENCE. — **Si $f : U \to \mathscr{E}$ est un champ de scalaires de classe C^1 défini sur un ouvert U et si grad f ne prend pas la valeur 0, alors les surfaces de niveau du champ f sont des surfaces au sens des sous-variétés, et, pour tout $m \in U$, grad $f(m)$ dirige la normale en m à la surface de niveau qui contient m.**

3° ***Expression du gradient dans une base orthonormale.*** — On rapporte $\mathscr{E}$ à un repère *orthonormal* $(O\,;\mathbf{e})$. On dispose ainsi de $\varpi = \operatorname{Diff}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathscr{E})$ défini par $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto O + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Soient U un ouvert de $\mathscr{E}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application. On dispose de :

$$f \circ \varpi : \quad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f\left(O + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)$$

qui est une application de l'ouvert $\varpi^{-1}(U)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $m = O + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un point de U en lequel f est différentiable; alors $f \circ \varpi$ est différentiable au point $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\varpi^{-1}(U)$ et, pour tout $(h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(m).\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right) &= \mathrm{d}(f \circ \varpi)(x_1, \ldots, x_n).(h_1, \ldots, h_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \varpi)}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) h_i \end{aligned}$$

On en déduit que $\left(\dfrac{\partial(f \circ \varpi)}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)\right)$ est la famille des coordonnées covariantes de grad $f(m)$ dans la base $\mathbf{e}$; celle-ci étant orthonormale, il s'agit de coordonnées contravariantes, et on a ainsi :

$$\operatorname{grad} f\left(O + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \varpi)}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) e_i \qquad (1)$$

Dans la pratique, on s'autorise du difféomorphisme ϖ pour « identifier » $\mathscr{E}$ et $\mathbb{R}^n$, U et $\varpi^{-1}(U)$, f et $f \circ \varpi$. On écrit donc $f(x_1, \ldots, x_n)$ pour $f\left(O + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)$, et f pour $f \circ \varpi$ au second membre de (1).

Exemple. — En physique, l'espace $\mathscr{E}$ étant un espace affine euclidien de dimension 3, rapporté à un repère orthonormal $(O ; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, on considère souvent des champs de scalaires f de la forme :

$$(x, y, z) \longmapsto \varphi((x^2 + y^2 + z^2)^{1/2})$$

où $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est une application, I étant un intervalle de $\mathbb{R}_+$ (il s'agit de champs qui ne dépendent que de la distance r du point m au point fixe O).

Lorsque I est ouvert, f est défini sur l'ouvert de $\mathscr{E}$ constitué par les points m de coordonnées (x, y, z) tels que $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ appartienne à I ; si en outre φ est dérivable, alors f est différentiable sur U et :

$$\forall m \in U \qquad \operatorname{grad} f(m) = \frac{\varphi'(r)}{r} \overrightarrow{Om}$$

4° ***Potentiel scalaire.*** — Définition. — **Soient U un ouvert de $\mathscr{E}$, et $F : U \to E$ un champ de vecteurs. On dit que F *dérive d'un potentiel scalaire* sur U si, et seulement s'il existe une application différentiable $f : U \to \mathbb{R}$ telle que $F = \operatorname{grad} f$.**

On dit alors que F dérive du potentiel scalaire f.

REMARQUES. — *a*) Cette définition équivaut au fait que la forme différentielle ω_F, de degré un, canoniquement associée à F, est exacte et que $\omega_F = \mathrm{d}f$.

b) D'un point de vue algébrique, dans $\mathbb{R}^U$ nous disposons de l'espace vectoriel $\mathscr{D}$ des applications de U dans $\mathbb{R}$, différentiables sur U ; comme l'application de $\mathscr{D}$ dans E^U, $f \longmapsto \operatorname{grad} f$ est linéaire, dans E^U, nous disposons de l'image de $\mathscr{D}$ par cette application, qui est un sous-espace de E^U appelé espace des champs de gradients définis sur U ; F dérive d'un potentiel scalaire si, et seulement si F appartient à cet espace. L'étude qui suit, caractérise, sous certaines conditions, noyau et image de l'application $f \longmapsto \operatorname{grad} f$.

PROPOSITION. — **Si U est connexe et si $F : U \to E$ dérive du potentiel scalaire f, alors les potentiels scalaires dont F dérive sont les $g = f + \alpha$, où α désigne une application constante de U dans $\mathbb{R}$.**

Simple conséquence de la propriété *e*) du 1°. □

• Supposons maintenant que $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère *orthonormal* $(O\,;\mathbf{e})$ et notons :

$$F\left(O + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x_1, \ldots, x_n) e_i$$

Démontrons, dans ces conditions :

THÉORÈME. — **Soit $F : U \to E$ une application de classe C^1.**

i) si F dérive d'un potentiel scalaire sur U, on a :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2 \qquad \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$$

ii) si U est un ouvert étoilé par rapport à l'un de ses points et si :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2 \qquad \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$$

alors F dérive d'un potentiel scalaire f sur U ; f est de classe C^2.

Comme la base $\mathbf{e}$ est orthonormale, le problème est ainsi de savoir dans quelles conditions la forme différentielle de degré un :

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \, \mathrm{d}x_i$$

est une différentielle exacte. Il s'agit d'un cas particulier du théorème de Poincaré, traité en IV.**4.3**.*1*, 3° ; le lecteur s'y reportera. □

5.6.4. Divergence

$(\mathscr{E}, E)$ est un espace affine (pas nécessairement euclidien) de dimension finie n.

1° DÉFINITION. — **Soient U un ouvert de $\mathscr{E}$, et $F : U \to E$ une application. Si F est différentiable au point $m \in U$, on appelle** *divergence de F au point m*, **et on note** div $F(m)$, **la trace** (¹) **de l'endomorphisme** d$F(m)$ **de E.**

Si F est différentiable sur U, l'application $m \longmapsto$ div $F(m)$ de U dans $\mathbb{R}$ est appelée divergence de F et notée div F.

Propriétés. — *Soit U un ouvert de $\mathscr{E}$.*

a) Si $F : U \to E$ est de classe C^k, $k \geqslant 1$, alors div F est de classe C^{k-1}.

b) Le sous-ensemble de E^U constitué des $F : U \to E$ différentiables au point $m \in U$ [resp. *sur U*] *en est un sous-espace vectoriel, et l'application $F \longmapsto$* div $F(m)$ [resp. $F \longmapsto$ div F] *de cet espace dans $\mathbb{R}$* (resp. $\mathbb{R}^U$) *est linéaire.*

c) Soient les applications $\varphi : U \to \mathbb{R}$ et *$F : U \to E$ différentiables au point $m \in U$, alors $\varphi . F$ est différentiable en m, et (si $\mathscr{E}$ est euclidien) :*

$$\operatorname{div}(\varphi . F)(m) = \varphi(m) . \operatorname{div} F(m) + (\operatorname{grad} \varphi(m) \mid F(m))$$

La justification de *a*) et *b*) est évidente. En ce qui concerne *c*) le lecteur pourra faire une démonstration directe. Plus simplement, il pourra anticiper sur le calcul qui suit et écrire :

$$\operatorname{div}(\varphi . F)(m) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi(x_1, \ldots, x_n) . P_i(x_1, \ldots, x_n))$$

(en utilisant ici un repère orthonormal).

2° ***Expression de la divergence.*** — $\mathscr{E}$ n'est pas nécessairement euclidien ; $(O ; \mathbf{e})$ est un repère *quelconque* de $\mathscr{E}$.

Soient U un ouvert de $\mathscr{E}$, et $F : U \to E$ une application. On note :

$$F\left(O + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x_1, \ldots, x_n) e_i.$$

Soit $m = O + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un point de U en lequel F est différentiable ; au point $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on dispose des dérivées partielles $\dfrac{\partial P_i}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n)$, $(i, j) \in (\mathbb{N}_n)^2$. On déduit de III.8.1.7, 1° que, E et $\mathbb{R}^n$ étant respectivement

(¹) La trace d'un endomorphisme a été définie au I.12.2.*1*, 3°.

rapportés à e et à la base canonique, la matrice représentative de $dF(m) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$ est :

$$\left[\frac{\partial P_i}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n)\right]_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2}$$

La trace de cette matrice étant celle de $dF(m)$, on a :

$$\operatorname{div} F\left(O + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n).$$

Remarque. — Ici $(\mathscr{E}, E)$ est affine euclidien orienté, de dimension 3. Soit $F : U \to E$ un champ de vecteurs différentiable sur l'ouvert U de $\mathscr{E}$; à F est canoniquement associée une forme différentielle de degré 2, ω_F, différentiable sur U ; on dispose ainsi de $d\omega_F$, forme différentielle de degré 3 définie sur U. Le lecteur vérifiera que le champ de scalaires auquel $d\omega_F$ est canoniquement associé n'est autre que div F.

Exemple. — En physique, on considère souvent un espace affine euclidien $(\mathscr{E}, E)$ de dimension 3, rapporté à un repère orthonormal $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ et des champs de vecteurs F de la forme

$m = O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \longmapsto \varphi((x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}).\overrightarrow{Om}$ où φ est une application d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

Notant r la distance $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ de m au point fixe O, on constate que, lorsque I est ouvert, F est un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de $\mathscr{E}$; si en outre φ est dérivable, F est différentiable ; comme F s'écrit aussi :

$$m \longmapsto \varphi(r)x\mathbf{i} + \varphi(r)y\mathbf{j} + \varphi(r)z\mathbf{k}$$

on a :

$$\operatorname{div} F(m) = r\varphi'(r) + 3\varphi(r).$$

Comme I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}_+$, $r > 0$ et les seuls champs à divergence nulle sont ceux pour lesquels $\varphi(r) = \frac{\alpha}{r^3}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ce sont les *champs newtoniens*.

3° ***Laplacien.*** — Définition. — **Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine euclidien, U un ouvert de $\mathscr{E}$, et $f : U \to \mathbb{R}$ une application deux fois différentiable. On appelle** *laplacien* **de f, et on note Δf, l'application $m \longmapsto \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)(m)$ de U dans $\mathbb{R}$. Lorsque cette application Δf est nulle, on dit que l'application f est** *harmonique.*

Soit $(O; \mathbf{e})$ un repère orthonormal de $\mathscr{E}$. On a vu au **5.6.3**, 3° que (moyennant une identification) grad f est le champ de vecteurs :

$$O + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n).e_i$$

Il résulte du 2° que :

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

5.6.5. Rotationnel

$(\mathscr{E}, E)$ est un espace affine euclidien de dimension 3, orienté

1° Soient U un ouvert de $\mathscr{E}$, $F : U \to E$ un champ de vecteurs défini sur U, différentiable sur U ; à F est associée une forme différentielle ω_F de degré un, définie sur U, différentiable sur U. On dispose ainsi de $d\omega_F$, forme différentielle de degré 2 définie sur U. Dans ces conditions, on pose :

DÉFINITION. — **Le champ de vecteurs défini sur** U**, associé canoniquement à la forme différentielle de degré deux** $d\omega_F$, (**5.6.***2*, 2°, *b*) **est appelé** *rotationnel* **du champ** F **et est noté** $\text{rot}\, F$.

Le lecteur notera que ce champ est canoniquement associé à F, en ce sens qu'aucune base de E n'intervient dans sa définition. Par contre il dépend de l'orientation de $\mathscr{E}$ et est changé en le champ opposé si l'on change cette orientation.

REMARQUE. — En supposant F seulement différentiable en un point m de U, et en prolongeant de manière évidente la définition de la différentielle extérieure de ω_F en le point m exclusivement (alors qu'elle était définie globalement sur U en **5.1.***1*, 5°), on pourrait introduire par la même définition la notion de rotationnel de F au point $m \in U$.

Propriétés. — *U est un ouvert de $\mathscr{E}$.*

a) Si $F : U \to E$ est de classe C^k, $k \geqslant 1$, alors $\text{rot}\, F : U \to E$ *est de classe C^{k-1}.*

b) Le sous-ensemble de E^U constitué des $F : U \to E$ différentiables sur U en est un sous-espace vectoriel, et l'application $F \longmapsto$ $\text{rot}\, F$ *de cet espace dans E^U est linéaire.*

c) Soient $F : U \to E$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}$ deux applications différentiables alors $\varphi . F : U \to E$ est différentiable et l'on a :

$$\text{rot}\,(\varphi . F) = \varphi . \text{rot}\, F + (\text{grad}\, \varphi) \wedge F,$$

La propriété *a*) résulte de **5.6.***2*, 2° et de la classe de $d\omega_F$;

b) est trivial.

Quant à *c*), au champ $\varphi . F$ est associé la forme $\varphi . \omega_F$. D'après **5.1.***1*, 5° :

$$d(\varphi\omega_F) = \varphi . d\omega_F + d\varphi \wedge \omega_F$$

(attention : ici $\wedge$ est le produit extérieur des formes différentielles). Le résultat provient du fait qu'à $\varphi . d\omega_F$ est associé $\varphi . \text{rot}\, F$ et qu'à $d\varphi \wedge \omega_F$ est associé $(\text{grad}\, \varphi) \wedge F$ (utilisation pour chaque point $m \in U$ de **5.6.***1*, 2°, remarque *b*).

□

2° ***Expression du rotationnel dans une base orthonormale directe.*** Soit $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un repère orthonormal direct de $\mathscr{E}$; U étant un ouvert de $\mathscr{E}$ et $F : U \to E$ un champ de vecteurs défini sur U, différentiable sur U on note :

$$F(m) = P(m)\,\mathbf{i} + Q(m)\,\mathbf{j} + R(m)\,\mathbf{k}.$$

On identifie F à une application (notée F) d'un ouvert de $\mathbb{R}^3$ (noté U) dans E, et on fait de même pour P, Q, R. On a ainsi :

$$F(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

Comme $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est une base orthonormale de E, à ce champ de vecteurs F est canoniquement associée la forme :

$$\omega_F : (x, y, z) \longmapsto P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

P, Q et R sont différentiables sur U et $\mathrm{d}\omega_F$ est la forme différentielle de degré deux :

$$\begin{aligned}(x, y, z) \longmapsto \left(\frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z)\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ + \left(\frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z)\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\ + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z)\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\end{aligned}$$

Comme $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est orthonormale directe, $\mathrm{d}\omega_F$ est associée au champ de vecteurs, qui est par définition $\operatorname{rot} F$:

$$\begin{aligned}(x, y, z) \longmapsto \left(\frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z)\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z)\right)\mathbf{j} \\ + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z)\right)\mathbf{k} \quad (1)\end{aligned}$$

REMARQUES. — *a*) On pourrait définir $\operatorname{rot} F(m)$ directement par la formule (1) (ceci dans un repère orthonormal direct) mais il faudrait vérifier alors, ce que le lecteur peut faire en exercice, que ce vecteur $\operatorname{rot} F(m)$ ne dépend pas du choix de ce repère.

b) D'un point de vue mnémotechnique, le lecteur remarquera que (1) s'écrit aussi :

$$\operatorname{rot} F(m) = \mathbf{i} \wedge \frac{\partial F}{\partial x}(m) + \mathbf{j} \wedge \frac{\partial F}{\partial y}(m) + \mathbf{k} \wedge \frac{\partial F}{\partial z}(m).$$

3° ***Formules d'analyse vectorielle.*** — Les propriétés qui suivent complètent celles qui ont été vues en **5.6.3** 1°, **5.6.4** 1° et **5.6.5** 1°; U est un ouvert de $\mathscr{E}$.

PROPRIÉTÉ I. — **Si $f : U \to \mathbb{R}$ est deux fois différentiable, le champ de vecteurs défini sur U, $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)$, est le champ nul.**

En effet si $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est un repère orthonormal direct de $\mathscr{E}$ nous identifions f à une application deux fois différentiable d'un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, et nous avons

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Utilisant 2°, nous constatons que la propriété résulte du théorème de Schwarz (III.8.2.4). On peut la retrouver par $d(df) = 0$. □

PROPRIÉTÉ II. — **Si $F : U \to E$ est deux fois différentiable, le champ de scalaires défini sur U, $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F)$, est le champ nul.**

Démonstration analogue à celle de la propriété I. □

Autres formules. —

- *Si f et g de U dans $\mathbb{R}$ sont deux fois différentiables :*

$$\Delta(fg) = f \, . \, \Delta g + g \, . \, \Delta f + (\operatorname{grad} f | \operatorname{grad} g).$$

- *Si F et G de U dans E sont différentiables :*

$$\operatorname{div}(F \wedge G) = (G | \operatorname{rot} F) - (F | \operatorname{rot} G).$$

4° ***Potentiel vecteur.*** — DÉFINITION. — **Soient U un ouvert de E, et $G : U \to E$ un champ de vecteurs. On dit que** *G dérive d'un potentiel vecteur* **sur U si, et seulement s'il existe une application différentiable $F : U \to E$ telle que $G = \operatorname{rot} F$.**

On dit alors que G dérive du potentiel vecteur F.

D'un point de vue algébrique, dans E^U les applications différentiables sur U constituent un espace vectoriel $\mathscr{D}$; comme l'application de $\mathscr{D}$ dans E^U, $F \longmapsto \operatorname{rot} F$ est linéaire, dans E^U nous disposons de l'image de $\mathscr{D}$ par cette application, qui est un sous-espace de E^U appelé espace des champs de rotationnels définis sur U ; G dérive d'un potentiel vecteur si et seulement si G appartient à cet espace. L'étude qui suit caractérise, sous certaines conditions, noyau et image de l'application $F \longmapsto \operatorname{rot} F$.

PROPOSITION. — **Si U est un ouvert étoilé par rapport à l'un de ses points, et si $G : U \to E$ dérive du potentiel vecteur F de classe C^1, alors les potentiels vecteurs de classe C^1 dont G dérive sont les $H = F + \operatorname{grad} f$, où f désigne une application de classe C^2 de U dans $\mathbb{R}$.**

i) Soit $H : U \to E$, de classe C^1, tel que $\operatorname{rot} H = G$. Nécessairement $H - F : U \to E$ est de classe C^1, et $\operatorname{rot}(H - F) = 0$. Prenant un repère orthonormal direct $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de $\mathscr{E}$, avec les abus de langage déjà signalés, nous écrivons :

$$H - F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

avec P, Q, R de classe C^1 et vérifiant

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \wedge \left(\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}\right) \wedge \left(\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Appliquant le théorème du **5.6.3**, 4° on sait l'existence de $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $H - F = \operatorname{grad} f$. □

ii) Sans hypothèse sur U, on sait que si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, alors $F + \operatorname{grad} f$ est de classe C^1, et $\operatorname{rot}(F + \operatorname{grad} f) = \operatorname{rot} F$. □

THÉORÈME. — **Soit U un ouvert de $\mathscr{E}$, $G : U \to E$ un champ de vecteurs défini sur U.**

i) **Si G dérive d'un potentiel vecteur F, deux fois différentiable, alors :**

$$\operatorname{div} G = 0.$$

ii) **Si U est étoilé par rapport à l'un de ses points, si $G : U \to E$ est de classe C^1 et si $\operatorname{div} G = 0$, alors G dérive d'un potentiel vecteur F de classe C^2.**

i) est une conséquence de 3° propriété II. □

ii) Prenant un repère orthonormal direct de $\mathscr{E}$, $(O\,;\,\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, nous identifions $\mathscr{E}$ et $\mathbb{R}^3$ et nous disposons de l'application G, de classe C^1, d'un ouvert U de $\mathbb{R}^3$, dans E :

$$(x, y, z) \longmapsto G(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

A G nous pouvons associer la forme différentielle de degré deux, de classe C^1 sur U, définie par :

$$(x, y, z) \longmapsto \omega_G(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R(x, y, z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

L'hypothèse $\operatorname{div} G = 0$ équivaut à $\mathrm{d}\omega_G = 0$.

Ainsi ω_G est exacte sur U (Poincaré, **5.1.3**, 2°), ce qui équivaut à l'existence d'une forme différentielle θ, de degré un, de classe C^2 sur U telle que $\omega_G = \mathrm{d}\theta$; le champ de vecteurs F, canoniquement associé à θ est un potentiel vecteur de G, de classe C^2. □

5.6.6. Circulation, flux

1° ***Circulation.*** — $(\mathscr{E}, E)$ est un espace affine euclidien de dimension n quelconque. Soit $F : U \to E$ un champ de vecteurs défini et continu sur une partie U de $\mathscr{E}$; à ce champ est canoniquement associée une forme différentielle ω_F, de degré un, définie et continue sur U.

Soit Γ_+ un arc géométrique orienté de représentant (I, f) avec $I = [a, b]$, $a < b$, qui est de classe C^1 par morceaux et dont le support est contenu dans U. On dispose de $\int_{\Gamma_+} \omega_F$; on pose alors :

DÉFINITION. — $\int_{\Gamma_+} \omega_F$ **porte le nom de *circulation* (ou encore *travail*) du champ de vecteurs F le long de l'arc géométrique orienté Γ_+.**

Interprétation physique. – Quitte à fractionner Γ_+ en sous-arcs, nous pouvons supposer Γ_+ de classe C^1. Soit (I, f) avec $I = [a, b]$, $a < b$, un représentant de Γ_+.

Par définition :

$$\int_{\Gamma_+} \omega_F = \int_a^b \omega_F(f(t)) \,.\, f'(t)\,\mathrm{d}t$$

D'après **5.6.***1*, 1°, pour tout t de $[a, b]$, $\omega_F(f(t)) = (.\,|\,F(f(t)))$. Ainsi :

$$\int_{\Gamma_+} \omega_F = \int_a^b (F(f(t))\,|\,f'(t))\,\mathrm{d}t.$$

Physiquement, $(F(f(t))\,|\,f'(t))\,\mathrm{d}t$ est le produit scalaire en tout point de l'arc Γ_+, du vecteur champ par le déplacement élémentaire $f'(t)\,\mathrm{d}t$.

Calculs pratiques. – On prend une base orthonormale $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. On dispose alors de

$$F : U \to E \quad m \longmapsto F(m) = \sum_{i=1}^{n} P_i(m) e_i\,;$$

on sait alors que ω_F est la forme différentielle de degré un, définie sur U par $m \longmapsto \sum_{i=1}^{n} P_i(m)\,\mathrm{d}x_i$. On est ramené aux calculs de **5.2.***2*.

Cas des champs dérivant d'un potentiel scalaire (***ou encore cas des champs de gradients***). – Dire que $F : U \to E$ dérive du potentiel scalaire f équivaut à dire que ω_F, forme différentielle de degré un associée canoniquement à F, est exacte et de manière plus précise que $\omega_F = \mathrm{d}f$ (remarque de **5.6.***3*, 4°). Les propriétés relatives à la circulation d'un tel champ sont donc celles des intégrales curvilignes des formes exactes. On peut ainsi citer (**5.2.***1*, 5°) :

- *La circulation d'un champ dérivant d'un potentiel scalaire, le long d'un arc ne dépend que des extrémités de l'arc.*
- *La circulation d'un champ dérivant d'un potentiel scalaire le long d'un arc fermé est nulle.*
- *Si U est un ouvert connexe, la condition énoncée ci-dessus est suffisante pour qu'un champ, continu sur U, dérive d'un potentiel scalaire.*

2° ***Flux.*** – $(\mathscr{E}, E)$ est un espace affine euclidien orienté, de dimension 3. Soient U une partie de $\mathscr{E}$, et $F : U \to E$ un champ de vecteurs continu ; à F est canoniquement associée une forme différentielle ω_F, de degré 2, définie et continue sur U. On pose :

DÉFINITION. – **Soit $\mathscr{S}_+$ une surface décomposable orientée. Si les conditions d'existence du théorème du 5.4.***3*, **2° sont remplies, l'intégrale de ω_F sur $\mathscr{S}_+$, $\int_{\mathscr{S}_+} \omega_F$, est dite *flux* du champ de vecteurs F à travers $\mathscr{S}_+$.**

Comme toute intégrale de forme différentielle de degré 2, le flux dépend de l'orientation de la surface décomposable, mais ici en outre de celle de l'espace.

Interprétation physique. – En utilisant une décomposition de $\mathscr{S}_+$, on se ramène au cas d'une nappe géométrique plongée orientée σ_+, de représentant (Ω, Φ). Introduisant un repère orthonormal direct $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de $\mathscr{E}$, nous disposons :

– de $F : U \to E \quad F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ où P, Q, R sont des applications continues de U dans $\mathbb{R}$,

– de $\omega_F : U \to \mathscr{A}_2(E) \quad \omega_F = P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$,

– de $\Phi : \Omega \to \mathscr{E} \quad (u, v) \longmapsto O + X(u, v)\mathbf{i} + Y(u, v)\mathbf{j} + Z(u, v)\mathbf{k}$.

Utilisant **5**.4.*1*, 3°, il vient :

$$\int_{\mathscr{S}_+} \omega_F = \iint_\Omega \left\{(P \circ \Phi)\frac{D(Y, Z)}{D(u, v)} + (Q \circ \Phi)\frac{D(Z, X)}{D(u, v)} + (R \circ \Phi)\frac{D(X, Y)}{D(u, v)}\right\} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

La base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de E étant orthonormale, le terme entre crochets est le produit scalaire du vecteur :

$$(P \circ \Phi)\mathbf{i} + (Q \circ \Phi)\mathbf{j} + (R \circ \Phi)\mathbf{k},$$

qui est $F(m)$, où m désigne le point $\Phi(u, v)$ de $\mathscr{S}_+$, et du vecteur :

$$\frac{D(Y, Z)}{D(u, v)}\mathbf{i} + \frac{D(Z, X)}{D(u, v)}\mathbf{j} + \frac{D(X, Y)}{D(u, v)}\mathbf{k} = (\Phi'_u \wedge \Phi'_v)(u, v)$$

Introduisant $(\|\Phi'_u \wedge \Phi'_v\|^{-1}\, \Phi'_u \wedge \Phi'_v)(u, v)$, qui est le vecteur unitaire normal $\mathbf{n}(m)$ à $\mathscr{S}_+$ au point $m = \Phi(u, v)$ on peut écrire :

$$\int_{\mathscr{S}_+} \omega_F = \iint_\Omega (F(m)|\mathbf{n}(m))\,\mathrm{d}A \tag{1}$$

où $\mathrm{d}A$ désigne $\|\Phi'_u(u, v) \wedge \Phi'_v(u, v)\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, qui est l'aire élémentaire. Ainsi, physiquement, le flux est l'intégrale sur $\mathscr{S}_+$ du produit scalaire du vecteur champ $F(m)$ par « le vecteur aire élémentaire » $\mathbf{n}(m)\,\mathrm{d}A$. L'orientation de $\mathscr{S}_+$ et celle de l'espace interviennent par $\mathbf{n}(m)$.

Complément sur l'angle solide. – Soient $\mathscr{S}$ une surface décomposable de classe C^k et O un point de $\mathscr{E} \backslash \mathscr{S}$; nous supposons en outre que, pour tout $m \in \mathscr{S}$, la demi-droite Δ_m, d'origine O contenant m, ne rencontre $\mathscr{S}$ qu'en m. Nous disposons ainsi du solide conique C constitué par les Δ_m, et nous notons $\mathscr{T} = S \cap C$, où S est la sphère $(O, 1)$. Rappelons que si $\mathscr{T}$ est une surface décomposable quarrable, son aire est, par définition, l'angle solide « sous lequel on voit $\mathscr{S}$ du point O ».

Considérons une décomposition de $\mathscr{S}$, qu'il est commode d'écrire $((U_i, O + \Phi_i))_{i \in I}$, en introduisant $\overrightarrow{Om} = \Phi_i$. Il lui correspond la décomposition de $\mathscr{T}$:

$$((U_i, O + \Psi_i))_{i \in I}, \qquad \text{avec} \qquad \Psi_i = r_i^{-1}\Phi_i, \qquad \text{où} \qquad r_i = \|\Phi_i\|.$$

Si, ce que nous supposons, chaque nappe paramétrée $(U_i, O + \Psi_i)$ est quarrable, d'aire a_i, alors (**4**.2.*3*, 3°) nous disposons de l'angle solide $\Omega = \sum_{i \in I} a_i$.

Du fait que le champ vectoriel Ψ_i est unitaire, le champ scalaire

$$\rho_i = \left[\Psi_i, \frac{\partial \Psi_i}{\partial u}, \frac{\partial \Psi_i}{\partial v}\right] = \frac{1}{r_i^3}\left[\Phi_i, \frac{\partial \Phi_i}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_i}{\partial v}\right]$$

vérifie :

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Psi_i}{\partial v} = \rho_i \Psi_i.$$

D'où :

$$a_i = \iint_{U_i} |\rho_i(u, v)| \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v$$

Avec la notation habituelle :

$$\mathbf{n}_i = \left\| \frac{\partial \Phi_i}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi_i}{\partial v} \right\|^{-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi_i}{\partial v},$$

il vient :

$$\Omega = \sum_{i \in I} \iint_{U_i} \left| \left(\frac{\Phi_i}{r_i^3} \middle| \mathbf{n}_i \right)(u, v) \right| \quad \left\| \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi_i}{\partial v} \right)(u, v) \right\| \mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \qquad (2)$$

— Supposons maintenant que $\mathscr{S}$ est en outre une surface orientable (au sens des sous-variétés) ou une partie d'une telle surface $\mathscr{S}'$ (dont l'orientation induit alors une orientation sur $\mathscr{S}$), et supposons que l'orientation a été choisie de façon qu'en tout $m \in \mathscr{S}_+$ la normale orientée fasse un angle aigu θ avec Δ_m.

En changeant éventuellement les nappes paramétrées $(U_i, O + \Phi_i)$, de façon à obtenir des représentants directs des nappes géométriques Σ_{i+} correspondants, on peut se ramener au cas où, pour tout $i \in I$, la fonction $(\Phi_i | \mathbf{n}_i)$ est à valeurs positives, ce qui permet d'écrire $(\Phi_i | \mathbf{n}_i) = r_i \cos \theta_i$, avec θ_i à valeurs dans $[0, \pi/2]$. On peut ainsi supprimer la valeur absolue dans (2), qui devient, en utilisant (1) et **5**.4.*3* :

$$\Omega = \sum_{i \in I} \int_{\Sigma_{i+}} \omega_F = \int_{\mathscr{S}_+} \omega_F,$$

où F désigne le champ de vecteurs défini sur $\mathscr{E} \backslash \{0\}$ par $m \longmapsto \dfrac{\overrightarrow{Om}}{r^3}$. L'angle solide Ω est donc le flux de ce champ à travers $\mathscr{S}_+$.

Remarque. — Après avoir étudié **6**.1.*2*, le lecteur sera conduit à :

$$\Omega = \iint_{\mathscr{S}} \frac{\cos \theta}{r^3} \,\mathrm{d}A.$$

Le lecteur pourra compléter ce qui précède concernant les angles solides en consultant des ouvrages de Physique.

3° ***Stokes, Ostrogradski.*** — $(\mathscr{E}, E)$ étant un espace affine euclidien de dimension trois, orienté, les théorèmes classiques de Stokes et d'Ostrogradski ont une interprétation dans le contexte ici envisagé de l'Analyse vectorielle. On obtient ainsi :

Théorème de Stokes. — **Étant donnée une surface orientée $\mathscr{S}_+$ et un compact à bord K contenu dans $\mathscr{S}_+$, de bord orienté ∂K_+, si F est un champ de vecteurs de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathscr{E}$ contenant K, alors la circulation du champ F le long du bord orienté ∂K_+ est égale au flux du rotationnel du champ F à travers le morceau K de la surface orientée $\mathscr{S}_+$.**

Il suffit de reprendre les définitions de la circulation, du rotationnel et du flux et d'appliquer le théorème de Stokes :

$$\int_{\partial K_+} \omega_F = \int_{K_+} \mathrm{d}\omega_F$$ □

Identifiant alors, par le choix d'un repère orthonormé direct $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, $(\mathscr{E}, E)$ et $\mathbb{R}^3$ orienté canoniquement nous disposons dans $(\mathscr{E}, E)$ de la notion de compact à bord. D'où :

THÉORÈME D'OSTROGRADSKI. — **Si K est un compact à bord de $\mathscr{E}$, de bord orienté ∂K_+ et si F est un champ de vecteurs de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathscr{E}$ contenant K, alors le flux du champ F à travers la surface orientée ∂K_+ est égal à l'intégrale triple de la divergence du champ F sur le compact K.**

Il suffit ici de reprendre la définition du flux, celle de la divergence et le théorème d'Ostrogradski. □

REMARQUE. — Le lecteur notera que dans ces deux théorèmes le champ F est de classe C^1 sur un ouvert U contenant K. Lorsque cette hypothèse n'est pas satisfaite, il importe, comme sur les exemples qui suivent, « d'isoler » les points où F ne vérifie pas cette hypothèse.

EXEMPLE I. — *$(\mathscr{E}, E)$ est rapporté à un repère orthonormal direct. Pour tout $m \in \mathscr{E}$, de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z), nous posons : $F(m) = \frac{1}{\rho}\mathbf{v}_\theta$. Nous définissons ainsi un champ de vecteurs F de classe C^∞ sur l'ouvert U constitué de $\mathscr{E}$ privé de l'axe Oz.* Physiquement, à une constante multiplicative près, il s'agit du champ créé par un fil électrique « infini » coïncidant avec Oz. Dans le repère $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ l'expression du champ F est :

$$F(m) = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}), \qquad \text{avec} \qquad m = O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

On constate que F est, sur l'ouvert U, un champ à rotationnel nul.

Comme nous l'avons déjà remarqué cette condition est une condition nécessaire pour que F dérive d'un potentiel scalaire, qui est suffisante si U est étoilé par rapport à l'un de ses points, hypothèse ici non vérifiée. D'ailleurs si nous considérons le C^∞-arc géométrique orienté représenté par $\gamma = (I, f)$, avec $I = [0, 2\pi]$ et

$$f(t) = O + \rho\cos t\,\mathbf{i} + \rho\sin t\,\mathbf{j} + h\mathbf{k}, \qquad \text{avec} \qquad \rho > 0 \qquad \text{et} \qquad h \in \mathbb{R},$$

(cercle d'axe Oz), la circulation de F le long de cet arc est 2π, ce qui fait que F ne dérive pas d'un potentiel scalaire sur U.

Le théorème de Stokes ne s'applique pas car tout morceau compact K d'une surface $\mathscr{S}_+$ tel que $\gamma = \partial K_+$ rencontre Oz (c'est, par exemple, le cas pour une demi-sphère de grand cercle γ).

On peut alors tenir deux raisonnements :

— Considérer un ouvert $U' \subset U$, étoilé par rapport à l'un de ses points (c'est le cas des points de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) avec $\rho > 0$ et $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé). Sur U', F dérive d'un potentiel scalaire et la circulation le long de tout arc fermé, C^1 par morceaux, de support contenu dans U' est nulle.

— Raisonner de manière plus physique, en utilisant le théorème de Stokes. Sans nous étendre sur les difficultés théoriques, on voit qu'il y a deux types d'arcs fermés, simples, C^1 par morceaux, de support contenu dans U :

i) ceux « n'entourant » pas Oz et pour chacun de ceux-là on peut trouver un morceau compact K d'une surface $\mathscr{S}_+$ dont il soit le bord **avec** $K \subset U$. La circulation le long d'un tel arc est nulle, même s'il n'est pas inclus dans un ouvert U' du type précédent,

ii) ceux « entourant » Oz et pour lesquels tout compact K d'une surface $\mathscr{S}_+$ dont il est le bord, rencontre Oz. Pour un tel arc γ, dans le cas où il « entoure Oz » une seule fois, on peut considérer un cercle γ' centré sur Oz, contenu dans un plan $z = h$, parcouru une fois, « en sens inverse de γ » et conformément à la figure 70, faire apparaître la réunion de γ et γ' comme le bord

orienté d'un morceau compact K d'une surface $\mathscr{S}_+$ orientée, avec $K \subset U$. Le théorème de Stokes s'applique et la somme des circulations le long de γ et γ' est nulle. En conclusion :

– Si γ entoure Oz une fois dans le sens direct, la circulation le long de γ est 2π;
– Si γ entoure Oz une fois dans le sens rétrograde, la circulation est -2π.

EXEMPLE II. – *$(\mathscr{E}, E)$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ce qui permet de l'identifier avec $\mathbb{R}^3$ orienté canoniquement. On considère le champ de vecteurs F, de classe C^∞ sur $\mathscr{E}\backslash\{0\}$ défini par :*

$$m \longmapsto F(m) = \frac{\overrightarrow{Om}}{r^3}, \qquad \text{avec} \qquad r = \|\overrightarrow{Om}\|$$

(c'est le champ newtonien déjà vu en 5.6.4, 2°).

On a déjà vu que ce champ est à divergence nulle, ce qui est une condition nécessaire pour qu'il dérive d'un potentiel vecteur, suffisante si $\mathscr{E}\backslash\{O\}$ était étoilé par rapport à l'un de ses points, hypothèse non réalisée ici. On laisse au lecteur le soin de vérifier que, précisément, sur $\mathscr{E}\backslash\{O\}$, F ne dérive pas d'un potentiel vecteur.

Intéressons-nous ici à un compact K de $\mathscr{E}$, à bord. On voit que deux cas sont possibles :

– O est extérieur à K. Ostrogradski s'applique et le flux du champ F à travers le bord de K, orienté conformément à 5.5.*1*, 1°, est nul (physiquement il s'agit du flux sortant de K).
– O est intérieur à K. Prenant une boule B de centre O, contenue dans $\mathring{K}$ on peut, conformément à la figure 71 ci-dessous, former un compact K' de $\mathscr{E}$ dont le bord orienté soit constitué du bord orienté de K et de la sphère correspondant à B, les normales étant orientées vers l'intérieur de B.

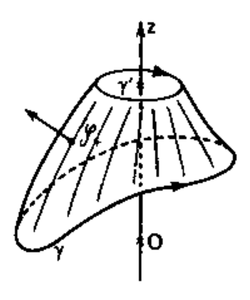


FIG. 70.

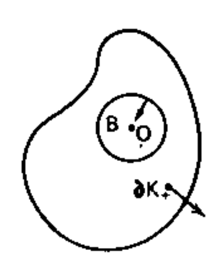


FIG. 71.

Le théorème d'Ostrogradski s'applique et ainsi le flux de F à travers ∂K_+ est l'opposé du flux de F à travers la sphère de centre O, de rayon $\varepsilon > 0$, orientée par ses normales dirigées vers l'intérieur de B.

Tout revient alors à calculer le flux de F à travers cette sphère, normales cette fois ci orientées vers l'extérieur de B. On peut, soit utiliser l'interprétation physique du flux, soit associer à F la forme

$$\omega_F = \frac{1}{r^3}(x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$$

et procéder comme en 5.4.*3*, 2° exemple.

On trouve ainsi que le flux de F à travers ∂K_+ (flux sortant) est 4π.

EXERCICES

Sauf avis contraire, on se place dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), *implicitement muni, si nécessaire, de sa structure affine et aussi euclidienne canonique.*

FORMES DIFFÉRENTIELLES.

Nous dirons, abréviativement, p-forme différentielle pour forme différentielle de degré p.

5.01. — Dans $\mathbb{R}^4$, on considère la 2-forme différentielle

$$\alpha = \sum_{i,j} a_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$$

à coefficients constants, antisymétriques ($a_{ji} = -a_{ij}$).

a) Condition pour que l'on ait : $\alpha \wedge \alpha = 0$.

b) Déterminer α pour que : $\alpha \wedge \alpha = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$.

5.02. — *a*) Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer toutes les 2 formes différentielles ω telles que :

$$\omega \wedge (dx \wedge dy + dz \wedge dt) = dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt.$$

b) Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer une 2-forme différentielle α telle que :

$$\alpha \wedge \alpha = dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt.$$

5.03. — Dans $\mathbb{R}^{2n}$, on considère la 2-forme différentielle :

$$\alpha = dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_3 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}.$$

Calculer α^n.

5.04. — Dans $\mathbb{R}^n$, on considère des formes différentielles constantes et non nulles, ω et α, de degrés respectifs 1 et p. Montrer que la condition $\omega \wedge \alpha = 0$ est nécessaire et suffisante pour qu'il existe une $(p-1)$-forme différentielle β telle que : $\alpha = \omega \wedge \beta$.

5.05. — Déterminer tous les automorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui conservent la 2-forme différentielle :

$$\alpha = a\, dy \wedge dz + b\, dz \wedge dx + c\, dx \wedge dy, \quad (a, b, c : \text{constantes données})$$

5.06. — Sur l'ouvert $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz \neq 0\}$, on considère la 1-forme différentielle :

$$\alpha = \frac{dx}{yz} + \frac{dy}{zx} + \frac{dz}{xy}.$$

Trouver $f : U \to \mathbb{R}$, de classe C^1, telle que la forme $f\alpha$ soit fermée.

5.07. — On considère, sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, la 1-forme différentielle

$$\alpha = \frac{(x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^h}, \quad (h > 0).$$

Pour quelles valeurs de h est-elle fermée ? Est-elle alors exacte ?

5.08. — Montrer que la 1-forme différentielle :

$$\alpha = \frac{(ay-bz)\,\mathrm{d}x + (cz-ax)\,\mathrm{d}y + (bx-cy)\,\mathrm{d}z}{(cz-ax)^2}$$

où a, b, c sont des constantes non nulles, est exacte dans chacun des demi-espaces de $\mathbb{R}^3$ sur lesquels elle est définie.

5.09. — On considère la 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$: $\alpha = y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z$.

a) Conditions sur les applications f et g de classe C^1 de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ pour que la forme $\alpha - g\,\mathrm{d}f$ soit fermée.

Montrer que f et g sont nécessairement indépendantes de z. Peut-on se donner arbitrairement g (indépendante de z) et en déduire f ?

b) Les conditions trouvées en *a*) étant remplies, montrer que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, les formes linéaires $\mathrm{d}f(\mathbf{x})$, $\mathrm{d}g(\mathbf{x})$, $(\alpha - g\,\mathrm{d}f)(\mathbf{x})$ sont indépendantes.

5.10. — Les notations étant celles du cours, on dit que $\alpha \in \Omega_1^k(U)$ admet un *facteur intégrant* si, et seulement s'il existe $f \in \Omega_0^k(U)$, ne prenant pas la valeur 0, telle que la 1-forme $f\alpha$ soit exacte.

a) Montrer que, s'il en est ainsi : $\alpha \wedge \mathrm{d}\alpha = 0$.

b) Soit φ (resp. ψ) une application de classe C^∞ d'un intervalle réel I (resp. J) dans $\mathbb{R}$. On adopte $E = \mathbb{R}^3$, $U = I \times J \times \mathbb{R}$ et :

$$\alpha = \mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + z\varphi(x)\psi(y)\,\mathrm{d}z$$

Comment choisir (I, φ) et (J, ψ), les intervalles étant maximaux et les fonctions non nulles pour que : $\alpha \wedge \mathrm{d}\alpha = 0$?

α étant ainsi déterminée, montrer que α possède effectivement un facteur intégrant f, et déterminer $u \in \Omega_0^\infty(U)$ telle que $f\alpha = \mathrm{d}u$.

5.11. — Soient P, Q, R trois fonctions homogènes de degré m, définies sur $\mathbb{R}^3$. On suppose que le champ de scalaires $P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ est nul (ce qui signifie que le champ (P, Q, R) est orthogonal à son rotationnel). Montrer que si la fonction $Px + Qy + Rz$ ne prend pas la valeur 0, la 1-forme différentielle $\alpha = P\,\mathrm{d}x + \mathrm{Q}\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ admet le facteur intégrant $1/(Px + Qy + Rz)$.

5.12. — Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Sur l'ouvert $U = V \times I$ de $\mathbb{R}^3$ on considère une 1-forme différentielle :

$$\alpha = P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + \mathrm{R}(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

Soit $f : V \to I$ une application de classe C^2 ; on lui associe l'application :

$$\varphi : V \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y) \longmapsto (x, y, f(x, y))$$

Condition sur f pour que la forme $\varphi^*(\alpha)$ soit fermée.

5.13. — E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$, U est un ouvert de E étoilé par rapport à 0.

a) A tout couple $(\alpha, x) \in \Omega_p^k(U) \times U$, $p \geqslant 1$, on associe l'application :

$$k(\alpha)(x) : E^{p-1} \to \mathbb{R}$$

$$(x_1, \ldots, x_{p-1}) \longmapsto \int_0^1 t^{p-1}\alpha(tx).(x, x_1, \ldots, x_{p-1})\,\mathrm{d}t.$$

Vérifier qu'il s'agit d'une forme $(p-1)$ linéaire alternée sur E.

Montrer que l'application :

$$k(\alpha) : \quad U \to \mathscr{A}_{p-1}(E) \qquad x \longmapsto k(\alpha)(x)$$

est de classe C^k.

b) On définit une application $k : \Omega_p^k(U) \to \Omega_{p-1}^k(U)$ par :

— Si $p \geqslant 1$, et si $\alpha \in \Omega_p^k(U)$, $k(\alpha)$ est l'application introduite en *a*.

— Si $f \in \Omega_0^k(U)$, $k(f)$ est 0.

α) Montrer que k est linéaire.

β) Pour $\alpha \in \Omega_p^k(U)$, $p \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$, montrer :

$$\mathrm{d}(k(\alpha)) + k(\mathrm{d}\alpha) = \alpha.$$

γ) Pour $f \in \Omega_0^k(U)$, et $k \geqslant 1$ montrer :

$$k\,\mathrm{d}f = f - f_0$$

où f_0 est l'application constante, de valeur $f(0)$, de U dans $\mathbb{R}$.

c) En déduire le théorème de Poincaré.

INTÉGRALES D'UNE FORME DIFFÉRENTIELLE.

5.14. — Soit $\alpha = \sum_{i,j} a_{ij} x_i \,\mathrm{d}x_j$ une 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$ (les a_{ij} sont des constantes non toutes nulles).

a) Montrer qu'il existe un vecteur **w** tel que l'intégrale curviligne de α le long de tout arc paramétré fermé de $\mathbb{R}^3$, C^1 par morceaux, à support inclus dans un plan quelconque parallèle à **w** soit nulle.

b) Calculer l'intégrale curviligne de α le long d'une ellipse de centre O. Conditions sur α pour qu'une telle intégrale soit toujours nulle.

5.15. — Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la 2-forme différentielle :

$$\alpha = a\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + b\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + c\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

(a, b, c : constantes non toutes nulles).

Montrer qu'il existe un unique vecteur **w** tel que, pour tout morceau quarrable τ d'un plan quelconque parallèle à **w**, l'intégrale de α sur τ soit nulle.

5.16. — Calculer l'intégrale curviligne $\int_\gamma x^2\,\mathrm{d}y + y^2\,\mathrm{d}x$, où γ est l'arc paramétré simple de $\mathbb{R}^2$, arbitrairement orienté, de support (avec $a > 0$ et $b > 0$) :

a) $x^2 + y^2 - ax = 0$; *b*) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; *c*) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{2x}{a} - \dfrac{2y}{b} = 0$.

5.17. — Calculer $\int_\gamma \frac{(x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ où γ est l'arc paramétré simple de $\mathbb{R}^2$, C^1 par morceaux, orienté, dont le support est le carré de sommets consécutifs : (a, a), $(-a, a)$, $(-a, -a)$, $(a, -a)$.

5.18. — Calculer $\int_\gamma (e^x \cos y + xy^2)\,\mathrm{d}x - (e^x \sin y + x^2 y)\,\mathrm{d}y$, où γ est l'arc $\theta \in [0,\pi/4]$ de la lemniscate $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$ de $\mathbb{R}^2$.

5.19. — Calculer $\int_\gamma (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2+x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z$, où γ est l'arc paramétré simple de $\mathbb{R}^3$, arbitrairement orienté, de support :

$$(x^2+y^2 = 2pz) \wedge (ux + vy + wz + h = 0).$$

5.20. — Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1, telle que $f(1) = 1$.

a) Déterminer f pour que la 2-forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$:

$$\alpha = x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + yf(y)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x - 2zf(y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

vérifie : $\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$. Calculer alors $\int_{\mathscr{S}_+} \alpha$, où $\mathscr{S}_+$ est la calotte sphérique

$$(x^2+y^2+z^2 = 1) \wedge (z \geqslant \sqrt{2}/2),$$

orientée de façon que la normale soit dirigée vers l'extérieur de la sphère.

b) Déterminer f pour qu'il existe une forme différentielle :

$$\omega = P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}y, \qquad \text{avec} \qquad P(x,y,0) = Q(x,y,0) = 0$$

vérifiant $\mathrm{d}\omega = \alpha$.

Calculer alors $\int_{\Gamma_+} \alpha$, où Γ_+ est le cercle $(x^2+y^2+z^2 = 1) \wedge (z = \sqrt{2}/2)$, orienté de façon à être le bord orienté de $\mathscr{S}_+$.

5.21. — Dans $\mathbb{R}^3$; on considère la demi-boule K (resp. l'hémisphère $\mathscr{S}$) :

$$x^2+y^2+z^2 < R^2 \quad (\text{resp.} = R^2), \qquad z > 0.$$

a) Calculer :

$$\int_{\mathscr{S}_+} (x^2+z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + x^3\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - 3x^2 y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$$

(la normale à $\mathscr{S}_+$ étant dirigée vers l'extérieur de K).

b) Retrouver le résultat en considérant $\mathscr{S}_+$ comme une partie du bord ∂K_+.

5.22. — Dans $\mathbb{R}^3$ on considère la 2-forme différentielle

$$\alpha = \frac{(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) \wedge \mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$$

a) Calculer $\varphi^*(\alpha)$ et $\varphi^*(\mathrm{d}\alpha)$ où φ est définie par

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta$$

b) Calculer de deux manières $\int_{\mathscr{S}_+} \alpha$, où $\mathscr{S}_+$ est la sphère $(O, 1)$ munie de l'orientation habituelle.

5.23. — Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la boule K (resp. la sphère $\mathscr{S}$) de centre O, de rayon R. Soit α la 2-forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$ par :

$$\alpha = \operatorname{Log}(x^2 + y^2 + z^2)\,[x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y]$$

a) Calculer : $I(R) = \int_{\mathscr{S}_+} \alpha$ (orientation habituelle).

b) $\mathscr{S}_+$ étant considérée comme ∂K_+, montrer que l'intégrale généralisée $J(R) = \int_K \mathrm{d}\alpha$ est convergente et la calculer.

5.24. — Soit $\mathscr{S}_+$ le tore à collier défini par :

$$x = (a + R\cos t)\cos\theta, \qquad y = (a + R\cos t)\sin\theta, \qquad z = R\sin t$$

avec : $0 < R < a$, $\theta \in [0,2\pi[$, $t \in [0,2\pi[$, la normale au point (θ, t) étant orientée par $\cos t\mathbf{u}_\theta + \sin t\mathbf{k}$.

Montrer que les intégrale $\int_{\mathscr{S}_+} z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ et $\int_{\mathscr{S}_+} x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ sont égales au volume du tore.

Analyse vectorielle.

5.25. — On donne le réel α et les deux droite $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de $\mathscr{E}_3$ d'équations :

$$(\mathscr{D}_1) \quad (x = 1) \wedge (y = 2z + 1); \qquad (\mathscr{D}_2) \quad (y = 2) \wedge (x = z - 3)$$

A tout $m \in \mathscr{E}_3$ on associe ses projections orthogonales m_i sur $\mathscr{D}_i$, $i \in \mathbb{N}_2$. Calculer la circulation du champ de vecteurs : $m \longmapsto \overrightarrow{mm_1} + \alpha\overrightarrow{mm_2}$ sur le cercle d'équation $(x^2 + y^2 + z^2 = 9) \wedge (x + y + z = 0)$, arbitrairement orienté.

5.26. — Soit F le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de composantes :

$$P(x, y, z) = x^2 - yz; \qquad Q(x, y, z) = y^2 - zx; \qquad R(x, y, z) = z^2 - xy$$

a) Dérive-t-il d'un potentiel scalaire ?
b) Calculer le flux du champ F sortant de la sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2R(x + y + z) + 2R^2 = 0, \qquad (R > 0).$$

5.27. — Expression générale des champs de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui dérivent d'un potentiel scalaire et admettent pour surfaces de niveau les sphères tangentes en O au plan xOy.

5.28. — Déterminer une application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que le champ de vecteurs $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par :

$$O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \longmapsto (1 + x^2)\varphi(x)\mathbf{i} + 2xy\varphi(x)\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$$

dérive d'un potentiel vecteur F.

Déterminer alors F, en lui imposant la condition : $(F \mid \mathbf{k}) = 0$.
Calculer la circulation de F le long du cercle $(x^2 + y^2 = 1) \wedge (z = 1)$.
Retrouver ce dernier résultat par la formule de Stokes.

5.29. — Dans un plan $\mathscr{P}$ de $\mathscr{E}_3$ on donne une droite $\mathscr{D}$ et deux points a et b tels que $\mathscr{D}' = \mathrm{Aff}(a, b)$ soit distincte de $\mathscr{D}$. On étudie le champ scalaire :

$$f : \mathscr{E} \to \mathbb{R} \qquad m \longmapsto d(m, a) + d(m, b) + d(m, \mathscr{D})$$

où $d(m, a)$, $d(m, b)$, $d(m, \mathscr{D})$ sont les distances de m à a, b, $\mathscr{D}$.

a) Étudier le champ grad f. Préciser en particulier les points où f est minimale.

b) Dans le cas où les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales, étudier l'ensemble :

$$\{m \in \mathscr{E} \mid f(m) = 2\, d(b, \mathscr{D}) - d(a, \mathscr{D})\}$$

5.30. — Dans $\mathscr{E}_2$, on donne deux boules ouvertes disjointes $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, de frontières $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$; on définit l'application f de $\mathscr{E}_2 \setminus (\mathscr{B} \cup \mathscr{B}')$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(m) = \|\overrightarrow{mt}\| + \|\overrightarrow{mt'}\|$, où t et t' sont les points de contact de tangentes à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ qui contiennent m.

Montrer que f admet une borne inférieure, et que celle-ci est atteinte en un, ou plusieurs points que l'on déterminera.

5.31. — Soit f un champ de scalaires de $\mathbb{R}^2$. On lui associe le champ de vecteurs F tel que, pour tout $m \in \mathbb{R}^2$, $F(m)$ se déduise de grad $f(m)$ par la rotation d'angle donné α. Condition sur f pour que F soit un champ de gradients.

5.32. — Soit F le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de composantes :

$$P(x, y, z) = \frac{-2xz^3}{(x^2 + y^2)^2}; \qquad Q(x, y, z) = \frac{-2yz^3}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad R(x, y, z) = 1 + \frac{3z^2}{x^2 + y^2}$$

Vérifier qu'il s'agit d'un champ de gradients. Trouver les surfaces de niveau et les lignes de champ.

5.33. — Soit G le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de composantes :

$$P(x, y, z) = yz; \qquad Q(x, y, z) = -xz; \qquad R(x, y, z) = x^2 + xy$$

a) Vérifier que c'est un champ de rotationnels, et trouver un potentiel vecteur de la forme

$$F(m) = X(x, y, z)\mathbf{i} + Y(x, y, z)\mathbf{j}.$$

b) Calculer le flux du champ de vecteurs G à travers le demi-ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad z \geqslant 0.$$

c) Soient f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathscr{S}$ la surface d'équation $xz = f(x + y)$. On désigne par $I(\gamma)$ la circulation du champ G sur le C^1-arc γ tracé sur $\mathscr{S}$.

— Montrer que si γ est fermé, alors $I(\gamma) = 0$;
— Peut-on choisir f pour que l'on ait $I(\gamma) = 0$ pour tout arc γ fermé ou non ?

5.34. — On reprend le tore orienté $\mathscr{S}_+$ introduit à l'exercice 5.24. Calculer le flux du champ de vecteurs $m \longmapsto \|\overrightarrow{Om}\|^{-1}.\overrightarrow{Om}$ à travers $\mathscr{S}_+$.

5.35. — Déterminer deux fonctions $f(\theta, r)$ et $g(\theta, r)$ vérifiant les trois conditions suivantes :

a) f est une fonction harmonique,

b) Le champ de scalaires défini, au moyen des coordonnées cylindriques (θ, ρ, z) par :

$$u(m) = \rho^2 f(\theta, z) - 2z^2 g(\theta, \rho)$$

est une fonction harmonique.

c) La fonction $g - f$ s'écrit $g - f = F(f)$.

On commencera à montrer que, f étant une fonction harmonique arbitrairement choisie, la condition *b*) s'écrit : $g = f + \rho \dfrac{\partial f}{\partial \rho}$ et qu'elle implique que g est harmonique.

5.36. — Soit $\mathscr{S}_+$ la portion du plan $x = 1$ définie par :

$$y^2 + z^2 \leqslant 1, \qquad z + y \geqslant 0; \qquad z - y \geqslant 0$$

(la normale étant orientée par le vecteur **i**).

a) Calculer le flux à travers $\mathscr{S}_+$ du champ de vecteur de composantes :

$$P(x, y, z) = x(y^2 - z^2); \qquad Q(x, y, z) = y(z^2 - x^2);$$
$$R(x, y, z) = z(x^2 - y^2)$$

b) Retrouver le résultat en se ramenant à une intégrale curviligne.

5.37. — *a*) En utilisant des considérations d'angle solide, montrer que (sous certaines conditions de régularité) l'aire de la surface $\mathscr{S}'$ homologue de la surface $\mathscr{S}$ dans l'inversion de pôle O et de puissance a^2 est égale à :

$$\iint_{\mathscr{S}} \frac{a^4}{r^4}\, dA$$

b) En déduire l'aire de la surface d'équation :

$$((x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)) \wedge (y > 0)$$

c) Retrouver cette aire par un calcul direct.

5.38. — Dans $\mathbb{R}^2$ on considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_\gamma P\,dx + R\,dy$, où

$$P(x, y) = \frac{e^x}{x^2 + y^2}(x \sin y - y \cos y);$$

$$Q(x, y) = \frac{e^x}{x^2 + y^2}(x \cos y + y \sin y)$$

et où γ est un arc simple de $\mathbb{R}^2$, C^1 par morceaux, entourant l'origine, parcouru dans le sens direct.

a) Vérifier $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}\cdot$ On pose :

$$P_1(x, y) = P(x, y) + \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad P_1(0, 0) = 0;$$

$$Q_1(x, y) = Q(x, y) - \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad Q_1(0, 0) = 0.$$

Montrer que les fonctions P_1 et Q_1 sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
En déduire : $I = 2\pi$.

b) Retrouver ce résultat en transformant I en coordonnées polaires et en intégrant sur un cercle de centre O, dont on fera tendre le rayon vers 0.

5.39. — Soit K un compact à bord de $\mathbb{R}^3$ tel que $\partial K = \mathscr{S} + \mathscr{S}'$, où $\mathscr{S}$ est une surface décomposable et $\mathscr{S}'$ un morceau de surface conique de sommet O. Montrer que le volume de K est, avec un choix convenable de l'orientation de $\mathscr{S}$:

$$\frac{1}{3}\int_{\mathscr{S}_+} x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

5.40. — Inégalité isopérimétrique. — *a*) Soit f une application 2π-périodique et de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

En utilisant les résultats de IV.3.5, montrer :

$$\int_0^{2\pi} (f'(t))^2\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{2\pi} (f(t))^2\,\mathrm{d}t$$

avec égalité si, et seulement si, $f(t) = a\cos t + b\sin t$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

b) Soit $\gamma = (I, f)$, avec $I = [a, b]$ et $a < b$, un C^k-arc paramétré fermé simple régulier de $\mathscr{E}_2$. On a admis qu'un tel arc limite un domaine intérieur, C_{int}, dont l'adhérence est un compact quarrable de $\mathscr{E}_2$. Montrer :

$$(l(\gamma))^2 \geqslant 4\pi a(\overline{C_{\text{int}}})$$

où $l(\gamma)$ est la longueur de γ et $a(\overline{C_{\text{int}}})$ l'aire de $\overline{C_{\text{int}}}$, avec égalité si, et seulement si, γ est un cercle.

6
MASSES, CENTRES ET MOMENTS D'INERTIE

L'étude de ce chapitre ne figure pas dans le programme de mathématiques des C.P.

Position du problème. – Le lecteur a déjà rencontré en Physique la notion de masse, de centre et de moment d'inertie d'un système fini de points matériels. Nous allons généraliser ces notions au cas des fils, des plaques et des solides d'un espace affine euclidien $(\mathscr{E}, E)$ de dimension 3. Pour des questions de commodité $(\mathscr{E}, E)$ sera supposé orienté, bien que les résultats ne dépendent pas de l'orientation choisie.

6.1. INTÉGRALE SUR UN SYSTÈME MATÉRIEL

6.1.*1*. Intégrale le long d'un fil

1° DÉFINITION. – **On appelle *fil* de $\mathscr{E}$, tout couple $(\mathscr{C}, \rho)$ dans lequel :**

– **$\mathscr{C}$, dit *support du fil*, est le support d'un arc paramétré compact $\gamma = (I, f)$ avec $I = [a, b]$, $a < b$, qui est simple (éventuellement fermé simple), C^1 par morceaux et régulier (cf. 5.2.*1*, 4°);**

– **ρ est une application continue de $\mathscr{C}$ dans $\mathbb{R}_+$, appelée *densité linéaire* du fil.**

Lorsque ρ est une application constante, le fil est dit *homogène*.

Pour un fil donné, l'arc paramétré qui intervient dans sa définition n'est pas unique ; on dit qu'il est un *représentant du support du fil*.

2° THÉOREME ET DÉFINITION. – **Soient $(\mathscr{C}, \rho)$ un fil de $\mathscr{E}$, et $\varphi : \mathscr{C} \to G$ une application continue de $\mathscr{C}$ dans un $\mathbb{R}$-espace de Banach G. Pour tout représentant du support du fil, $\gamma = (I, f)$ avec $I = [a, b]$, $a < b$, et pour toute subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ de $[a, b]$ adaptée à γ, notons :**

$$\Sigma_{\gamma,\sigma} = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \varphi(f(t)) \,.\, \rho(f(t)) \|f'(t)\| \,\mathrm{d}t$$

Alors $\Sigma_{\gamma,\sigma}$ ne dépend ni de γ, ni de σ. On l'appelle *intégrale de l'application φ le long du fil* $(\mathscr{C}, \rho)$; **on la note** $\int_{\mathscr{C}} \varphi(m).\rho(m)\,ds$.

Indifférence du choix de σ pour γ donné. — Remarquons tout d'abord que, par définition de σ, la restriction de f à tout segment $[a_{i-1}, a_i]$, $1 \leqslant i \leqslant p$, est de classe C^1, ce qui assure que l'application $t \longmapsto \varphi(f(t)).\rho(f(t)).\|f'(t)\|$ est continue sur $[a_{i-1}, a_i]$, donc intégrable, et justifie l'existence de $\Sigma_{\gamma,\sigma}$. D'autre part, si σ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à γ, pour tout réel c de $[a, b]$ nous pouvons former la subdivision adaptée σ_1 donc l'image est celle de σ à laquelle on adjoint c. Le théorème de Chasles montre alors que $\Sigma_{\gamma,\sigma} = \Sigma_{\gamma,\sigma_1}$. Prenons deux subdivisions σ et σ' quelconques de $[a, b]$, toutes deux adaptées à γ; en utilisant $\sigma \vee \sigma'$, et en itérant la propriété qui précède, nous constatons que $\Sigma_{\gamma,\sigma} = \Sigma_{\gamma,\sigma'}$. □

Indifférence du choix de γ. — Nous ne traitons que le cas où $\mathscr{C}$ est représenté par des arcs simples (le lecteur étudiera le cas d'arcs fermés simples). Considérons donc deux représentants de $\mathscr{C}$, $\gamma = (I, f)$ avec $I = [a, b]$ et $a < b$, $\gamma' = (J, g)$ *avec* $J = [c, d]$ et $c < d$. Les applications continues et injectives f et g induisent des homéomorphismes de I et J sur $\mathscr{C}$; d'où l'existence d'un homéomorphisme θ de J sur I, tel que $g = f \circ \theta$.

Soient $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ et $\sigma' = (c_i)_{0 \leqslant i \leqslant p'}$.

En remplaçant éventuellement γ par $\gamma'' = (-I, h)$, avec $h(t) = f(-t)$, et σ par $\sigma'' = (-a_{p-i})_{0 \leqslant i \leqslant p}$, ce qui donne $\Sigma_{\gamma'',\sigma''} = \Sigma_{\gamma,\sigma}$, on constate d'abord que l'on peut se ramener au cas où θ est croissant.

En « enrichissant » l'image de σ par les $\theta(c_i)$, et celle de σ' par les $\theta^{-1}(a_i)$, ce qui ne change ni $\Sigma_{\gamma,\sigma}$ ni $\Sigma_{\gamma',\sigma'}$ on peut d'autre part supposer que $p = p'$ et que, pour tout i, $a_i = \theta(c_i)$. Les sous-arcs γ_{a_{i-1},a_i} et γ'_{c_{i-1},c_i} sont, pour tout i, plongés et de même image, ce qui prouve que θ induit un C^1-difféomorphisme de $[c_{i-1}, c_i]$ sur $[a_{i-1}, a_i]$. Par un changement de variable, on a donc :

$$\int_{c_{i-1}}^{c_i} \varphi(g(u)).\rho(g(u)).\|g'(u)\|\,du = \int_{a_{i-1}}^{a_i} \varphi(f(t)).\rho(f(t)).\|f'(t)\|\,dt$$

Par addition, on en déduit $\sum\limits_{\gamma,\sigma} = \sum\limits_{\gamma',\sigma'}$. □

Propriétés de l'intégrale le long d'un fil. — Ce sont des simples conséquences des propriétés des intégrales vues en **III.6.** D'un point de vue pratique, nous utiliserons essentiellement le fait que l'application $\varphi \longmapsto \int_{\mathscr{C}} \varphi(m)\rho(m)\,ds$ est linéaire.

REMARQUE. — Dans la notation $\int_{\mathscr{C}} \varphi(m)\rho(m)\,ds$, pour des questions de commodité nous avons noté ds *l'élément de longueur* $\|f'(t)\|\,dt$. Cet élément de longueur ne dépend en aucun cas d'une éventuelle orientation de $\mathscr{C}$.

3° ***Notion de réunion de deux fils.*** – Soient $(\mathscr{C}, \rho)$ un fil de $\mathscr{E}$, $\gamma = (I, f)$ un représentant de $\mathscr{C}$, et $c \in]a, b[$. Considérons les deux arcs paramétrés $\gamma_1 = \gamma_{a,c}$ et $\gamma_2 = \gamma_{c,b}$, ainsi que les restrictions ρ_1 et ρ_2 de ρ à $[a, c]$ et à $[c, b]$. Nous disposons des deux fils $(\mathscr{C}_1, \rho_1)$ et $(\mathscr{C}_2, \rho_2)$, où $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont respectivement représentés par γ_1 et γ_2. On dit que le fil $(\mathscr{C}, \rho)$ est la réunion des fils $(\mathscr{C}_1, \rho_1)$ et $(\mathscr{C}_2, \rho_2)$; on constate aisément :

$$\int_{\mathscr{C}} \varphi(m) \, . \, \rho(m) \, ds = \sum_{i=1}^{2} \int_{\mathscr{C}_i} \varphi(m) \, . \, \rho_i(m) \, ds.$$

pour toute application continue φ de $\mathscr{C}$ dans G.

• Inversement on peut se ramener à cette situation à partir de deux fils $(\mathscr{C}_i, \rho_i)$, $i \in \mathbb{N}_2$, dont les supports n'ont en commun qu'un point qui est une extrémité pour chacun d'eux, et en lequel ρ_1 et ρ_2 prennent la même valeur (ou, à la rigueur, qui ont en commun deux tels points).

6.1.2. Intégrale sur une plaque

1° Définition. – **On appelle** *plaque* **de $\mathscr{E}$, tout couple $(\mathscr{S}, \rho)$ dans lequel :**

– **$\mathscr{S}$, dit** *support de la plaque,* **est une surface décomposable** (au sens de 4.2.3,1°), **compacte dans $\mathscr{E}$, pour laquelle il existe au moins une décomposition $(F_i(U_i))_{i \in I}$ telle que chaque ouvert U_i de $\mathbb{R}^2$ soit quarrable, et que chacune des applications**

$$U_i \to \mathbb{R} \qquad (u, v) \mapsto \left\| \frac{\partial F_i}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial F_i}{\partial v}(u, v) \right\|$$

soit bornée,

– **ρ est une application continue de $\mathscr{S}$ dans $\mathbb{R}_+$, appelée** *densité superficielle* **de la plaque.**

Lorsque ρ est une application constante, la plaque est dite *homogène.*

Pour une plaque donnée, la subdivision qui intervient dans sa définition n'est pas unique ; on dit qu'elle est un *représentant du support de la plaque.*

Remarques. – *a*) Les conditions qui lui sont imposées font que $\mathscr{S}$ est une surface décomposable quarrable, d'aire :

$$\sum_{i \in I} \iint_{U_i} \left\| \frac{\partial F_i}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial F_i}{\partial v}(u, v) \right\| du \, dv$$

b) Dans le cas d'un fil, le support est toujours connexe. Dans le cas d'une plaque, la connexité du support n'est pas automatiquement assurée ; dans la pratique elle sera cependant toujours réalisée :

2° Théorème et définition. – **Soient $(\mathscr{S}, \rho)$ une plaque de $\mathscr{E}$, et φ une application continue de $\mathscr{S}$ dans un $\mathbb{R}$-espace de Banach G. Si $(F_i(U_i))_{i \in I}$ est un représentant du support $\mathscr{S}$ de la plaque, la somme :**

$$\sum_{i \in I} \iint_{U_i} \varphi(F_i(u, v)) . \rho(F_i(u, v)) . \left\| \frac{\partial F_i}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial F_i}{\partial v}(u, v) \right\| du\, dv$$

ne dépend pas de cette décomposition; on l'appelle intégrale de l'application φ sur la plaque $(\mathcal{S}, \rho)$; on la note : $\iint_{\mathcal{S}} \varphi(m)\rho(m)\, dA$.

Remarquons tout d'abord que $\varphi : \mathcal{S} \to G$ est continue et donc bornée sur $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ est supposé compacte); il en est de même pour ρ, si bien que, sur chaque ouvert quarrable U_i,

$$(u, v) \longmapsto \varphi(F_i(u, v)) . \rho(F_i(u, v)) . \left\| \frac{\partial F_i}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial F_i}{\partial v}(u, v) \right\|$$

est continue et est bornée, ce qui assure l'existence des intégrales doubles. L'indépendance relativement à la décomposition est admise, les raisons qui la rendent vraisemblable étant les mêmes que celles évoquées en **4**.2.*3* et **5**.4.*3*. □

Propriétés de l'intégrale sur une plaque. — Ce sont de simples conséquences de celles des intégrales multiples vues en IV.**6**. D'un point de vue pratique nous utiliserons essentiellement le fait que l'application $\varphi \longmapsto \iint_{\mathcal{S}} \varphi(m)\rho(m)\, dA$ est linéaire.

REMARQUE. — Comme pour les aires, bien que l'on utilise le produit vectoriel, il est évident que $\iint_{\mathcal{S}} \varphi(m)\rho(m)\, dA$ ne dépend pas de l'orientation de l'espace.

3° ***Notion de réunion de deux plaques.*** — On considère deux plaques $(\mathcal{S}_1, \rho_1)$ et $(\mathcal{S}_2, \rho_2)$ telles qu'il existe une décomposition adaptée au support $\mathcal{S}_1$, $(F_i(U_i))_{i \in I}$, et une décomposition adaptée au support $\mathcal{S}_2$, $(G_j(V_j))_{j \in J}$ vérifiant :

$$\forall (i, j) \in I \times J, \qquad F_i(U_i) \cap G_j(V_j) = \varnothing.$$

On suppose en outre que ρ_1 et ρ_2 coïncident sur $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$. Prenant $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ et $\rho : \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+$ telle que ρ restreinte à $\mathcal{S}_1$ (resp. $\mathcal{S}_2$) soit ρ_1 (resp. ρ_2), on constate que $(\mathcal{S}, \rho)$ est une plaque qui est dite réunion des plaques $(\mathcal{S}_1, \rho_1)$ et $(\mathcal{S}_2, \rho_2)$. On peut évidemment procéder en sens inverse, en partant d'une plaque $(\mathcal{S}, \rho)$ et en prenant une partition de I, pour une décomposition $(F_i(U_i))_{i \in I}$ adaptée au support $\mathcal{S}$.

En utilisant une décomposition adaptée au support $\mathscr{S}$ de la plaque on établit facilement que :

$$\iint_{\mathscr{S}} \varphi(m)\rho(m)\, dA = \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathscr{S}_i} \varphi(m)\rho_i(m)\ dA$$

pour toute application continue φ de $\mathscr{S}$ dans G.

REMARQUE. — Nécessairement $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2$ est inclus dans une réunion finie de C^1-arcs paramétrés compacts.

6.1.3. Intégrale sur un solide

1° LEMME. — **Soient $(O\,;\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un repère orthonormal de $\mathscr{E}$ et θ la bijection affine de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}^3$ qui à $m \in \mathscr{E}$ fait correspondre (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, coordonnées de m dans le repère envisagé. Si $\mathscr{A}$ est une partie bornée de $\mathscr{E}$, si $A = \theta(\mathscr{A})$ est la partie bornée correspondante de $\mathbb{R}^3$ et si $f : \mathscr{A} \to G$, où G est un $\mathbb{R}$-Banach est une application, l'existence et la valeur de l'intégrale triple**

$$\iiint_A f(\theta^{-1}(x,\ y,\ z))\ dx\ dy\ dz$$

ne dépendent pas du repère envisagé ; lorsque cette intégrale existe on dit que f *est intégrable sur* $\mathscr{A}$ **et par définition l'intégrale de** f **sur** $\mathscr{A}$**, notée** $\iiint_{\mathscr{A}} f(m)\, dV$, **est la valeur commune**

$$\iiint_A f(\theta^{-1}(x,\ y,\ z))\ dx\ dy\ dz$$

Un changement de repère orthonormal de $\mathscr{E}$ induit une application $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui est une isométrie affine de $\mathbb{R}^3$. Cette isométrie affine transforme parties bornées en parties bornées et ensembles $\mathscr{R}$-négligeables en ensembles $\mathscr{R}$-négligeables, ce qui assure les existences simultanées des intégrales triples; comme d'autre part $|\det(\varphi)| = 1$, le théorème du changement de variables dans les intégrales multiples assure que toutes ces intégrales ont la même valeur. □

Il résulte de ce lemme qu'en adoptant l'application f de valeur constante 1, nous disposons au passage de la notion de *partie cubable* de $\mathscr{E}$ et de la notion de volume d'une telle partie. En pratique, on se ramène systématiquement à $\mathbb{R}^3$ par le choix d'un repère orthonormal.

2° DÉFINITION. — **On appelle** *solide* **de** $\mathscr{E}$**, tout couple** $(\mathscr{K}, \rho)$**, dans lequel**

— $\mathscr{K}$ **dit** *support du solide*, **est un compact cubable de** $\mathscr{E}$;

— ρ **est une application continue de** $\mathscr{K}$ **dans** $\mathbb{R}_+$ **appelée** *densité spatiale* **du solide.**

Lorsque ρ **est une application constante, le solide est dit** *homogène*.

REMARQUE. — En pratique nous ne considérerons que des solides de supports d'intérieur non vide, i.e. de volume strictement positif. Ils seront en outre en général connexes.

3° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soient $(\mathcal{K}, \rho)$ un solide de $\mathcal{E}$ et $\varphi : \mathcal{K} \to G$ une application continue de $\mathcal{K}$ dans le $\mathbb{R}$-Banach G. Alors l'application $\varphi.\rho$ est intégrable sur $\mathcal{K}$ et $\iiint_{\mathcal{K}} \varphi(m).\rho(m)\,dV$ porte le nom d'intégrale de l'application φ sur le solide $(\mathcal{K}, \rho)$.**

En effet pour un choix de repère orthonormal quelconque, l'application $(\varphi.\rho) \circ \theta^{-1}$ est continue sur le compact cubable de $\mathbb{R}^3$, $K = \theta(\mathcal{K})$. □

Propriétés de l'intégrale sur un solide. — Ce sont celles des intégrales triples ; en particulier $\varphi \longmapsto \iiint_{\mathcal{K}} \varphi(m)\rho(m)\,dV$ est linéaire.

3° ***Notion de réunion de deux solides.*** — Soient $(\mathcal{K}_1, \rho_1)$ et $(\mathcal{K}_2, \rho_2)$ deux solides de $\mathcal{E}$; on suppose que $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ est un compact $\mathcal{R}$-négligeable de $\mathcal{E}$ et que sur $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$, ρ_1 et ρ_2 coïncident. Posant $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ et $\rho : \mathcal{K} \to \mathbb{R}_+$ telle que ρ restreinte à $\mathcal{K}_1$ (resp. $\mathcal{K}_2$) soit ρ_1 (resp. ρ_2), on constate que $(\mathcal{K}, \rho)$ est un solide de $\mathcal{E}$ dit *réunion des solides* $(\mathcal{K}_1, \rho_1)$ *et* $(\mathcal{K}_2, \rho_2)$. Ici aussi on peut procéder en sens inverse en effectuant une partition, à un $\mathcal{R}$-négligeable près, d'un compact cubable $\mathcal{K}$ de $\mathcal{E}$ en deux compacts cubables $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$.

Les propriétés des intégrales triples montrent facilement que :

$$\iiint_{\mathcal{K}} \varphi(m)\rho(m)\,dV = \iiint_{\mathcal{K}_1} \varphi(m)\rho_1(m)\,dV + \iiint_{\mathcal{K}_2} \varphi(m)\rho_2(m)\,dV$$

pour toute application continue $\varphi : \mathcal{K} \to G$.

6.1.4. Notion de système matériel ; masse d'un système matériel

1° Afin d'éviter des redites nous appellerons système matériel de $\mathcal{E}$ tout couple $(\mathfrak{M}, \rho)$ où $(\mathfrak{M}, \rho)$ est soit un fil, soit une plaque, soit un solide de $\mathcal{E}$. Dorénavant nous citerons des définitions et des propriétés s'appliquant aux systèmes matériels de $\mathcal{E}$, mais le lecteur notera que nous serons parfois amenés à distinguer pour certaines propriétés s'il s'agit d'un fil, d'une plaque ou d'un solide.

Étant donné un système matériel $(\mathfrak{M}, \rho)$ de $\mathcal{E}$ et une application continue $\varphi : \mathfrak{M} \to G$, où G est un $\mathbb{R}$-Banach, le symbole $\int_{\mathfrak{M}} \varphi(m).\rho(m).d\mu$ désigne l'intégrale sur ce système (conformément aux définitions de **6.1.*1***, **6.1.*2*** et **6.1.*3***) de l'application continue φ.

REMARQUE. — Fils, plaques et solides sont des cas particuliers de systèmes matériels de $\mathscr{E}$; il n'est pas question ici d'aborder une théorie générale des systèmes matériels.

2° ***Image d'un système matériel par une bijection affine.*** — Soit $\Phi : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une bijection affine de partie linéaire l_Φ ; étant donné un système matériel $(\mathfrak{M}, \rho)$ de $\mathscr{E}$ nous disposons de la partie $\mathfrak{M}' = \Phi(\mathfrak{M})$ de $\mathscr{E}$, et de l'application continue $\nu = \rho \circ \Phi^{-1}$ de $\mathfrak{M}'$ dans $\mathbb{R}_+$; il est aisé de vérifier que $(\mathfrak{M}', \nu)$ est un système matériel de $\mathscr{E}$ de même nature (fil, plaque ou solide) que $(\mathfrak{M}, \rho)$; on dit alors que $(\mathfrak{M}', \nu)$ est le *système matériel image* du système matériel $(\mathfrak{M}, \rho)$ par la bijection affine Φ. En particulier, si $(\mathfrak{M}', \nu)$ coïncide avec $(\mathfrak{M}, \rho)$ on dit que $(\mathfrak{M}, \rho)$ est *invariant* par Φ ; il s'agit du cas où les deux conditions suivantes sont remplies :

— $\Phi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$, i.e. $\mathfrak{M}$ est invariant par Φ ;
— $\nu = \rho \circ \Phi^{-1}$, i.e. la densité est la même aux points m et $\Phi(m)$ de $\mathfrak{M}$.

• Revenant au cas général de $(\mathfrak{M}, \rho)$ et de son image $(\mathfrak{M}', \nu)$ par l'application affine Φ, considérons une application continue $\varphi : \mathfrak{M} \to G$ où G est un $\mathbb{R}$-Banach ; nous disposons de l'application continue $\varphi \circ \Phi^{-1}$ de $\mathfrak{M}'$ dans G et, suivant la nature du système, les intégrales de φ et de $\varphi \circ \Phi^{-1}$ sur $(\mathfrak{M}, \rho)$ et $(\mathfrak{M}', \nu)$ sont données par :

Cas d'un fil (notations de **6**.1.*1*) :

$$\int_{\mathscr{C}} \varphi(m).\rho(m)\, ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \varphi(f(t)).\rho(f(t)).\|f'(t)\|\, dt$$

$$\int_{\mathscr{C}'} (\varphi \circ \Phi^{-1})(m).\nu(m).ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \varphi(f(t)).\rho(f(t)).\|l_\Phi(f'(t))\|\, dt$$

Cas d'une plaque (notations de **6**.1.*2*) :

$$\iint_{\mathscr{S}} \varphi(m).\rho(m)\, dA = \sum_{i\in I} \iint_{U_i} \varphi(F_i(u, v)).\rho(F_i(u, v)).\left\|\frac{\partial F_i}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial F_i}{\partial v}(u, v)\right\| du\, dv$$

$$\iint_{\mathscr{S}'} (\varphi \circ \Phi^{-1})(m).\nu(m).dA = \sum_{i\in I} \iint_{U_i} \varphi(F_i(u, v)).\rho(F_i(u, v)) \left\|l_\Phi\left(\frac{\partial F_i}{\partial u}(u, v)\right) \wedge l_\Phi\left(\frac{\partial F_i}{\partial v}(u, v)\right)\right\| du\, dv$$

Cas d'un solide : après utilisation du théorème du changement de variables dans les intégrales triples :

$$\iiint_{\mathscr{K}'} (\varphi \circ \Phi^{-1})(m).\nu(m).dV = |\det l_\Phi| \iiint_{\mathscr{K}} \varphi(m).\rho(m)\, dV$$

(On rappelle que ν désigne $\rho \circ \Phi^{-1}$).

Propriétés de symétrie. — PROPOSITION. — **Avec les notations que nous venons d'introduire, on a l'égalité :**

$$\int_{\mathfrak{M}'} (\varphi \circ \Phi^{-1})(m) . \nu(m) \, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathfrak{M}} \varphi(m) . \rho(m) \, \mathrm{d}\mu \qquad (1)$$

dans chacun des cas suivants :

— **$(\mathfrak{M}, \rho)$ est quelconque et Φ est une isométrie (en particulier une symétrie orthogonale) ;**

— **$(\mathfrak{M}, \rho)$ est un solide et $|\det l_\Phi| = 1$, ce qui est acquis lorsque Φ est une symétrie quelconque ;**

— **$(\mathfrak{M}, \rho)$ est une plaque plane, et Φ est une symétrie quelconque par rapport à une droite du plan de la plaque.**

Il s'agit d'une conséquence des égalités qui précèdent. Elle est immédiate dans les deux premiers cas. Dans le dernier cas, on désigne par $(\mathscr{F}, F)$ le plan du support de la plaque, et on constate :

$$\forall (\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in F^2 \qquad \|l_\Phi(\mathbf{w}) \wedge l_\Phi(\mathbf{w}')\| = \|\mathbf{w} \wedge \mathbf{w}'\|$$

que l'on peut appliquer à $\mathbf{w} = \dfrac{\partial F_i}{\partial u}(u, v)$ et $\mathbf{w}' = \dfrac{\partial F_i}{\partial v}(u, v)$, qui sont évidemment des vecteurs de F. □

3° ***Réunion de deux systèmes matériels.***— On considère deux systèmes matériels $(\mathfrak{M}_1, \rho_1)$ et $(\mathfrak{M}_2, \rho_2)$ qui sont de même nature à savoir tous deux des fils, tous deux des plaques ou tous deux des solides et qui vérifient en outre, soient les hypothèses de **6**.1.*1*.3°, soient les hypothèses de **6**.1.*2*.3°, soient les hypothèses de **6**.1.*3*.3°. En utilisant précisément ces trois sous-paragraphes, on constate que l'on peut alors former le système matériel réunion $(\mathfrak{M}, \rho)$ qui est soit le fil réunion, soit la plaque réunion, soit le solide réunion. Pour toute application continue φ de $\mathfrak{M}$ dans un $\mathbb{R}$-Banach G, on a alors :

$$\int_{\mathfrak{M}} \varphi(m)\rho(m) \, d\mu = \int_{\mathfrak{M}_1} \varphi(m)\rho_1(m) \, d\mu + \int_{\mathfrak{M}_2} \varphi(m)\rho_2(m) \, d\mu$$

4° ***Masse d'un système matériel.*** — DÉFINITION. — **On appelle** *masse* **du système matériel $(\mathfrak{M}, \rho)$ l'intégrale** $\displaystyle\int_{\mathfrak{M}} \rho(m) \, d\mu$.

On reconnaît l'intégrale sur $(\mathfrak{M}, \rho)$ de l'application constante $m \to 1$ qui est, bien sûr, continue ; la masse est un réel positif.

Dans le cas particulier d'un système homogène on constate en désignant par ρ la valeur constante de la densité, que la masse est le produit par ρ :

— de la longueur du support dans le cas d'un fil ;
— de l'aire du support dans le cas d'une plaque ;
— du volume du support dans le cas d'un solide.

Propriétés de symétries. — PROPOSITION. — **Soient Φ une bijection affine de $\mathscr{E}$, $(\mathfrak{M}, \rho)$ un système matériel, et $(\mathfrak{M}', \nu)$ son image par Φ (cf. 2°). Dans chacun des cas suivants, les deux systèmes $(\mathfrak{M}, \rho)$ et $(\mathfrak{M}', \nu)$ ont même masse :**

— $(\mathfrak{M}, \rho)$ est quelconque et Φ est une isométrie (en particulier une symétrie orthogonale) ;

— $(\mathfrak{M}, \rho)$ est un solide et $|\det l_\Phi| = 1$, ce qui est acquis lorsque Φ est une symétrie quelconque ;

— $(\mathfrak{M}, \rho)$ est une plaque plane, et Φ est une symétrie quelconque par rapport à une droite du plan de la plaque.

C'est un cas particulier de la proposition du 2°. □

Le lecteur poursuivra la comparaison des masses dans le cas où Φ est une affinité (resp. une homothétie).

Masse d'une réunion de systèmes. — Il est évident que les masses s'ajoutent.

Calcul des masses.— On utilise souvent des considérations de symétries.

6.2. CENTRE D'INERTIE D'UN SYSTÈME MATÉRIEL

Dorénavant tous les systèmes matériels considérés ont une masse strictement positive.

6.2.*1*. Centre d'inertie d'un système matériel

1° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soit $(\mathfrak{M}, \rho)$ un système matériel de masse M strictement positive ; il existe un unique point g de $\mathscr{E}$ tel que :**

$$\int_{\mathfrak{M}} \overrightarrow{gm}\,.\,\rho(m)\,.\,d\mu = 0 \qquad (1)$$

On l'appelle *centre d'inertie* **du système matériel $(\mathfrak{M}, \rho)$; pour tout $O \in \mathscr{E}$, il vérifie :**

$$\overrightarrow{Og} = \frac{1}{M}\int_{\mathfrak{M}} \overrightarrow{Om}\,.\,\rho(m)\,.\,d\mu \qquad (2)$$

Pour tout point p de $\mathscr{E}$, l'application $m \longmapsto \overrightarrow{pm}$ est une application continue de $\mathscr{E}$ dans E, ce qui assure l'existence de l'intégrale de cette

application sur le système $(\mathfrak{M}, \rho)$. On a en outre pour $O \in \mathscr{E}$, quelconque :

$$\int_{\mathfrak{M}} \overrightarrow{pm}.\rho(m).d\mu = \int_{\mathfrak{M}} \overrightarrow{Om}.\rho(m).d\mu - M\,\overrightarrow{Op}$$

Comme $M > 0$, cette relation prouve l'existence et l'unicité d'un point g de $\mathscr{E}$ vérifiant (1); il est donné par (2).

Remarquons que si le système matériel $(\mathfrak{M}, \rho)$ est homogène, son centre d'inertie ne dépend pas de la valeur constante de l'application $m \longmapsto \rho(m)$, qui pourra donc toujours être supposée de valeur 1. □

PROPOSITION I. — **Si $(\mathfrak{M}, \rho)$ est un système matériel dont le support $\mathfrak{M}$ est contenu dans une variété linéaire affine $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$, alors son centre d'inertie g appartient à $\mathscr{F}$.**

En effet prenant O dans $\mathscr{F}$, pour tout m de $\mathfrak{M}$, $\overrightarrow{Om}$ appartient à F (direction de $\mathscr{F}$), et donc $\overrightarrow{Og}$ appartient aussi à F. □

En particulier si un fil est rectiligne (resp. plan), à savoir de support inclus dans une droite (resp. un plan), son centre d'inertie appartient à cette droite (resp. ce plan); si une plaque est plane, à savoir de support inclus dans un plan, son centre d'inertie appartient à ce plan.

Propriétés de symétrie. — PROPOSITION II. — **Soient Φ une bijection affine de $\mathscr{E}$, $(\mathfrak{M}, \rho)$ un système matériel $(\mathfrak{M}', \nu)$ son image par Φ, g et g' les centres d'inertie de $(\mathfrak{M}, \rho)$ et $\mathfrak{M}', \nu)$. Dans chacun des cas suivants, on a $g' = \Phi(g)$:**

— $(\mathfrak{M}, \rho)$ est quelconque et Φ est une isométrie (en particulier une symétrie orthogonale);

— $(\mathfrak{M}, \rho)$ est un solide et $|\det l_\Phi| = 1$, ce qui est acquis lorsque Φ est une symétrie quelconque;

— $(\mathfrak{M}, \rho)$ est une plaque plane, et Φ est une symétrie quelconque par rapport à une droite du plan de la plaque.

Par définition de g : $\int_{\mathfrak{M}} \overrightarrow{gm}.\rho(m)\,d\mu = 0$, ce qui entraîne :

$$l_\Phi\left(\int_{\mathfrak{M}} \overrightarrow{gm}.\rho(m)\,d\mu\right) = 0. \qquad (3)$$

En utilisant III.**6**.2.*2*, 3° dans le cas d'un fil et IV.**6**.5.*2*, 3° dans celui d'une plaque ou d'un volume, (3) s'écrit :

$$\int_{\mathfrak{M}} l_\Phi(\overrightarrow{gm}).\rho(m)\,d\mu = 0.$$

ou encore, en posant $\Phi(g) = g''$:

$$\int_{\mathfrak{M}} \overrightarrow{g''\Phi(m)}.\rho(m)\,d\mu = 0 \qquad (4)$$

Comme nous sommes dans les conditions de validité de la formule (1) du **6**.1.*4*, 2°, (4) s'écrit :

$$\int_{\mathfrak{M}'} \overrightarrow{g''m}\,.\,\nu(m)\,d\mu = 0$$

ce qui caractérise le fait que g'' est le centre d'inertie de $(\mathfrak{M}', \nu)$. □

COROLLAIRE. — **Soient Φ une bijection affine de $\mathscr{E}$, $(\mathfrak{M}, \rho)$ un système matériel invariant par Φ, et g le centre d'inertie de $(\mathfrak{M}, \rho)$. Alors, dans chacun des cas énumérés dans l'énoncé de la proposition II, on a $\Phi(g) = g$.**

Dans la pratique, on utilise souvent le corollaire dans le cas où le système matériel $(\mathfrak{M}, \rho)$ est homogène, l'invariance par Φ se traduisant alors par la seule condition $\Phi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$. Retenons :

Soit $(\mathfrak{M}, \rho)$ *un système matériel homogène, de centre d'inertie* g :

— *Si* $\mathfrak{M}$ *admet un centre de symétrie* O, *alors* $g = O$;

— *Si* $\mathfrak{M}$ *admet un axe* $\mathscr{D}$ (*resp. un plan* $\mathscr{P}$) *de symétrie orthogonale, alors* $g \in \mathscr{D}$ (resp. $g \in \mathscr{P}$). *En particulier si* $\mathfrak{M}$ *est un ensemble de révolution d'axe* $\mathscr{D}$ (*au sens de* II.7.3.*6*), *alors* $g \in \mathscr{D}$.

— *Si* $\mathfrak{M}$ *est un compact cubable qui admet un axe* $\mathscr{D}$ (*resp. un plan* $\mathscr{P}$) *de symétrie quelconque, alors* $g \in \mathscr{D}$ (*resp.* $g \in \mathscr{P}$).

— *Si* $\mathfrak{M}$ *est une surface plane qui admet, dans son plan, un axe de symétrie* $\mathscr{D}$, *alors* $g \in \mathscr{D}$.

3° *Associativité du centre d'inertie.* — PROPOSITION. — **Soit $(\mathfrak{M}, \rho)$ un système matériel qui est la réunion de deux systèmes matériels $(\mathfrak{M}_i, \rho_i)$, $i \in \mathbb{N}_2$. On note M, M_1, M_2 les masses respectives de $(\mathfrak{M}, \rho)$, $(\mathfrak{M}_1, \rho_1)$, $(\mathfrak{M}_2, \rho_2)$, et g, g_1, g_2 leurs centres d'inertie. Alors g est le barycentre de g_1 et g_2, respectivement affectés des coefficients M_1 et M_2.**

Nous avons déjà vu que $M = M_1 + M_2$.

Par définition, on a :

$$\int_{\mathfrak{M}} \overrightarrow{gm}\,.\,\rho(m)\,.\,d\mu = 0.$$

D'après **6**.1.*4*.3°, on a donc :

$$\int_{\mathfrak{M}_1} \overrightarrow{gm}\,.\,\rho_1(m)\,d\mu + \int_{\mathfrak{M}_2} \overrightarrow{gm}\,.\,\rho_2(m)\,d\mu = 0$$

Introduisant g_1 et g_2, on en déduit :

$$\overrightarrow{gg_1}\,.\int_{\mathfrak{M}_1} \rho_1(m)\,d\mu + \int_{\mathfrak{M}_1} \overrightarrow{g_1m}\,.\,\rho_1(m)\,.\,d\mu + \overrightarrow{gg_2}\int_{\mathfrak{M}_2} \rho_2(m)\,d\mu + \int_{\mathfrak{M}_2} \overrightarrow{g_2m}\,.\,\rho_2(m)\,d\mu = 0$$

ce qui, compte tenu des définitions de g_1 et g_2 se réduit à :

$$M_1\overrightarrow{gg_1} + M_2\overrightarrow{gg_2} = 0 \qquad \square$$

Le lecteur pourra généraliser cette proposition à une réunion finie de systèmes matériels.

EXEMPLE. — *Centre d'inertie du solide homogène* $(\mathfrak{M}, \rho)$ *de* $\mathscr{E}$, *où* $\mathfrak{M}$ *est la boule fermée de centre* a, *de rayon* $R > 0$, *privée de la « cavité » constituée par la boule ouverte de centre* b, *de rayon* $r > 0$ *avec :* $\|\overrightarrow{ab}\| + r \leqslant R$.

Le lecteur est prié de faire une figure.

$\mathfrak{M}$ est manifestement un compact cubable de $\mathscr{E}$.

Introduisons alors les solides homogènes, de même densité spatiale, de supports respectifs, la boule fermée de centre a et de rayon R, notée B, et la boule fermée de centre b, de rayon r notée B'. B est la réunion de $\mathfrak{M}$ et de B', au $\mathscr{R}$-négligeable près constitué par la sphère de centre b et de rayon r. Comme tous les solides envisagés sont homogènes de densité spatiale 1, le système matériel $(B, 1)$ est la réunion des systèmes matériels $(\mathfrak{M}, 1)$ et $(B', 1)$. Ainsi a, centre d'inertie de $(B, 1)$ puisque centre de symétrie de B, est le barycentre de g et de b, centre d'inertie de $(B', 1)$, affecté des coefficients respectifs $R^3 - r^3$ et r^3, proportionnels aux volumes. Ainsi :

$$(R^3 - r^3)\overrightarrow{ag} + r^3\overrightarrow{ab} = 0.$$

D'où :

$$\overrightarrow{ag} = \frac{r^3}{R^3 - r^3}\overrightarrow{ba}$$

ce qui détermine la position de g en fonction de a, b, R et r.

4° ***Détermination pratique d'un centre d'inertie.*** — Étant donné un système matériel $(\mathfrak{M}, \rho)$ de $\mathscr{E}$, pour déterminer son centre d'inertie g on procède en général de manière analytique par utilisation de la formule :

$$\overrightarrow{Og} = \frac{1}{M}\int_{\mathfrak{M}} \overrightarrow{Om}\,.\,\rho(m)\,.\,d\mu \qquad (1)$$

Si $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O\,; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, en utilisant le point O, cette formule permet de déterminer par projection, les coordonnées du point g. Cependant, dans de nombreux cas avant d'appliquer (1), des considérations géométriques permettent, sinon de déterminer g, tout au moins de préciser la position de g (appartenance à une droite, à un plan...), ce qui limite les calculs ; d'autre part il est parfois intéressant d'utiliser des réunions de systèmes matériels (comme dans l'exemple de 3°), ou des théorèmes auxiliaires tels les théorèmes de Guldin dont nous parlerons au **6**.2.*2*.

EXEMPLES. — *a*) Soit $(\mathfrak{M}, \rho)$ un système matériel homogène constitué d'une plaque plane triangulaire, de sommets A, B, C. Désignant par A', B', C' les milieux respectifs des côtés BC, CA et AB, on constate que la symétrie oblique, d'axe la droite AA', parallèlement à la droite BC, est une symétrie du plan contenant le support $\mathfrak{M}$ de la plaque, laissant invariant ce support. Ainsi g centre d'inertie de cette plaque appartient à la droite AA'. En opérant de même avec BB' on constate que g est l'isobarycentre du triangle ABC.

On notera par contre que si l'on considère le fil homogène $(\mathfrak{M}, \rho)$, où $\mathfrak{M}$ est constitué par les trois côtés du triangle, alors le centre d'inertie de $(\mathfrak{M}, \rho)$, qui est le barycentre de A', B', C' affecté

des coefficients $\|\overrightarrow{BC}\|$, $\|\overrightarrow{CA}\|$, $\|\overrightarrow{AB}\|$ n'appartient en général pas aux médianes du triangle, qui sont pourtant encore axes de symétrie oblique de $\mathfrak{M}$.

A partir du centre d'inertie d'une plaque plane triangulaire homogène, par associativité, on peut déterminer le centre d'inertie de toute plaque plane homogène limitée par un polygône.

b) En procédant comme en *a*) le lecteur pourra prouver que le centre d'inertie d'un tétraèdre homogène (solide) est l'isobarycentre des 4 sommets.

Par associativité il pourra aussi en déduire le centre d'inertie de toute pyramide homogène à base polygonale.

c) *Centre d'inertie d'un arc de cercle homogène.* Il s'agit d'un fil plan et le centre d'inertie appartient au plan du cercle; d'autre part la droite joignant O, centre du cercle, et I milieu de l'arc est un axe de symétrie orthogonale pour le support du fil; le centre d'inertie g appartient donc à cette droite. Soit $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ le repère orthonormal du plan du cercle tel que $\overrightarrow{OI} = R\mathbf{i}$ (où R est le rayon). Nous constatons qu'un représentant du support $\mathscr{C}$ du fil est de la forme $([-\alpha, \alpha], f)$, où $\alpha \in]0, \pi]$, et $f(t) = O + R\cos t\mathbf{i} + R\sin t\mathbf{j}$.

On sait déjà que $y_g = 0$. On calcule x_g par

$$x_g = \frac{1}{M}\int_{\mathscr{C}} x(m).\rho(m)\,ds.$$

Le fil étant homogène, on adopte $\rho(m) = 1$ pour tout $m \in \mathscr{C}$. Ainsi :

$$x_g = \frac{1}{2R\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos t.R\,dt = R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

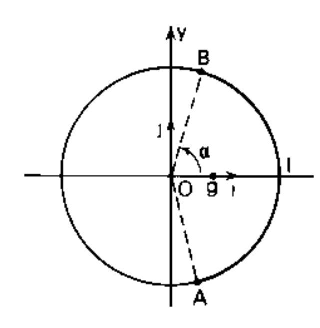


FIG. 72.

d) *Centre d'inertie d'un secteur circulaire homogène.* — Il s'agit ici d'une plaque plane. On a les mêmes considérations de symétries qu'en *c*); on adopte les mêmes notations. Le support $\mathscr{S}$ de la plaque admet la décomposition $((U, F))$ avec :

$$U = \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 | (-\alpha < \theta < \alpha) \wedge (0 < \rho < R)\}$$

et

$$F(\theta, \rho) = O + \rho\cos\theta\mathbf{i} + \rho\sin\theta\mathbf{j}$$

Le centre d'inertie étant ici noté g', on a : $y_{g'} = 0$ et $x_{g'} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iint_{\mathscr{S}} x(m).\rho(m)\,dA$.

On adopte encore $\rho(m) = 1$ pour tout $m \in \mathscr{S}$. Ainsi :

$$x_{g'} = \frac{1}{\alpha R^2}\iint_U \rho\cos\theta.\rho\,d\theta\,d\rho = \frac{2}{3}R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

En comparant les résultats obtenus en *c*), on constate : $\overrightarrow{Og'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{Og}$.

e) *Centre d'inertie d'un demi-ellipsoïde homogène.* — On considère le solide homogène (K, ρ) où K est défini, par rapport à un repère orthonormal $(O;, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de $\mathscr{E}$ par :

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\right) \wedge (z \geqslant 0), \qquad a > 0, \qquad b > 0, \qquad c > 0.$$

K est évidemment un compact cubable de $\mathscr{E}$. Le solide étant homogène, le centre d'inertie g appartient à Oz qui est un axe de symétrie (d'ailleurs orthogonale) de K.

Sa cote z_g est donnée par :

$$z_g = \frac{1}{M} \iiint_{\mathscr{K}} z(m) . \rho(m)\, d\mu$$

Prenant encore $\rho(m) = 1$ pour tout $m \in \mathscr{K}$, on obtient :

$$z_g = \frac{1}{2/3 . \pi abc} \iiint_K z\; dx\; dy\; dz$$

où

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Big| \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\right) \wedge z \geqslant 0\}.$$

Le calcul donne : $z_g = 3c/8$.

6.2.2. Les théorèmes de Guldin

On utilise un repère orthonormal direct $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de $\mathscr{E}$.

1° ***Premier théorème de Guldin.*** — La notation est celle du **4.2.4** : $\mathscr{S}$ est la surface décomposable quarrable, de révolution dont la demi-méridienne dans le demi-plan $\mathscr{P}$ $(y=0)\wedge(x\geqslant 0)$ est le support $\mathscr{C}$ d'un C^k-arc géométrique simple et régulier (I, f), avec $I = [a, b]$, $a < b$, et :

$$f(t) = O + \rho(t)\mathbf{i} + z(t)\mathbf{k}, \qquad \rho(t) > 0 \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Considérons le fil homogène $(\mathscr{C}, 1)$, dont le centre d'inertie g est situé dans $\mathscr{P}$, d'abscisse x_g donnée par :

$$x_g = \frac{1}{l(\mathscr{C})} \int_{\mathscr{C}} x(m)\, ds.$$

On calcule :

$$\int_{\mathscr{C}} x(m)\; ds = \int_a^b \rho(t)\; \sqrt{\rho'^2(t) + z'^2(t)}\, dt.$$

Compte tenu du calcul de l'aire de $\mathscr{S}$ fait au **4.2.4** on constate :

$$a(\mathscr{S}) = 2\pi \int_{\mathscr{C}} x(m)\; ds, \qquad \text{et} \qquad a(\mathscr{S}) = 2\pi x_g . l(\mathscr{C})$$

ce qui permet d'énoncer :

THÉORÈME. — **Dans les conditions que nous venons de préciser, l'aire d'une surface de révolution est le produit de la longueur d'une demi-méridienne par la longueur de la circonférence décrite par le centre d'inertie de cette demi-méridienne, supposée homogène, en tournant autour de l'axe de révolution.**

REMARQUE. — Comme pour l'aire des surfaces de révolution on étend au cas où $\mathscr{C}$ est un arc fermé simple, et au cas où ρ prend un nombre fini de fois la valeur 0 sur I.

EXEMPLES. — *a) Aire du tore à collier.*

$\mathscr{C}$ est le cercle d'équation :

$$(y = 0) \wedge ((x - a)^2 + z^2 = R^2), \qquad 0 < R \leqslant a$$

La théorie s'applique. Ici g est le centre de $\mathscr{C}$. On trouve :

$$a(\mathscr{S}) = 4\pi^2 Ra$$

(résultat déjà obtenu au **4.2.4**).

b) Recherche d'un centre d'inertie.

$\mathscr{S}$ est la zone sphérique engendrée par la rotation autour de Oz de l'arc de cercle $\mathscr{C}$ support de l'arc (I, f), avec $I = [-\alpha, \alpha]$, $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ et :

$$f(t) = O + R \cos t\mathbf{i} + R \sin t\mathbf{j}$$

La théorie s'applique. On connaît :

$$a(\mathscr{S}) = 4\pi R^2 \sin\alpha \qquad \text{et} \qquad l(\mathscr{C}) = 2\alpha R.$$

On en déduit :

$$x_g = R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

(cas particulier d'un résultat déjà obtenu au **6.2.1**, 4° exemple *c*)).

2° ***Deuxième théorème de Guldin.*** — On donne un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, $a < b$, et deux applications continues g_1 et g_2 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall z \in [a, b] \qquad 0 \leqslant g_1(z) \leqslant g_2(z)$$
$$\exists z \in [a, b] \qquad g_1(z) < g_2(z).$$

On désigne par $\mathscr{S}$ le compact quarrable (d'intérieur non vide) du demi-plan $\mathscr{P}$ d'équations $(y = 0) \wedge (x \geqslant 0)$ défini comme l'ensemble des points de $\mathscr{E}$ dont les coordonnées vérifient :

$$(y = 0) \wedge (a \leqslant z \leqslant b) \wedge (g_1(z) \leqslant x \leqslant g_2(z))$$

On constate que $(\mathscr{S}, 1)$ est une *plaque plane*, dont le support $\mathscr{S}$ admet le représentant $((U, F))$, tel que :

$$U = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 | (a < z < b) \wedge (g_1(z) < x < g_2(z))\}$$

$\mathscr{S} \backslash F(U)$ est en effet une réunion finie d'arcs compacts (pas nécessairement de classe C^1, mais les graphes des applications continues g_1 et g_2 sont $\mathscr{R}$-négligeables pour la théorie des intégrales doubles). Le centre de gravité g de la plaque $(\mathscr{S}, 1)$ a pour abscisse :

$$x_g = \frac{1}{a(\mathscr{S})} \iint_{\mathscr{S}} x(m)\, dA$$

ce qui s'écrit :

$$x_g = \frac{1}{2a(\mathscr{S})} \int_a^b [(g_2(z))^2 - (g_1(z))^2]\, dz$$

— On désigne par $\mathscr{K}$ l'ensemble de révolution dont une demi-méridienne est $\mathscr{S}$. En utilisant IV.**7.3.2**, 2° on constate (par différence de sous-ensembles cubables de $\mathscr{E}$) que $(\mathscr{K}, 1)$ est un *solide* de volume

$$V(\mathscr{K}) = \pi \int_a^b [(g_2(z))^2 - (g_1(z))^2]\, dz$$

ce qui permet d'énoncer :

THÉORÈME. — **Dans les conditions que nous venons de préciser, l'aire d'un solide de révolution est le produit de l'aire d'une demi-méridienne par la longueur de la circonférence décrite par le centre d'inertie de cette demi-méridienne, supposée homogène, en tournant autour de l'axe de révolution.**

REMARQUE. — Comme pour le théorème de Green-Riemann, le lecteur pourra généraliser ce qui précède dans le cas où $\mathscr{S}$ est le« compact intérieur » à une courbe fermée, simple, de classe C^1 par morceaux du demi-plan $(x = 0) \wedge (y \geqslant 0)$.

EXEMPLES. — *a) Volume du tore à collier.*

$\mathscr{S}$ est le disque d'équation :

$$(y = 0) \wedge ((x - a)^2 + z^2 \leqslant R^2), \qquad 0 < R \leqslant a.$$

La théorie s'applique avec :

$$g_1(z) = a - \sqrt{R^2 - z^2}, \qquad g_2(z) = a + \sqrt{R^2 - z^2}, \qquad z \in [-R, R].$$

Ici g est le centre de $\mathscr{S}$. On trouve : $V(\mathscr{K}) = 2\pi^2 aR^2$ (résultat déjà obtenu au IV.7.3.2, 2°).

b) Recherche d'un centre d'inertie :

$\mathscr{K}$ est ici la boule engendrée par la rotation autour de Oz du demi-disque $\mathscr{S}$ d'équation :

$$(y = 0) \wedge (x \geqslant 0) \wedge (x^2 + y^2 \leqslant R^2).$$

La théorie s'applique. On connaît :

$$V(\mathscr{K}) = 4/3.\pi R^3, \qquad a(\mathscr{S}) = 1/2.\pi R^2.$$

On en déduit : $x_g = 4R/3\pi$ (cas particulier d'un résultat obtenu en **6**.2.*1*, 4°, exemple *d*)).

6.3. MOMENTS D'INERTIE D'UN SYSTÈME MATÉRIEL

6.3.*1*. Moments d'inertie

1° DÉFINITION. — **Soient $(\mathfrak{M}, \rho)$ un système matériel de $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ une variété affine de $\mathscr{E}$ et $m \longmapsto d(m, \mathscr{F})$, l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}_+$, qui à m fait correspondre la distance de m à $\mathscr{F}$ (II.6.2.*1*, 1°) ; on appelle** *moment d'inertie du système matériel* $(\mathfrak{M}, \rho)$ *par rapport à la variété* $\mathscr{F}$, **l'intégrale :**

$$I_{\mathscr{F}} = \int_{\mathfrak{M}} d^2(m, \mathscr{F}).\rho(m).d\mu$$

L'existence de cette intégrale est assurée par le fait que $m \longmapsto d^2(m, \mathscr{F})$ est continue; il s'agit évidemment d'un réel positif. Si le système matériel $(\mathfrak{M}, \rho)$ est homogène et si ρ désigne la valeur constante de l'application $m \longmapsto \rho(m)$ on a :

$$I_{\mathscr{F}} = \rho \int_{\mathfrak{M}} d^2(m, \mathscr{F}).d\mu$$

et le quotient $I_{\mathscr{F}}/M$, où M est la masse de $(\mathfrak{M}, \rho)$, ne dépend pas de ρ.

Suivant la nature de $\mathscr{F}$, on parle de *moment d'inertie par rapport à un point, par rapport à une droite, par rapport à un plan.*

2° ***Moments d'inertie par rapport à deux variétés perpendiculaires.*** — THÉORÈME. — **Soient $(\mathfrak{M}, \rho)$ un système matériel de $\mathscr{E}$ et $(\mathscr{F}, F)$ et $(\mathscr{G}, G)$ deux variétés affines de $\mathscr{E}$ qui sont perpendiculaires (II.6.1.*1*, 5°). Alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est une variété affine de $\mathscr{E}$ et, avec les notations du 1°, entre les différents moments d'inertie de $(\mathfrak{M}, \rho)$, on dispose de l'égalité :**

$$I_{\mathscr{F} \cap \mathscr{G}} = I_{\mathscr{F}} + I_{\mathscr{G}}$$

On a établi en II.6.1.*1*, 5° que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \varnothing$, ce qui entraîne que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est une variété affine de $\mathscr{E}$ de direction $F \cap G$.

Effectuons la démonstration dans l'hypothèse où la dimension de $\mathscr{E}$ est n, étant entendu qu'ici $n = 3$. Puisque $F^{\perp} \subset G$, en complétant une base orthonormale de $F^{\perp}$ en une base orthonormale de G il est possible de trouver une base orthonormale de E, $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, et une décomposition de $\mathbb{N}_n$ en trois sous-ensembles disjoints I, J, K tels que l'on ait :

$$F^{\perp} = \text{Vect } (e_i)_{i \in I}, \qquad G = \text{Vect } (e_i)_{i \in I \cup J}, \qquad G^{\perp} = \text{Vect } (e_i)_{i \in K}$$

Par utilisation de $(F^{\perp})^{\perp} = F$ et de propriétés évidentes, on a alors :

$$F = \text{Vect } (e_i)_{i \in J \cup K}, \qquad F \cap G = \text{Vect } (e_i)_{i \in J}, \qquad (F \cap G)^{\perp} = \text{Vect } (e_i)_{i \in I \cup K}$$

Soient m un point de $\mathscr{E}$, et h la projection orthogonale de m sur $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$; $\overrightarrow{hm}$, qui appartient à $(F \cap G)^{\perp}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{hm} = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{u} \in F^{\perp} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{v} \in G^{\perp}$$

D'après $h \in \mathscr{F}$ et $\mathbf{v} \in F$, le point $m_1 = h + \mathbf{v}$ appartient à $\mathscr{F}$. Comme $\overrightarrow{m_1 m} = \mathbf{u}$ appartient à $F^{\perp}$, m_1 est la projection orthogonale de m sur $\mathscr{F}$. Le point $m_2 = h + \mathbf{u}$ est de même la projection orthogonale de m sur $\mathscr{G}$. Comme $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont orthogonaux, on en déduit, par Pythagore :

$$\|\overrightarrow{mh}\|^2 = \|\overrightarrow{mh_1}\|^2 + \|\overrightarrow{mh_2}\|^2$$

Ainsi :

$$\forall m \in \mathscr{E}, \qquad d^2(m, \mathscr{F} \cap \mathscr{G}) = d^2(m, \mathscr{F}) + d^2(m, \mathscr{G})$$

Reste à utiliser la linéarité de l'intégrale. □

On déduit de ce théorème que si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux variétés affines supplémentaires orthogonales alors le moment d'inertie de $(\mathfrak{M}, \rho)$ par rapport au point $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est la somme des moments d'inertie de $(\mathfrak{M}, \rho)$ par rapport à $\mathscr{F}$ et par rapport à $\mathscr{G}$.

Règles pratiques. — *$(\mathfrak{M}, \rho)$ étant un système matériel de $\mathscr{E}$:*

- *le moment d'inertie par rapport à une droite est la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires contenant cette droite,*
- *le moment d'inertie par rapport à un point est la somme des moments d'inertie par rapport à un plan et à une droite orthogonale à ce plan, contenant tous deux le point.*

On déduit alors :

• *le moment d'inertie par rapport à un point est :*

– la somme des moments d'inertie par rapport à trois plans perpendiculaires deux à deux, contenant ce point ;

– la demi-somme des moments d'inertie par rapport à trois droites, deux à deux orthogonales, contenant ce point.

3° ***Théorème de Huyghens.*** – THÉORÈME. – **Soient $(\mathfrak{M}, \rho)$ un système matériel de $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ une variété affine de $\mathscr{E}$, g le centre d'inertie de $(\mathfrak{M}, \rho)$, $\mathscr{F}_g$ la variété affine de $\mathscr{E}$, parallèle à $\mathscr{F}$, passant par g ; M désignant la masse de $(\mathfrak{M}, \rho)$, d la distance des variétés parallèles $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}_g$ (II.6.2.1, 1°) on dispose, avec les notations de 1°, de l'égalité :**

$$I_{\mathscr{F}} = I_{\mathscr{F}_g} + Md^2$$

On note g' la projection orthogonale de g sur $\mathscr{F}$; pour tout $m \in \mathscr{E}$, on note h et h' les projections orthogonales de m sur $\mathscr{F}_g$ et $\mathscr{F}$ respectivement. On constate que h' est la projection orthogonale de h sur $\mathscr{F}$ et que $\overrightarrow{hh'} = \overrightarrow{gg'}$. De $\overrightarrow{mh'} = \overrightarrow{mh} + \overrightarrow{hh'}$, on déduit alors : $\overrightarrow{mh'} = \overrightarrow{mh} + \overrightarrow{gg'}$ et :

$$\|\overrightarrow{mh'}\|^2 = \|\overrightarrow{mh}\|^2 + \|\overrightarrow{gg'}\|^2 + 2(\overrightarrow{gg'}|\overrightarrow{mh})$$

Or

$$(\overrightarrow{gg'}|\overrightarrow{mh}) = (\overrightarrow{gg'}|\overrightarrow{mh} + \overrightarrow{hg}) = (\overrightarrow{gg'}, \overrightarrow{mg}).$$

Ainsi :

$$d^2(m, \mathscr{F}) = d^2(m. \mathscr{F}_g) + d^2 - 2(\overrightarrow{gg'}|\overrightarrow{gm})$$

et, par linéarité de l'intégrale :

$$I_{\mathscr{F}} = I_{\mathscr{F}_g} + Md^2 - 2I$$

où I désigne $\int_{\mathfrak{M}} (\overrightarrow{gg'}|\overrightarrow{gm}).\ \rho(m)\ d\mu$ qui s'écrit, en utilisant la linéarité de $\mathbf{u} \longmapsto (\overrightarrow{gg'}|\mathbf{u})$, et IV.6.5.2, 3° :

$$I = (\overrightarrow{gg'}| \int_{\mathfrak{M}} \overrightarrow{gm} . \rho(m)\ d\mu)$$

La définition même du centre d'inertie montre que $I = 0$. □

Ce théorème ramène tout calcul de moment d'inertie à un calcul de moment d'inertie par rapport à une variété affine contenant le centre d'inertie.

EXEMPLE. – On considère un cercle $\mathscr{C}$, de centre O, de rayon $R > 0$ support d'un fil homogène, $(\mathscr{C}, \rho)$. Le calcul du moment d'inertie de $\mathscr{C}$ par rapport à O est trivial : il s'agit de

$2\pi\rho R^3$; en introduisant la masse $M = 2\pi\rho R$ de $(\mathscr{C}, \rho)$: $I_0 = MR^2$. Par rapport à un point a quelconque de $\mathscr{E}$, on a :

$$I_a = MR^2 + M\|\overrightarrow{Oa}\|^2.$$

Remarquons que le moment d'inertie de $(\mathscr{C}, \rho)$ par rapport à n'importe quel diamètre de $\mathscr{C}$ est le même ; prenant deux diamètres orthogonaux on en déduit que le moment d'inertie de $(\mathscr{C}, \rho)$ par rapport à un diamètre est : $1/2 . MR^2$.

4° ***Calculs pratiques de moments d'inertie.*** — La définition ramène le calcul d'un moment d'inertie à un calcul d'intégrale. Bien entendu avant tout calcul, l'utilisation du théorème de Huyghens ou des considérations de symétries peuvent éventuellement simplifier les calculs.

Dans la pratique, ce sont les moments d'inertie par rapport à des droites qui sont le plus utiles.

EXEMPLES. — On utilise un repère orthonormal $(O ; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ donné.

a) Moments d'inertie d'une ellipse homogène, pleine.

De façon plus précise, on donne une plaque homogène $(\mathscr{S}, \rho)$, où

$$\mathscr{S} = \{0 + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} | (z = 0) \wedge \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right)\}, \qquad (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2.$$

On cherche d'abord I_Δ, où Δ a pour équation : $(y = 0) \wedge (z = 0)$.

On constate que $\mathscr{S}$ admet la décomposition $((U, F))$, avec :

$$U = \{(\theta, r) \in \mathbb{R}^2 | (0 < \theta < 2\pi) \wedge (0 < r < 1)\}$$

et :

$$F(\theta, r) = O + ar \cos \theta \mathbf{i} + br \sin \theta \mathbf{j}$$

D'où :

$$I_\Delta = \rho \iint_U b^2 r^2 \sin^2 \theta . abr \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r$$

On trouve $I_\Delta = \pi\rho ab^3/4$. Comme la masse de $(\mathscr{S}, \rho)$ est $M = \pi\rho ab$, il vient : $I_\Delta = Mb^2/4$.

— Si Δ' est l'autre axe de $\mathscr{S}$: $I_{\Delta'} = Ma^2/4$. D'où $I_0 = M \dfrac{a^2 + b^2}{4}$.

— En particulier, pour un disque homogène de rayon R, le moment d'inertie par rapport à un diamètre (resp. au centre) est $MR^2/4$ (resp. $MR^2/2$).

b) Moments d'inertie d'une boule homogène.

On donne le solide homogène $(\mathscr{K}, \rho)$, où

$$\mathscr{K} = \{O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} | x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\}$$

qui est manifestement un compact cubable de $\mathbb{R}^3$.

On a :

$$I_O = \rho \iiint_{\mathscr{K}} (x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z$$

Un calcul en coordonnées sphériques donne $I_O = 4\pi/5 . \rho R^5$. Comme la masse de $(\mathscr{K}, \rho)$ est $M = 4\pi/3 . \rho R^3$, il vient : $I_O = 3/5 . MR^2$. D'où :

— Pour tout plan diamétral $\mathscr{P}$: $I_{\mathscr{P}} = 1/5 . MR^2$.
— Pour tout diamètre $\mathscr{D}$: $I_{\mathscr{D}} = 2/5 . MR^2$.

6.3.2. Matrice d'inertie d'un système matériel, en un point

1° ***Position du problème.*** — On se donne un système matériel $(\mathfrak{M}, \rho)$ et un point O de $\mathscr{E}$. Une droite $\mathscr{D}$ de $\mathscr{E}$, contenant O est caractérisée par sa direction $\mathbb{R}\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in E \backslash \{0\}$; on se propose d'étudier le moment d'inertie $I_{\mathscr{D}}$, de $(\mathfrak{M}, \rho)$ par rapport à $\mathscr{D}$, en fonction de cette direction.

Calcul de $I_{\mathscr{D}}$. — Étant donné un point $m \in \mathscr{E}$, d'après II.6.3.2, 2°, on sait que :

$$d^2(m, \mathscr{D}) = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2} \|\overrightarrow{Om} \wedge \mathbf{u}\|^2$$

$$= \frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2} (\|\mathbf{u}\|^2 . \|\overrightarrow{Om}\|^2 - (\mathbf{u}|\overrightarrow{Om})^2).$$

Ainsi :

$$\|\mathbf{u}\|^2 . I_{\mathscr{D}} = \int_{\mathfrak{M}} (\|\mathbf{u}\|^2 . \|\overrightarrow{Om}\|^2 - (\mathbf{u}|\overrightarrow{Om})^2) . \rho(m) . d\mu$$

Introduisons alors l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$:

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \longmapsto \varphi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \int_{\mathfrak{M}} \{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2)\|\overrightarrow{Om}\|^2 - (\mathbf{u}_1|\overrightarrow{Om}).(\mathbf{u}_2|\overrightarrow{Om})\}\rho(m)\, d\mu$$

Il est facile de voir que φ est bilinéaire, symétrique et que l'application $\mathbf{u} \longmapsto \|\mathbf{u}\|^2 . I_{\mathscr{D}}$ est la forme quadratique associée à φ.

Nous pouvons donc poser :

2° Définition. — **Étant donnés un système matériel $(\mathfrak{M}, \rho)$ et un point O de $\mathscr{E}$, on appelle** *matrice d'inertie* **de $(\mathfrak{M}, \rho)$ en O, relative à une base orthonormale $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de E, la matrice qui représente dans cette base la forme quadratique $\mathbf{u} \longmapsto \|\mathbf{u}\|^2 . I_{O+\mathbb{R}\mathbf{u}}$.**

Recherchons les coefficients d'une telle matrice. Nous notons, pour tous $\mathbf{u} \in E$ et $m \in \mathscr{E}$:

$$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}, \qquad m = O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Un calcul simple, laissé au lecteur, donne :

$$\|\mathbf{u}\|^2 . I_{O+R\mathbf{u}} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\beta^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta$$

où A, B, C désignent respectivement I_{Ox}, I_{Oy}, I_{Oz} et où :

$$D = \int_{\mathfrak{M}} yz\rho(m)\; d\mu; \qquad E = \int_{\mathfrak{M}} zx\rho(m)\; d\mu; \qquad F = \int_{\mathfrak{M}} xy\rho(m)\; d\mu$$

On dit que D est le *produit d'inertie* du système matériel $(\mathfrak{M}, \rho)$ par rapport au plan de coordonnées d'équations $x = 0$, et ainsi de suite.

La matrice d'inertie de $(\mathfrak{M}, \rho)$ en O, relative à $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est ainsi :

$$\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$$

3° ***Repère principal d'inertie.*** – Comme pour toute forme quadratique sur un espace euclidien, il est possible de trouver une base orthonormale $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de E, dans laquelle la matrice de la forme quadratique $\mathbf{u} \longmapsto \|\mathbf{u}\|^2 . I_{O+\mathbb{R}\mathbf{u}}$ soit diagonale. Le repère $(O\,; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est alors dit *repère principal d'inertie*, les droites $O + \mathbb{R}\mathbf{i}$, $O + \mathbb{R}\mathbf{j}$, $O + \mathbb{R}\mathbf{k}$ étant alors dites *axes principaux d'inertie* du système matériel $(\mathfrak{M}, \rho)$ en O. Un cas particulier important est celui où O est le centre d'inertie de $(\mathfrak{M}, \rho)$.

En ce qui concerne les applications de cette théorie (en particulier à l'étude des gyroscopes) nous renvoyons le lecteur à un cours de Mécanique.

EXERCICES

$\mathscr{E}_n$ ($n = 2$ ou 3) est un espace affine euclidien; tous les repères sont orthonormaux.

6.01. – Masse et centre d'inertie d'un fil de $\mathscr{E}_3$ dont le support est celui de l'arc paramétré $([0, \pi/2], \theta \longmapsto O + \cos\theta\,\mathbf{u}_\theta + \sin\theta\,\mathbf{k})$, et dont la densité linéaire au point de paramètre θ est $\cos\theta$.

6.02. – Centre d'inertie d'un sous-arc homogène d'une parabole, d'une chaînette, d'une spirale logarithmique, d'une hélice circulaire.

6.03. – Lieu du centre d'inertie d'un sous-arc homogène d'un cercle dont une extrémité est fixe et dont l'autre extrémité décrit (éventuellement plusieurs fois) le cercle.

6.04. – Soit $\gamma = (I, f)$ un C^k-arc simple et régulier de $\mathscr{E}_3$, $k \geqslant 1$, paramétré au moyen d'une abscisse curviligne. *On fixe* $s_0 \in I$; on note $\gamma_s = \gamma_{s_0 s}$ si $s \geqslant s_0$ et $\gamma_s = \gamma_{s s_0}$ si $s < s_0$; soit $\mathscr{C}_s = \operatorname{supp} \gamma_s$. On définit $g : I \to \mathscr{E}_3$ par : $g(s_0) = f(s_0)$ et, si $s \in I \backslash \{s_0\}$, $g(s)$ est le centre d'inertie du fil $(\mathscr{C}_s, 1)$.

a) Montrer que (I, g) est un arc paramétré admettant la droite $\operatorname{Aff}(f(s), g(s))$ pour tangente en tout point de paramètre s tel que $g(s) \neq f(s)$.

b) On suppose ici $k \geqslant 3$. Trouver la limite, quand s tend vers s_0, du trièdre de Serret-Frenet de (I, g) au point de paramètre s.

c) On suppose ici $k \geqslant 2$. A toute application $\varphi : J \to I$ (J : intervalle de $\mathbb{R}$), de classe C^2, on peut associer les mouvements ponctuels $F = f \circ \varphi$ et $G = g \circ \varphi$. Déterminer φ de façon qu'à tout instant $t \in J$, les vecteurs $\dfrac{d^2F}{dt^2}$ et $\dfrac{dG}{dt}$ soient colinéaires.

6.05. – Masse d'une plaque carrée, à densité superficielle proportionnelle à la distance au centre (resp. au carré de la distance au centre).

6.06. — Centre d'inertie d'une plaque plane homogène limitée par :

- une arche de cycloïde et sa base;
- une cardioïde;
- une boucle de lemmiscate ou de strophoïde;
- une spirale logarithmique $\rho = ae^{m\theta}$ et deux rayons vecteurs issus de O;
- une conique et une droite passant par un foyer;
- une parabole et une droite perpendiculaire à l'axe;
- une ellipse et l'un de ses axes de symétrie.

6.07. — *a*) Montrer que toute application continue $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, telle que

$$\int_0^\pi f(\theta) \sin \theta \, d\theta = 0, \qquad \text{et} \qquad \int_0^\pi f(\theta) \cos \theta \, d\theta = 0,$$

admet au moins deux zéros sur $]0, \pi[$.

b) Soient $\mathscr{C}$ un C^0-arc fermé simple de $\mathscr{E}_2$; on note g le centre d'inertie de la plaque plane homogène limitée par $\mathscr{C}$. On suppose que toute droite de $\mathscr{E}_2$ qui contient g coupe $\mathscr{C}$ exactement en deux points. Montrer qu'il existe au moins trois cordes de $\mathscr{C}$ dont g soit le milieu.

6.08. — Centre d'inertie du solide homogène constitué par un quart de tore à collier, plein, limité à deux plans méridiens orthogonaux.

6.09. — Centre d'inertie du solide homogène limité par la surface obtenue en faisant tourner une cardioïde (resp. une boucle de lemniscate de Bernoulli) autour de son axe de symétrie.

6.10. — Centre d'inertie du solide homogène limité par les surfaces d'équations :

a) $x^2 + y^2 = 3az$ et $3x + 4z = 12a$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ et $x^2 + y^2 - 2ax = 0$;

c) $x^2 + 2y^2 = az$ et $z = y + a$;

d) $z = 0$ et $z^2 = 2ax$ et $x^2 + y^2 = ax$;

e) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ et $z = 0$ et $z = c$.

6.11. — Soit $(\mathscr{K}, \rho)$ un solide de $\mathscr{E}_3$, pas nécessairement homogène. Montrer que si le compact $\mathscr{K}$ est convexe, le centre d'inertie du solide est un point de $\mathscr{K}$.

6.12. — On remplit progressivement un vase pesant avec un liquide, pas nécessairement homogène. On désigne par $\varphi(z)$ la côte du centre d'inertie vase-liquide lorsque la côte de la surface qui limite le liquide est z.

Montrer que (sous des conditions de régularité) la fonction φ passe par un minimum, atteint pour une valeur de z telle que $\varphi(z) = z$.

6.13. — Soit $\mathscr{K}$ un cone de sommet O et de base plane $\mathscr{S}$; G est le centre d'inertie du solide $(\mathscr{K}, 1)$, g est celui de la plaque $(\mathscr{S}, 1)$. Montrer : $\overrightarrow{OG} = 3/4 . \overrightarrow{Og}$.

6.14. — Dans le plan $xOz \subset \mathscr{E}_3$, on considère les deux parties :

$$(0 \leqslant z \leqslant 2a) \wedge (0 \leqslant x \leqslant a - z/2)$$

et

$$(-a/2 \leqslant z \leqslant 0) \wedge (0 \leqslant x \leqslant \sqrt{a^2 - 4z^2}).$$

En tournant autour de Oz, elles engendrent respectivement un cône C et un demi-ellipsoïde aplati E, que l'on considère comme des solides séparément homogènes, de masses respectives m et M (faire une figure).

a) Déterminer le centre d'inertie du solide $C \cup E$.

b) Étudier la stabilité de la position d'équilibre sur le plan horizontal, dans laquelle l'axe de révolution est vertical, et le solide repose sur la partie ellipsoïdale.

6.15. — Moment d'inertie par rapport à O d'une plaque homogène limitée par

a) La cardioïde $\rho = a(1 + \cos\theta)$, $\theta \in [-\pi, \pi]$;

b) La boucle de lemniscate $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

6.16. — Moment d'inertie d'un hémisphère plein, homogène, par rapport à une tangente au grand cercle qui le limite.

6.17. — Matrice d'inertie en O, relative à la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, du solide homogène $(\mathscr{K}, \rho)$, où $\mathscr{K}$ est défini par :

$$(x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2) \wedge (x \geqslant 0) \wedge (y \geqslant 0) \wedge (z \geqslant 0)$$

Matrice principale d'inertie en O; centre d'inertie du solide.

6.18. — Utiliser la théorie de la matrice d'inertie au calcul du moment d'inertie :

— d'une plaque elliptique homogène par rapport à la tangente en l'un des sommets;

— d'une plaque plane homogène, limitée par un triangle équilatéral, par rapport à une droite de son plan, puis par rapport à un sommet;

— d'un tétraèdre régulier plein, homogène, par rapport à une arête;

— d'un cylindre de révolution, solide homogène limité à deux sections droites, par rapport à une tangente à la partie cylindrique de son bord.

6.19. — Un cône, solide homogène, est limité à son sommet et à une section par un plan perpendiculaire à une génératrice Δ. Dans le cas où cette section est un disque, calculer le moment d'inertie par rapport à Δ.

6.20. — *a*) Trouver tous les champs de vecteurs dont le flux est nul à travers toute portion de la surface d'un cône quelconque de sommet donné.

b) Dans toute la suite, on donne un compact à bord $\mathscr{K}$, inclus dans une surface de $\mathscr{E}_3$ dont la frontière est le support $\mathscr{C}$ d'un arc fermé simple, C^1 par morceaux.

Soit $a \in \mathscr{E}_3$ tel que toute droite issue de a coupe $\mathscr{K}$ en un point au plus. On note Δ_a le compact de $\mathscr{E}_3$ engendré par le segment $[a, m]$ lorsque m décrit $\mathscr{K}$ et on désigne par I_a le moment d'inertie par rapport à a du solide homogène $(\Delta_a, 1)$. Montrer que I_a est égal au flux à travers $\mathscr{K}$ du champ de vecteurs $m \longmapsto 1/5 . \|\overrightarrow{am}\|^2 . \overrightarrow{am}$.

c) On considère les points $a(\alpha, \beta, 0)$, $b(-\alpha, \beta, 0)$, $c(-\alpha, -\beta, 0)$, $d(\alpha, -\beta, 0)$ et on définit I_a, I_b, I_c, I_d comme ci-dessus. En se limitant au cas où Δ_a, Δ_b, Δ_c, Δ_d sont tous quatre dans le demi-espace $z \geqslant 0$, vérifier :

$$I_a - I_b + I_c - I_d = \int_{\mathscr{C}} P \, dz$$

où P est une application de $\mathscr{E}_3$ dans $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

INDEX ALPHABÉTIQUE

- *Les renvois concernent les numéros de page.*
- *Un terme défini par un groupe de mots est classé d'après le premier de ces mots (à moins qu'il ne fasse intervenir un nom propre, auquel cas il est classé d'après ce nom propre).*

